

205. Espaces complets. Exemples et applications.

Introduction : La notion de complétude désigne intuitivement un espace qui n'a pas de trou.

1 Notion de complétude

Soit (X, d) un espace métrique.

1.1 Définitions

Définition 1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$.

Proposition 2. Toute suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy est bornée. Toute suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge.

Définition 3. Si toutes les suites de Cauchy de X convergent, X est dit complet.

Proposition 4. Tout espace complet est fermé.

Exemple 5. Pour tout $n \geq 1, \mathbb{R}^n$ est complet pour la distance euclidienne.

Contre-exemple 6. $]0, 1[$ et \mathbb{Q} ne sont pas complets pour la distance euclidienne.

On remarque que pourtant \mathbb{R} et $]0, 1[$ sont homéomorphes : la complétude n'est pas une notion topologique.

1.2 Critères de complétude

Proposition 7. Tout espace compact est complet.

Proposition 8. Toute partie fermée d'un espace complet est complète.

Application 9. Soient X, Y espaces métriques, X complet, $f : X \rightarrow Y$. S'il existe $k > 0$ tel que $\forall u, v \in X, d(f(u), f(v)) > kd(u, v)$, alors f est fermée. [?]

Théorème 10 (des fermés emboîtés). Un espace métrique (X, d) est complet, si et seulement si, toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide.

2 Applications de la complétude

2.1 Prolongement d'applications

Théorème 11. Soient X espace métrique, Y espace complet, D partie dense dans X , $f : D \rightarrow Y$ uniformément continue. Alors il existe une unique fonction continue $g : X \rightarrow Y$ qui prolonge f , et celle-ci est uniformément continue.

Application 12. Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

Théorème 13 (Complété). Il existe un espace métrique complet (\hat{X}, δ) et une isométrie $i : X \rightarrow \hat{X}$ telle que $i(X)$ dense dans \hat{X} . \hat{X} est unique à isométrie bijective près.

Exemple 14. \mathbb{R} peut être construit comme le complété de \mathbb{Q} .

2.2 Théorème de point fixe de Picard

Théorème 15. Soit X espace complet, $f : X \rightarrow X$ contractante, c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $k < 1$. Alors f possède un unique point fixe a . De plus, si $x_0 \in X$, alors la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a .

Contre-exemple 16. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ vérifie $\forall x, y, |f(y) - f(x)| < |y - x|$ mais f n'a pas de point fixe.

Application 17 (Cauchy-Lipschitz global). Soit I intervalle de \mathbb{R} . Soient $t_0 \in I, x \in \mathbb{R}^n$. On considère le système différentiel $(S) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$ où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie $\forall K$ compact de $I, \exists k > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, z) - f(t, y)\| \leq k\|z - y\|$. Alors (S) possède une solution unique, qui est de plus définie sur I entier.

2.3 Théorème de Baire

Définition 18. On appelle espace de Baire un espace dans lequel toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense, ou de façon équivalente, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Théorème 19. Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

Application 20. Un espace vectoriel à base dénombrable n'est jamais complet.

Application 21. L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

3 Complétude dans les espaces normés

3.1 Espaces de Banach

Définition 22. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Théorème 23. Soit E un evn. Alors E est un espace de Banach, si et seulement si, toute série d'éléments de E normalement convergente est convergente.

Exemple 24. Si K espace métrique compact, $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Application 25. Soit E algèbre de Banach dont la norme est sous-multiplicative.

Alors, pour tout u tel que $\|u\| < 1$, $1 - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$.

De plus, $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ est bien définie.

Théorème 26 (Riesz-Fischer). Pour tout $p \in [1, \infty]$, L^p et ℓ^p sont des espaces de Banach.

Application 27. Définition de la transformée de Fourier dans L^2 .

Théorème 28 (Banach-Steinhaus). Soient E, F deux espaces de Banach, soit $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E, F)^I$ famille telle que $\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$. Alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Application 29. Soit $p \in [1, \infty]$, soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{R})$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge. Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{R})$.

Théorème 30 (Application ouverte). Soient E, F espaces de Banach, soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ continue surjective. Alors f est ouverte.

Application 31. Si $\dim(F) = +\infty$, il n'existe pas d'opérateur $T : E \rightarrow F$ compact surjectif.

Théorème 32 (Graphe fermé). Soient E, F de Banach, soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si son graphe est fermé dans $E \times F$, alors T est continu.

Application 33. La transformée de Fourier n'est pas surjective de L^1 dans L^1 .

3.2 Espaces de Hilbert

Définition 34. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle espace de Hilbert un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire le rendant complet.

Exemple 35. $\mathbb{R}^n, \ell^2(\mathbb{C}), L^2(\mathbb{R}^d)$ sont des espaces de Hilbert.

Théorème 36 (Projection). Soit H un Hilbert, soit C convexe fermé non vide de H . Alors, pour $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$. y est caractérisé par $\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

Application 37. Définition de l'espérance conditionnelle dans L^2 .

Proposition 38. Soit F sous-espace de H . On a $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier, $H = \overline{F} \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

Définition 39. On appelle dual topologique de H , et on note H' , l'ensemble des formes linéaires continues sur H .

Théorème 40 (représentation de Riesz). Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $a \in H$ tel que, pour tout $x \in H, \langle \varphi, x \rangle = \langle f, x \rangle$, et $\|\varphi\| = \|f\|$.

Application 41. Existence et unicité de solutions faibles de problèmes elliptiques.

Définition 42. On appelle base hilbertienne de H une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H orthonormale telle que $H = \text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$.

Proposition 43. Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne et est isométriquement isomorphe à ℓ^2 .

Exemple 44. En posant $e_n(t) = e^{int}$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi])$.

Proposition 45 (Parseval). Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base hilbertienne de H , alors pour tout $x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Définition 46. Soit $I = [-1, 1]$. On appelle ensemble des signaux à bande limitée dans I l'ensemble $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$.

Proposition 47. $BL^2(I)$ est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne.

Théorème 48 (Shannon). $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$, la convergence ayant lieu uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Développements

- Théorème de Cauchy-Lipschitz global.
- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
- Théorème d'échantillonnage de Shannon.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [3] D. Li, COURS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Ellipses.
- [4] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.