

206. Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Introduction : De nombreux problèmes d'analyse "pure" et d'analyse numérique peuvent se formuler comme des problèmes d'existence et de recherche de point fixe.

Définition 1. Soient E un ensemble, $f : E \rightarrow E$ une application. On appelle point fixe de f un élément $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

1 Points fixes et complétude

1.1 Théorème de point fixe de Picard

Théorème 2 (Picard). Soient (X, d) un espace métrique complet, $f : X \rightarrow X$ contractante (k -lipschitzienne avec $k < 1$). Alors f possède un unique point fixe a , qui est de plus limite de toute suite telle que $x_0 \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

Contre-exemple 3 (Nécessité des hypothèses). *Pas de point fixe dans les cas suivants.*

- Si X non complet : $X =]0, 1[$, $f(x) = x/2$.
- Si f non contractante : $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
- X non stable par f : $X = [0, 1]$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1.2 Applications

Théorème 4 (Cauchy-Lipschitz global). Soit I intervalle de \mathbb{R} .

Soient $t_0 \in I, x \in \mathbb{R}^n$. On considère le système différentiel $(S) \begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie $\forall K$ compact de $I, \exists k > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, z) - f(t, y)\| \leq k\|z - y\|$. Alors (S) possède une solution unique, qui est de plus définie sur I entier.

Application 5. Le problème de Cauchy du pendule $\theta'' = -\sin(\theta), \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = v$ possède une unique solution définie sur \mathbb{R} .

Théorème 6 (Fonctions implicites). Soient U voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ telle que $f(0, 0) = 0$ et $d_y f(0, 0)$ inversible. Alors il existe V, W voisinages respectifs de 0 dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p tels que $V \times W \subseteq U$ et $\varphi : V \times W$ tels que $\forall (x, y) \in V \times W, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.

Application 7 (Extrema liés). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n , soient $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, soit $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_{\Gamma}$ possède un extremum relatif en $a \in \Gamma$, et si les formes linéaires $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ forment une famille libre, alors

il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$.

Théorème 8 (Stampacchia). Soient H espace de Hilbert, a forme bilinéaire continue coercive, ℓ forme linéaire continue, K convexe fermé non vide. Alors il existe un unique $u \in K, \forall v \in K, a(u, v - u) \geq \ell(v - u)$.

Corollaire 9 (Lax-Milgram). Il existe un unique $u \in H, \forall v \in H, a(u, v) = \ell(v)$.

Application 10. Existence et unicité de solutions de problèmes elliptiques.

2 Points fixes et compacité

2.1 Points fixes d'applications linéaires

Théorème 11 (Kakutani). Si E de dimension finie, $v \in \mathcal{L}(E), K$ compact convexe de E stable par v , alors v a un point fixe dans K .

Proposition 12. Sous les mêmes hypothèses, si H sous-groupe compact de $GL(E)$ dont tous les éléments stabilisent K , alors tous les éléments de H ont un point fixe commun dans K .

Application 13. Si G sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, il existe $q \in Q^{++}(\mathbb{R}), G \subseteq O(q)$.

2.2 Théorèmes de Brouwer et Schauder

Théorème 14 (Brouwer). Soit B la boule unité fermée de \mathbb{R}^n . Toute application continue $f : B \rightarrow B$ possède un point fixe.

Application 15 (Perron-Frobenius). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si elle est à coefficients positifs, alors son rayon spectral est une valeur propre associée à un vecteur propre à coefficients positifs.

Théorème 16 (Schauder). Soit E espace normé, soit K convexe compact de E , soit $f : K \rightarrow K$. f possède au moins un point fixe.

Contre-exemple 17 (Nécessité des hypothèses). Il n'y a pas de point fixe lorsque :

- K non convexe : rotation d'angle non nul de S^2 .
- K non compact : translation de vecteur non nul de \mathbb{R}^2 .

Application 18 (Cauchy-Peano). Soient I intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide, U ouvert non vide de $\mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}(I \times U, \mathbb{R}^n), t_0 \in I, y_0 \in U$. Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ possède une solution locale.

