

209. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Introduction : Les polynômes sont les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement, d'où l'intérêt de savoir approximer une fonction arbitraire par des polynômes.

1 Interpolation polynomiale

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, soient $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in [a, b]$.

1.1 Généralités

Définition 1. On définit la famille des polynômes de Lagrange aux points $(x_i)_i$ par $\ell_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On définit le polynôme d'interpolation de f aux

points $(x_i)_i$ par $P_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_i$. On note aussi $\pi_{n+1}(X) = \prod_{j=0}^n (X - x_j)$.

Proposition 2. $P_n(f)$ est le seul polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_n(f)(x_i) = f(x_i)$.

Exemple 3. Si $n = 1, x_0 = a, x_1 = b, P_1(f)$ est la corde joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Théorème 4. On suppose $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$.

Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$, $f(x) - P_n(f)(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$.

Ainsi $\|f - P_n(f)\|_\infty \leq \frac{\|\pi_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$.

Exemple 5. On suppose $a = -1, b = 1$.

— Points équidistants : $x_i = \frac{2i}{n} - 1$, alors $\|\pi_{n+1}\|_\infty \geq \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} (n \rightarrow \infty)$.

— Points de Tchebychev : $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, alors $\|\pi_{n+1}\|_\infty \geq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

1.2 Stabilité et convergence

Définition 6. On définit alors l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux points (x_i) par $P_n \begin{cases} \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathcal{C}([a, b]) \\ f & \mapsto P_n(f) \end{cases}$.

Proposition 7. P_n est linéaire continu pour $\|\cdot\|_\infty$, de norme $\Lambda_n = \sup_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|$.

Proposition 8. Pour les points de Tchebychev, on a $\Lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(n)$.

Corollaire 9. Il existe une fonction continue dont le polynôme d'interpolation aux points de Tchebychev ne converge pas uniformément.

Exemple 10 (Phénomène de Runge). Soit $\alpha > 0$. Pour $x \in [-1, 1]$, soit

$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$. f est analytique mais la suite de ses polynômes d'interpolation (points équidistants) diverge.

1.3 Application : Quadrature de Newton-Cotes

L'idée est d'approximer $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ par $I_n(f) := \int_a^b P_n(f)(x)dx$, où $P_n(f)$ est pris avec des points équidistants.

Définition 11. La quadrature est dite d'ordre k si pour tout $f \in \mathbb{R}_k[X], I_n(f) = I(f)$, et s'il existe $g \in \mathbb{R}_{k+1}[X], I(g) \neq I_k(g)$.

Proposition 12. La méthode de Newton-Cotes est d'ordre n si n est impair et d'ordre $n+1$ si n pair.

Exemple 13. Si $n = 1$, c'est la méthode des trapèzes (d'ordre 1). Si $n = 2$, c'est la méthode de Simpson (ordre 3).

2 Approximation uniforme

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Théorème 14. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|_\infty$.

Définition 15. Ce polynôme est appelé polynôme de meilleure approximation uniforme de f .

Théorème 16. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. On définit son *module de continuité* par $w_f(h) = \sup_{|x-y|<h} |f(x) - f(y)|$. Pour $p \in [0, 1]$, soient $X_1(p), \dots, X_n(p)$ iid suivant une loi

de Bernoulli de paramètre p . On pose $S_n(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p)$. On pose enfin pour tout

$$p \in [0, 1], B_n(p) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) \right].$$

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f , on a $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ et cette inégalité est optimale.

3 Approximation locale : formules de Taylor

Soit I intervalle ouvert de \mathbb{R} , soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d)$.

3.1 Rappel des formules de Taylor

Soit $a \in I$ tel que f soit n fois dérivable en a . On définit le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a : $T_a^n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$. Alors :

Théorème 17 (Taylor-Young). $\forall x \in I, f(x) = T_a^n(f)(x) + o_{x \rightarrow a}((x - a)^n)$.

Théorème 18 (reste intégral). $\forall x \in I$, si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, x])$, on a

$$f(x) = T_a^n(f)(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Théorème 19 (Taylor-Lagrange). $\forall x \in I$, si $f \in \mathcal{C}^n([a, x], \mathbb{R})$, $n + 1$ fois dérivables sur $]a, x[$, alors il existe $c \in]a, x[$ tel que $f(x) = T_a^n(f)(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$.

Corollaire 20. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, x], \mathbb{R})$, on a

$$|f(x) - f(a) - T_a^n(f)(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

3.2 Applications

Proposition 21. Soit $a \in I$. Si f est n fois dérivable en a , alors f admet un développement limité à l'ordre n en a , donné par la formule de Taylor-Young.

Exemple 22. Pour $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Application 23. $\frac{x e^x - \sin(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Application 24 (Théorème central limite). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid dans L^2 . Alors, si on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\sqrt{\frac{n}{\text{Var}(X_1)}} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right)$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Théorème 25 (Méthode de Newton). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. On se donne $x_0 \in I$, et on pose $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que f soit de classe \mathcal{C}^2 sur $] \alpha - \delta, \alpha + \delta [$ et si f' ne s'annule pas sur cet intervalle, alors pour tout $x_0 \in] \alpha - \delta, \alpha + \delta [$, la suite converge quadratiquement vers α .

4 Polynômes trigonométriques

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on identifie les fonctions $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ aux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques.

4.1 Généralités

Définition 26. On appelle ensemble des polynômes trigonométriques, et on note \mathcal{P} , le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par les $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $e_n : t \mapsto e^{int}$.

Théorème 27 (Weierstrass). \mathcal{P} est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Définition 28. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit son n -ème coefficient de Fourier par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. On appelle série de Fourier de f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.

Proposition 29. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 30 (Parseval). Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

4.2 Convergence des séries de Fourier

Théorème 31 (Dirichlet). Si f est continue, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement vers f dans $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

Application 32. Soit $u_0 \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, \mathcal{C}^1 par morceaux avec $u(0) = u(2\pi)$. On considère le problème aux limites $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[$, $u(0, x) = u_0(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$, $u(t, 0) = u(t, 2\pi)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Il y a une unique solution continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$, \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$.

Développements

- Stabilité de l'interpolation de Lagrange.
- Polynômes de Bernstein.
- Équation de la chaleur avec conditions aux limites périodiques.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [3] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.