

## 213. Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

**Introduction :** Les espaces de Hilbert sont des espaces dotés d'une forte structure, pour lesquels on peut généraliser des résultats de la dimension finie.

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1 Espaces de Hilbert

#### 1.1 Espaces préhilbertiens et de Hilbert

**Définition 1.** On appelle espace préhilbertien la donnée d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $H$  muni d'un produit scalaire.

**Proposition 2** (Cauchy-Schwarz). On a alors, pour tous  $x, y \in H$ ,  $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ , avec égalité si et seulement si  $(x, y)$  est liée.

**Proposition 3.**  $\|\cdot\|$  défini par  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  définit alors une norme sur  $H$ .

**Proposition 4.** Pour tous  $x, y \in H$ ,  $\frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

**Définition 5.**  $x, y \in H$  sont dits orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Pour  $A \subseteq H$ , on définit l'orthogonal de  $A$  par  $A^\perp = \{x \in H, \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$ .

**Proposition 6** (Pythagore). Si  $x, y \in H$  sont orthogonaux, alors  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , et la réciproque est vraie si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Définition 7.**  $H$  est dit de Hilbert s'il est complet pour la norme associée.

**Exemple 8.**  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  munis du produit scalaire usuel sont des espaces de Hilbert.  $\ell^2(\mathbb{C}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \sum a_n^2 < +\infty\}$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $\langle a, b \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n}$ . Plus généralement, si  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  espace mesuré,  $L^2(\mu)$  muni de  $\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} d\mu$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 9.** Un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert est de Hilbert.

**Contre-exemple 10.**  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  est un espace préhilbertien non complet.

Dans toute la suite on considérera que  $H$  est un espace de Hilbert.

#### 1.2 Théorème de projection

**Théorème 11.** Soit  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $H$ . Alors, pour tout  $x \in H$ , il existe un unique  $y \in C$  tel que  $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ . De plus,  $y$  est caractérisé par  $\forall z \in C, \Re(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$ .

**Définition 12.**  $y$  est appelé projection de  $x$  sur  $C$ , et noté  $p_C(x)$ .

**Proposition 13.**  $p_C : H \rightarrow H$  est une application 1-lipschitzienne (donc continue).

**Théorème 14.** Soit  $F$  sous-espace fermé de  $H$ . Alors  $p_F : H \rightarrow F$  est linéaire, et pour  $x \in H, p_F(x)$  est l'unique  $y \in F$  vérifiant  $y \in F$  et  $x - y \in F^\perp$ . On a ainsi  $H = F \oplus F^\perp$ , et le projecteur sur  $F$  associé est  $p_F$ .

**Corollaire 15.** Si  $F$  sous-espace de  $H$ , on a  $H = \overline{F} \oplus F^\perp$ . En particulier,  $F$  est dense dans  $H$  ssi  $F^\perp = \{0\}$ .

**Exemple 16.** Si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  espace probabilisé, et  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , si  $\mathcal{G}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ , alors  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  est définie comme le projeté orthogonal de  $X$  sur  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ .

**Contre-exemple 17.** Si  $H = \ell^2(\mathbb{C})$  et  $F = \{u \in H, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = 0\}$ ,  $F$  non fermé et on n'a pas  $H = F \oplus F^\perp$ .

**Corollaire 18.** Si  $A$  partie de  $H$ , on a  $A^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}(A)}$ .

#### 1.3 Théorème de représentation de Riesz

**Théorème 19** (Riesz). Pour  $y \in H$ , on note  $\phi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle \in H'$ . Alors  $\Phi : H \rightarrow H', y \mapsto \phi_y$  est une isométrie surjective.

**Proposition 20.** Pour tout  $T \in \mathcal{L}(H)$ , il existe un unique  $T^* \in \mathcal{L}(H)$  tel que  $\forall x, y \in H, \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ . De plus,  $\|T^*\| = \|T\|$ .

**Définition 21.**  $T^*$  est appelé adjoint de  $T$ .

**Exemple 22.** Pour  $K \in L^2(\mathbb{R}^2, \lambda)$ , on pose  $K^* : (x, y) \mapsto K(y, x)$ , et pour  $f \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ , on pose  $T_K f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y)f(y)dy$ . Alors  $T_K$  opérateur linéaire continu de  $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$  et  $T_K^* = T_K^*$ .

**Théorème 23** (Lax-Milgram). On suppose  $H$  espace de Hilbert réel, soient  $\ell \in H'$  et  $a$  forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$ , ie telle qu'il existe  $\alpha > 0, \forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ . Alors il existe un unique  $u \in H$  tel que pour tout  $v \in H, a(u, v) = \ell(v)$ . De plus,  $u = \arg \min_{v \in H} \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$ .

**Application 24.** Pour  $I = ]0, 1[$ ,  $f \in C(\bar{I})$ , le problème  $-u'' + u = f$  sur  $I$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  possède une unique solution  $u \in H^2(I)$  et celle-ci vérifie  $u \in H_0^1(I)$  et  $u = \arg \min_{v \in H_0^1(I)} \left( \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) d\lambda - \int_I f v d\lambda \right)$ .