3 Résolution d'équations $F(X) = 0$

3.1 Généralités

Remarque 19. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, soit $f : x \mapsto \lambda f(x) + x$. Les zéros de F sont les points fixes de f .

On suppose $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit a un point fixe de f .

Théorème 20.

- Si $|f'(a)| < 1$, il existe un voisinage fermé J de a stable par f tel que pour tout $u_0 \in J \setminus \{a\}$, la suite converge vers a et $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$. a est dit *attractif*.
- Si $f'(a) = 0$ et f de classe \mathcal{C}^2 , alors on a même $u_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}f''(a)(u_n - a)$. a est dit *super-attractif*.
- Si $f'(a) > 1$, il existe J voisinage fermé de a tel que pour tout $u_0 \in J \setminus \{a\}$, la suite sorte de J . a est dit *répulsif*.

Contre-exemple 21. Si $f(x) = 1 - x$, le point fixe $\frac{1}{2}$ n'est ni attractif, ni répulsif. Si $f(x) = \sin(x)$, on a $f'(0) = 1$ et 0 est attractif. Si $f(x) = \operatorname{sh}(x)$, on a $f'(0) = 1$ et 0 est répulsif.

Théorème 22. On suppose maintenant $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On a équivalence entre :

- Le rayon spectral de $df(a)$ est strictement inférieur à 1.
- Il existe V voisinage fermé de a stable par f et une norme N sur \mathbb{R}^n tel que f soit contractante pour la norme N .

Définition 23. a est alors dit attractif.

Remarque 24. Si $df(a) = 0$, on a toujours convergence quadratique.

3.2 Méthode de Newton

Théorème 25 (Cas réel). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. On se donne $x_0 \in I$, et on pose $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que f soit de classe \mathcal{C}^2 sur $] \alpha - \delta, \alpha + \delta [$ et si f' ne s'annule pas sur cet intervalle, alors pour tout $x_0 \in] \alpha - \delta, \alpha + \delta [$, la suite converge quadratiquement vers α .

Exemple 26. Si $\alpha > 0$, la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\alpha}{u_n})$ converge vers $\sqrt{\alpha}$.

Contre-exemple 27. La fonction $f(x) = \arctan(x)$ montre qu'il n'y a pas convergence globale en général.

Proposition 28 (Cas vectoriel). Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n , soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, telle qu'il existe $\alpha \in \Omega$ avec $f(\alpha) = 0$. On suppose que f vérifie $Jf(\alpha) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(\alpha, \delta)$, la suite définie par $x_{k+1} = x_k - Jf(x_k)^{-1}f(x_k)$ soit bien définie et converge vers α avec un ordre 2.

3.3 Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$. On cherche à résoudre le problème $Ax - b = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$.

Définition 29. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ que l'on écrit $A = M - N$ avec M inversible. On dit que la méthode itérative associée à cette décomposition est convergente si, pour tout $b \in \mathbb{C}^n$, pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite définie par $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ converge.

Lemme 30. Si la méthode converge, alors sa limite x est l'unique solution du système linéaire $Ax = b$.

Proposition 31. La méthode converge, si et seulement si, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Théorème 32. Si $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $M^* + N$ est hermitienne. Si elle est de plus définie positive, alors la méthode itérative converge.

Application 33. On note D la partie diagonale de A , E sa partie triangulaire inférieure, F sa partie triangulaire supérieure.

La méthode de Jacobi est associée à la décomposition $M = D, N = E + F$.

La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition $M = D - E, N = F$. Ainsi, si A est hermitienne définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge. Si de plus, $2D - A$ est définie positive, la méthode de Jacobi converge.

Exemple 34. La résolution de problèmes linéaires associés à la matrice du Laplacien $1D$, donnée par $A_n = n^2 \operatorname{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, peuvent se faire par Jacobi et Gauss-Seidel.

Développements

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global.
- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Références

- [1] G. Allaire, S.-M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses.

- [2] H. Brezis, ANALYSE FONCTIONNELLE, Dunod.
- [3] J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences.
- [4] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.
- [5] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.
- [6] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.