

## 208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

**Introduction :** Les espaces vectoriels (normés) de dimension finie possèdent de nombreuses propriétés. Lesquelles s'étendent en dimension infinie ? Quel rôle y joue la complétude ?

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### 1 Généralités sur les espaces normés

#### 1.1 Espaces vectoriels normés

**Définition 1.** On appelle norme sur  $E$  une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :

- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ .

**Exemple 2.** Sur  $E = \mathbb{R}^n$ , on peut définir les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  par :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

**Exemple 3.** Sur  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , on peut définir les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$  par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 f(t) dt, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

**Proposition 4.** Une norme  $N$  sur  $E$  définit une distance  $d$  donnée par  $d(x, y) = N(x - y)$ , et donc une topologie sur  $E$ .

**Remarque 5.** Deux normes différentes peuvent définir deux topologies différentes sur le même espace.

**Exemple 6.** Considérons les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $E = C^0([0, 1])$ , et la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f_n(x) = x^n$ . Alors la suite converge vers la fonction nulle pour  $\|\cdot\|_1$  mais pas pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Définition 7.** Deux normes  $N, N'$  sont dites équivalentes s'il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $\alpha N \leq N' \leq \beta N$ .

**Proposition 8.** Deux normes définissent la même topologie, si et seulement si elles sont équivalentes.

### 1.2 Applications linéaires continues

**Proposition 9.** Soient  $E, F$  deux evn, soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $\varphi$  est continue, si et seulement s'il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in E, \|\varphi(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ .

**Exemple 10.** Dans  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , l'application  $f \mapsto f(0)$  est continue pour  $\|\cdot\|_\infty$  mais pas pour  $\|\cdot\|_1$ .

**Définition 11.** Si  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  est continue, on pose alors  $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\varphi(x)\|_F$ .

On l'appelle norme subordonnée à  $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$ .

**Proposition 12.** On définit ainsi une norme sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

**Proposition 13.**  $\|\varphi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\varphi(x)\|_F$ .

**Exemple 14.** Soit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ .  $\Phi_0 : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$  est continue, et  $\|\Phi_0\| = 1$ .

**Remarque 15.** Le calcul de la norme subordonnée permet de mener des calculs de stabilité d'une opération linéaire.

**Exemple 16.** Soit  $[a, b]$  segment de  $\mathbb{R}$ , soient  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  deux à deux distincts. On définit l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux points  $x_0, \dots, x_n$ ,  $P_n \begin{cases} \mathcal{C}([a, b]) & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ f & \mapsto P_n(f) \end{cases}$ , avec  $P_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i$ , où les  $l_i$  sont les polynômes

de Lagrange des  $x_i$ . Alors  $P_n$  est linéaire continue, de norme  $\Lambda_n = \sup_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |l_i(x)|$ .

**Application 17** (Stabilité). On prend  $[a, b] = [-1, 1]$  et on considère les points d'interpolation de Tchebychev, définis par  $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$ . Alors  $\Lambda_n \geq \frac{\pi}{2} \ln(n+1) + c$  pour une constante  $c$ .

## 2 Espaces normés de dimension finie

On pose désormais  $E = \mathbb{R}^n$ .

### 2.1 Quelques résultats généraux

**Lemme 18.** La boule unité de  $E$  est compacte pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Théorème 19.** Toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

**Corollaire 20.** Toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes. Il existe donc une unique topologie normée canonique.

**Proposition 21.** Toutes les applications linéaires sont continues pour cette topologie.

**Proposition 22.** Les compacts de cette topologie sont les fermés bornés.

**Théorème 23 (Riesz).** Un espace normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.

## 2.2 Espace des matrices

**Définition 24.** Une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite matricielle si  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

**Proposition 25.** Toute norme subordonnée à une norme sur  $\mathbb{C}^n$  est matricielle.

**Exemple 26.** La norme de Frobenius  $\|M\|_F = \sqrt{\text{tr}({}^tMM)}$  est une norme matricielle mais pas une norme subordonnée.

**Proposition 27.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $\rho(A)$  son rayon spectral. Alors, pour toute norme matricielle, on a  $\|A\| \leq \rho(A)$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une norme subordonnée telle que  $\rho(A) \leq \|A\| + \varepsilon$ .

**Application 28.** La suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 si et seulement si  $\rho(A) < 1$ .

## 3 Espaces normés complets

### 3.1 Espaces de Banach

**Définition 29.** On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

**Proposition 30.**  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach si et seulement si, pour tout  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$  converge  $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  converge.

**Exemple 31.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^n$  est un espace de Banach.

**Exemple 32.** Soit  $K$  un espace métrique compact. Alors  $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$  est un espace de Banach.

**Théorème 33 (Baire).** Si  $E$  est un espace de Banach, alors toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

**Application 34.** Un espace vectoriel normé possédant une base dénombrable n'est pas de Banach.

**Théorème 35 (Banach-Steinhaus).** Soient  $E, F$  espaces de Banach, soit  $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E, F)^I$ . On suppose que pour tout  $x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$ . Alors  $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$ .

**Application 36.** Il existe  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  telle que la suite  $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge pour les points d'interpolation de Tchebychev.

**Théorème 37 (Application ouverte).** Soient  $E, F$  espaces de Banach, soit  $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$  surjective. Alors  $T$  est ouverte.

**Application 38.** Si  $\dim(F) = +\infty$ , il n'existe pas d'opérateur  $T : E \rightarrow F$  compact surjectif.

**Théorème 39 (Graphe fermé).** Soient  $E, F$  de Banach, soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si son graphe est fermé dans  $E \times F$ , alors  $T$  est continue.

**Application 40.** La transformée de Fourier n'est pas surjective de  $L^1$  dans  $L^1$ .

### 3.2 Espaces de Hilbert

**Définition 41.** On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire le rendant complet.

**Exemple 42.**  $\ell^2(\mathbb{C}), L^2(\mathbb{R}^d)$  sont des espaces de Hilbert.

**Théorème 43 (Projection).** Soit  $H$  un Hilbert, soit  $C$  convexe fermé non vide de  $H$ . Alors, pour  $x \in H$ , il existe un unique  $y \in C$  tel que  $\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ .  $y$  est caractérisé par  $\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ .

**Application 44.** Définition de l'espérance conditionnelle dans  $L^2$ .

**Proposition 45.** Soit  $F$  sous-espace de  $H$ . On a  $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$ . En particulier,  $H = \overline{F} \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$ .

**Théorème 46 (représentation de Riesz).** Soit  $\varphi$  forme linéaire continue sur  $H$ . Alors il existe un unique  $a \in H$  tel que, pour tout  $x \in H, \langle \varphi, x \rangle = \langle f, x \rangle$ , et  $\|\varphi\| = \|f\|$ .

**Application 47.** Existence et unicité de solutions faibles de problèmes elliptiques.

**Définition 48.** On appelle base hilbertienne de  $H$  une famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  orthonormale telle que  $H = \text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ .

**Proposition 49.** Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne et est isométriquement isomorphe à  $\ell^2$ .

**Proposition 50** (Parseval). Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne de  $H$ , alors pour tout

$$x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

**Exemple 51** (Shannon). Soit  $I = [-1, 1]$ .

On considère  $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$ .

(i).  $BL^2(I)$  est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont

$\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne.

(ii).  $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \operatorname{sinc}(2k\pi - x)$ , la convergence ayant lieu uniformément et dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

## Développements

- Stabilité de l'interpolation de Lagrange.
- Théorème d'échantillonnage de Shannon.

## Références

- [1] G. Allaire, S. M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [3] D. Li, COURS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Ellipses.