

## 205. Espaces complets. Exemples et applications.

**Introduction :** La notion de complétude désigne intuitivement un espace qui n'a pas de trou.

### 1 Notion de complétude

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

#### 1.1 Définitions

**Définition 1.** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  est dite de Cauchy si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$ .

**Proposition 2.** Toute suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy est bornée. Toute suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge.

**Définition 3.** Si toutes les suites de Cauchy de  $X$  convergent,  $X$  est dit complet.

**Proposition 4.** Tout espace complet est fermé.

**Exemple 5.** Pour tout  $n \geq 1, \mathbb{R}^n$  est complet pour la distance euclidienne.

**Contre-exemple 6.**  $]0, 1[$  et  $\mathbb{Q}$  ne sont pas complets pour la distance euclidienne.

On remarque que pourtant  $\mathbb{R}$  et  $]0, 1[$  sont homéomorphes : la complétude n'est pas une notion topologique.

#### 1.2 Critères de complétude

**Proposition 7.** Tout espace compact est complet.

**Proposition 8.** Toute partie fermée d'un espace complet est complète.

**Application 9.** Soient  $X, Y$  espaces métriques,  $X$  complet,  $f : X \rightarrow Y$ . S'il existe  $k > 0$  tel que  $\forall u, v \in X, d(f(u), f(v)) > kd(u, v)$ , alors  $f$  est fermée. [?]

**Théorème 10** (des fermés emboîtés). Un espace métrique  $(X, d)$  est complet, si et seulement si, toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide.

## 2 Applications de la complétude

### 2.1 Prolongement d'applications

**Théorème 11.** Soient  $X$  espace métrique,  $Y$  espace complet,  $D$  partie dense dans  $X$ ,  $f : D \rightarrow Y$  uniformément continue. Alors il existe une unique fonction continue  $g : X \rightarrow Y$  qui prolonge  $f$ , et celle-ci est uniformément continue.

**Application 12.** Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

**Théorème 13** (Complété). Il existe un espace métrique complet  $(\hat{X}, \delta)$  et une isométrie  $i : X \rightarrow \hat{X}$  telle que  $i(X)$  dense dans  $\hat{X}$ .  $\hat{X}$  est unique à isométrie bijective près.

**Exemple 14.**  $\mathbb{R}$  peut être construit comme le complété de  $\mathbb{Q}$ .

### 2.2 Théorème de point fixe de Picard

**Théorème 15.** Soit  $X$  espace complet,  $f : X \rightarrow X$  contractante, c'est-à-dire  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ . Alors  $f$  possède un unique point fixe  $a$ . De plus, si  $x_0 \in X$ , alors la suite définie par  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge vers  $a$ .

**Contre-exemple 16.** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  vérifie  $\forall x, y, |f(y) - f(x)| < |y - x|$  mais  $f$  n'a pas de point fixe.

**Application 17** (Cauchy-Lipschitz global). Soit  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient  $t_0 \in I, x \in \mathbb{R}^n$ . On considère le système différentiel  $(S) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$  où  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue et vérifie  $\forall K$  compact de  $I, \exists k > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, z) - f(t, y)\| \leq k\|z - y\|$ . Alors  $(S)$  possède une solution unique, qui est de plus définie sur  $I$  entier.

### 2.3 Théorème de Baire

**Définition 18.** On appelle espace de Baire un espace dans lequel toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense, ou de façon équivalente, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

**Théorème 19.** Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

**Application 20.** Un espace vectoriel à base dénombrable n'est jamais complet.

**Application 21.** L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

### 3 Complétude dans les espaces normés

#### 3.1 Espaces de Banach

**Définition 22.** Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

**Théorème 23.** Soit  $E$  un evn. Alors  $E$  est un espace de Banach, si et seulement si, toute série d'éléments de  $E$  normalement convergente est convergente.

**Exemple 24.** Si  $K$  espace métrique compact,  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  est un espace de Banach.

**Application 25.** Soit  $E$  algèbre de Banach dont la norme est sous-multiplicative.

Alors, pour tout  $u$  tel que  $\|u\| < 1$ ,  $1 - u$  est inversible d'inverse  $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ .

De plus,  $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$  est bien définie.

**Théorème 26** (Riesz-Fischer). Pour tout  $p \in [1, \infty]$ ,  $L^p$  et  $\ell^p$  sont des espaces de Banach.

**Application 27.** Définition de la transformée de Fourier dans  $L^2$ .

**Théorème 28** (Banach-Steinhaus). Soient  $E, F$  deux espaces de Banach, soit  $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E, F)^I$  famille telle que  $\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$ . Alors  $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$ .

**Application 29.** Soit  $p \in [1, \infty]$ , soit  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{R})$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$  converge. Alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R})$ .

**Théorème 30** (Application ouverte). Soient  $E, F$  espaces de Banach, soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  continue surjective. Alors  $f$  est ouverte.

**Application 31.** Si  $\dim(F) = +\infty$ , il n'existe pas d'opérateur  $T : E \rightarrow F$  compact surjectif.

**Théorème 32** (Graphe fermé). Soient  $E, F$  de Banach, soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si son graphe est fermé dans  $E \times F$ , alors  $T$  est continu.

**Application 33.** La transformée de Fourier n'est pas surjective de  $L^1$  dans  $L^1$ .

#### 3.2 Espaces de Hilbert

**Définition 34.** Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle espace de Hilbert un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire le rendant complet.

**Exemple 35.**  $\mathbb{R}^n, \ell^2(\mathbb{C}), L^2(\mathbb{R}^d)$  sont des espaces de Hilbert.

**Théorème 36** (Projection). Soit  $H$  un Hilbert, soit  $C$  convexe fermé non vide de  $H$ . Alors, pour  $x \in H$ , il existe un unique  $y \in C$  tel que  $\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ .  $y$  est caractérisé par  $\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ .

**Application 37.** Définition de l'espérance conditionnelle dans  $L^2$ .

**Proposition 38.** Soit  $F$  sous-espace de  $H$ . On a  $H = \overline{F} \oplus F^\perp$ . En particulier,  $H = \overline{F} \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$ .

**Définition 39.** On appelle dual topologique de  $H$ , et on note  $H'$ , l'ensemble des formes linéaires continues sur  $H$ .

**Théorème 40** (représentation de Riesz). Soit  $\varphi \in H'$ . Alors il existe un unique  $a \in H$  tel que, pour tout  $x \in H, \langle \varphi, x \rangle = \langle f, x \rangle$ , et  $\|\varphi\| = \|f\|$ .

**Application 41.** Existence et unicité de solutions faibles de problèmes elliptiques.

**Définition 42.** On appelle base hilbertienne de  $H$  une famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H$  orthonormale telle que  $H = \text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ .

**Proposition 43.** Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne et est isométriquement isomorphe à  $\ell^2$ .

**Exemple 44.** En posant  $e_n(t) = e^{int}$ ,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme une base hilbertienne de  $L^2([-\pi, \pi])$ .

**Proposition 45** (Parseval). Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne de  $H$ , alors pour tout  $x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ .

**Définition 46.** Soit  $I = [-1, 1]$ . On appelle ensemble des signaux à bande limitée dans  $I$  l'ensemble  $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$ .

**Proposition 47.**  $BL^2(I)$  est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont  $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne.

**Théorème 48** (Shannon).  $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$ , la convergence ayant lieu uniformément et dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

## Développements

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global.
- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
- Théorème d'échantillonnage de Shannon.

## Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [3] D. Li, COURS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Ellipses.
- [4] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.