## 2 Bases hilbertiennes

### 2.1 Définitions et propriétés

**Définition 25.** On appelle famille orthogonale une famille d'éléments  $(e_i)_{i \in I} \in H^I$  telle que  $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$ .

**Proposition 26.** Une famille orthogonale sans élément nul est libre.

**Définition 27.** Une famille orthogonale est dite orthonormée si  $\forall i \in I, \langle e_i, e_i \rangle = 1$ . On appelle base hilbertienne (dénombrable) une famille orthonormée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $H = \text{vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ .

**Théorème 28** (Gram-Schmidt). Pour toute famille libre dénombrable  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe une famille orthonormée  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{vect}(y_1, \dots, y_k)$ .

Elle se construit par récurrence en posant  $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$  puis  $z_{n+1} = x_{n+1} - P_n(x_{n+1})$  où  $P_n$  projecteur orthogonal sur  $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ , et enfin  $y_{n+1} = \frac{1}{\|z_{n+1}\|} z_{n+1}$ .

**Théorème 29.** Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.  $\psi : H \rightarrow \ell^2(\mathbb{R}), x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors une isométrie surjective.

**Proposition 30** (Parseval). Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne de  $H$ , on a pour tout  $x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$  et  $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ .

### 2.2 Polynômes orthogonaux

**Définition 31.** Soit  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ . On appelle fonction poids une fonction  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable strictement positive telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}, \int_I |x^n| \rho(x) dx < +\infty$ .

On note  $L^2(I, \rho)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $I$  par rapport à la mesure de densité  $\rho$  par rapport à  $\lambda$ . C'est un espace de Hilbert.

**Proposition 32.** Il existe une unique famille orthogonale  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$ .

**Exemple 33.** Pour  $I = \mathbb{R}$  et  $\rho(x) = e^{-x^2}$ , on obtient les polynômes de Hermite :  $P_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ . Pour  $I = [-1, 1]$  et  $\rho(x) = 1$ , on obtient les polynômes de Legendre :  $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ .

**Théorème 34.** Soit  $\rho$  fonction poids telle que  $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$  pour un certain  $\alpha > 0$ . Alors la famille de polynômes orthogonaux associés à  $\rho$  forme une base hilbertienne de  $L^2(I, \rho)$ .

**Application 35** (Méthode de Gauss). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme de Legendre  $L_n$  possède  $n$  racines distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , et si on note, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\lambda_i = \int_{-1}^1 \left( \prod_{j \neq i} \frac{t - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \right) dt, \text{ on a } \forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^1 Q(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(\alpha_i).$$

### 2.3 Séries de Fourier

On note  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et on munit  $L^2(\mathbb{T})$  de la mesure  $\frac{1}{2\pi}\lambda$  et du produit scalaire usuel. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit  $e_n : x \mapsto e^{inx}$ .

**Proposition 36.**  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une famille orthonormée de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Définition 37.** On définit, pour  $N \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_N = \text{vect}(e_n, |n| \leq N)$ , ainsi que pour  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , les coefficients de Fourier  $c_N(f) = \langle f, e_N \rangle$  et les sommes partielles de la

$$\text{série de Fourier, } S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n.$$

**Proposition 38.**  $S_N(f)$  est le projeté orthogonal de  $f$  sur  $\mathcal{P}_N$ .

**Théorème 39** (Féjer). On pose pour  $N \in \mathbb{N}, \sigma_N(f) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$ .

Alors  $\sigma_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Corollaire 40.**  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Application 41.** Parseval s'écrit alors, pour tout  $f \in L^2(\mathbb{T}), \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ .

En l'appliquant à  $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ , on tire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

## 3 Applications

### 3.1 Traitement du signal

**Définition 42.** Soit  $I = [-1, 1]$ . On appelle ensemble des signaux à bande limitée dans  $I$  l'ensemble  $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$ .

**Proposition 43.**  $BL^2(I)$  est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont  $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne.

**Théorème 44** (Shannon).  $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \operatorname{sinc}(2k\pi - x)$ , la convergence ayant lieu uniformément et dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 3.2 Problèmes d'extrema

**Exemple 45.** On cherche à déterminer le minimum de  $\int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)^2 dt$  pour  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  ainsi que le triplet où il est atteint. Cela revient à chercher dans  $L^2([-1, 1])$  le projeté orthogonal de  $t \mapsto t^4$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$ . Le théorème de projection donne  $a = \frac{6}{7}, b = 0, c = -\frac{3}{35}$  et le minimum vaut  $\frac{128}{11025}$ .

## Développements

- Densité des polynômes orthogonaux.
- Théorème d'échantillonnage de Shannon.

## Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] B. Hauchecorne, LES CONTRE-EXEMPLES EN MATHÉMATIQUES, Ellipses.
- [3] G. Hirsch, G. Lacombe, ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Dunod.
- [4] F. Fontanez, B. Randé, LES CLEFS POUR LES MINES, Calvage & Mounet.