

207. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Introduction : Prolonger une fonction revient à étendre le domaine de définition d'une fonction, sans étendre le domaine d'arrivée et en conservant certaines propriétés de régularité.

Définition 1. Soient X, Y deux ensembles, soit $A \subseteq X$, soit $f : A \rightarrow Y$. On appelle prolongement de f à X toute application $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ telle que $\forall x \in A, \tilde{f}(x) = f(x)$.

1 Prolongement continu

1.1 Prolongement en un point

Remarque 2. Si U ouvert connexe de $\mathbb{R}^n, a \in U, f : U \setminus \{a\}$ continue, la question du prolongement continu de f à U revient à celle de l'existence de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Exemple 3. La fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge continûment à \mathbb{R} en posant $f(0) = 1$.

Exemple 4. La fonction $f : (\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ se prolonge continûment à \mathbb{R}^2 en posant $f(0, 0) = 0$.

1.2 Prolongement depuis une partie fermée

Théorème 5 (Tietze). Soit (X, d) un espace métrique, soit F partie fermée de X , soit $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ prolongement continu de f à X .

Application 6. (X, d) est compact, si et seulement si, toute application continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée.

1.3 Prolongement depuis une partie dense

Théorème 7. Soient E, F deux espaces métriques, F étant complet. Soit A partie dense de E , soit $f : A \rightarrow F$ uniformément continue. Alors il existe un unique prolongement continu \tilde{f} de f à E , et de plus \tilde{f} est uniformément continue.

Application 8. L'intégrale de Riemann s'étend par des fonctions en escalier aux fonctions réglées.

Application 9 (Transformée de Fourier sur L^2). $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier-Plancherel, définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ par $\mathcal{P}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$ se prolonge en un isomorphisme isométrique \mathcal{P} de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

1.4 Prolongement depuis un sous-espace vectoriel

Théorème 10 (Hahn-Banach). Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, soit p une semi-norme sur E , Soient G sous-espace de E , soit $g \in G'$ telle que $\forall x \in G, g(x) \leq p(x)$. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\forall x \in E, f(x) \leq p(x)$.

Corollaire 11. Pour tout $g \in G'$, il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tq $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

Application 12. Soit E evn, soit F sev de E . F est dense dans E , ssi, toute forme linéaire continue nulle sur F est nulle sur E .

2 Aspects différentiels

2.1 Prolongement C^k en un point

Théorème 13. Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable (resp. C^k, C^∞) sur $]a, b[$ telle que f' (resp. $f^{(i)}, 1 \leq i \leq k$) admet une limite en a . Alors f a un prolongement par continuité en a et celui-ci est dérivable en a (resp. C^k, C^∞).

Exemple 14. $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ admet un prolongement C^∞ sur \mathbb{R} en posant $f(0) = 0$.

Contre-exemple 15. La fonction $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \sin(1/x)$ est C^∞ sur \mathbb{R}^* et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$, mais ce prolongement n'est pas dérivable en 0 .

2.2 Équations différentielles

Théorème 16 (Cauchy-Lipschitz). Soient I intervalle ouvert de \mathbb{R}, U ouvert de $\mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}(I \times U, \mathbb{R}^n), t_0 \in I, u_0 \in U$. On suppose qu'il existe V voisinage de (t_0, u_0) dans $I \times U$ et $k > 0$ tel que $\forall (t, x), (t, y) \in V, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $u \in \mathcal{C}^1(]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, U)$ solution du problème de Cauchy $\begin{cases} u' &= f(t, u) \\ u(t_0) &= u_0 \end{cases}$. De plus, si v est une autre solution, elle coïncide avec u sur un intervalle ouvert non vide inclus dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. Enfin, si f est de classe C^p , alors u est de classe C^{p+1} .

Lemme 17. Si $u_1 \in \mathcal{C}^1(J_1, U), u_2 \in \mathcal{C}^1(J_2, U)$ solutions de $u' = f(t, u)$ sur des intervalles respectifs J_1, J_2 , et s'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $\forall t \in J_1 \cap J_2, u_1(t) = u_2(t)$.

Corollaire 18. Il existe un plus grand intervalle J , nécessairement ouvert, sur lequel le problème de Cauchy admet une solution, et celle-ci ne peut être prolongée à \bar{J} .

Définition 19. On l'appelle solution maximale. Si $J = I$, la solution est dite globale.

Exemple 20. Le problème de Cauchy $y' = y^2, y(0) = 1$ admet pour solution maximale $y : t \mapsto \frac{1}{1-t}$, définie sur $] -\infty, 1[$.

Théorème 21 (des bouts). Soit $u \in \mathcal{C}^1(J, U)$ solution maximale d'un problème de Cauchy. Soient $b = \sup I, \beta = \sup J \leq b$. Si $\beta < b$, alors pour tout $K \subset U$ compact, il existe $\alpha < \beta$, pour tout $t \in J$ avec $t \geq \alpha, u(t) \in U \setminus K$.

Corollaire 22. Si f est bornée sur $I \times U$, alors toute solution à un problème de Cauchy est globale.

Exemple 23. Si $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, le problème $u' = \frac{g(u)^2}{1+g(u)^2}, u(0) = x_0$ admet une solution définie sur \mathbb{R} pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.3 Prolongement périodique et solutions d'EDP

Remarque 24. Soit $T > 0$. Toute fonction u continue sur $[0, T]$ vérifiant $u(0) = u(T)$ peut être prolongée par T -périodicité à \mathbb{R} entier.

Application 25. Soit $u_0 \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R}), \mathcal{C}^1$ par morceaux avec $u(0) = u(2\pi)$. On considère le problème aux limites $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[$, $u(0, x) = u_0(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$, $u(t, 0) = u(t, 2\pi)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Il y a une unique solution continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$, \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$.

3 Aspects analytiques

3.1 Séries entières, rayon de convergence

Définition 26. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. On définit son rayon de convergence par $R = \sup\{r > 0, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.}\}$

Proposition 27 (Abel). Ainsi, si $|z| < R$, la série converge absolument, et si $|z| > R$, la série diverge grossièrement.

Théorème 28 (Abel).

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge.

On note f la somme de la série sur le disque unité. Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$, on pose $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Application 29. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$.

Théorème 30 (taubérien faible). Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ série entière de rayon de convergence 1, soit f sa somme. On suppose que $S := \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} f(z)$ existe, et que $a_n = o(\frac{1}{n})$.

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

3.2 Fonctions holomorphes

Théorème 31. Soient U ouvert connexe de \mathbb{C}, f analytique sur $U, a \in U$. On a $f = 0$ sur U ssi $f = 0$ sur un voisinage de a ssi $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.

Théorème 32.

Théorème 33. Si f non identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros est une partie discrète et fermée de U .

Définition 34. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Proposition 35. Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

Proposition 36. On a alors, pour tout $z, 0 < \Re(z) < 1 \Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Définition 37. Pour $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1$, on définit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Proposition 38. ζ est holomorphe, et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ avec un pôle simple en 1.

Développements

- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible.
- Prolongement méromorphe de la fonction ζ .

Références

- [1] S. Benzoni-Gavage, CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, Dunod.
- [2] H. Brézis, ANALYSE FONCTIONNELLE, Dunod.
- [3] P. Donato, CALCUL DIFFÉRENTIEL POUR LA LICENCE, Dunod.
- [4] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.
- [5] C. Zuily, H. Queffélec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod.