

204. Connexité. Exemples et applications.

Introduction : la connexité par arcs est une généralisation de la convexité, plus facile à se représenter : espaces en un seul morceau. La connexité est une notion plus subtile.

1 Connexité, connexité par arcs

Soit (X, \mathcal{T}) espace topologique.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. X est connexe s'il n'est pas union de deux ouverts non vides disjoints. $A \subseteq X$ est connexe si elle n'est pas union de deux ouverts (pour la topologie induite) non vides disjoints.

Exemple 2. \mathbb{Q}, \mathbb{R}^* non connexes dans \mathbb{R} .

Proposition 3 (Caractérisations de la connexité). Il y a équivalence entre :

- (i). X connexe.
- (ii). Les seules parties ouvertes et fermées de X sont \emptyset et X .
- (iii). Les seules applications continues de X dans $\{0, 1\}$ sont les constantes.

Proposition 4. L'image d'une partie connexe par une application continue est connexe. En particulier, la connexité est une propriété topologique (stable par homéomorphisme).

Application 5. $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 6. Une union de connexes telle que l'un intersecte tous les autres est connexe. Un produit fini de connexes est connexe. Une intersection de connexes n'est pas forcément connexe. L'adhérence d'une partie connexe est connexe.

1.2 Composantes connexes

Proposition 7. La relation \mathcal{R} , définie sur X par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists C$ partie connexe de X , $x, y \in C$, est une relation d'équivalence.

Définition 8. Les classes d'équivalence sont appelées composantes connexes.

Proposition 9. Pour $x \in X$, la composante connexe de x est l'union de tous les connexes contenant x .

Proposition 10. Les composantes connexes forment une partition de X . X connexe s'il n'a qu'une composante connexe. Les composantes connexes sont toujours fermées, et ouvertes si elles sont en nombre fini.

Exemple 11. \mathbb{R}^* a deux composantes connexes.

1.3 Connexes de \mathbb{R}

Théorème 12. Les connexes (et les convexes) de \mathbb{R} sont les intervalles.

Théorème 13 (des valeurs intermédiaires). Soit $[a, b]$ segment de \mathbb{R} , soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. On suppose $f(a) < f(b)$, soit $\gamma \in [f(a), f(b)]$. Alors il existe $c \in [a, b]$, $f(c) = \gamma$.

Application 14. Toute application continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ admet un point fixe.

Théorème 15 (Darboux). Soit I intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

1.4 Connexité par arcs et lignes brisées

Définition 16. $A \subseteq X$ est connexe par arcs si pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ continu tel que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Théorème 17. Une partie connexe par arcs est connexe.

Exemple 18. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Contre-exemple 19. Soit $X = \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_+) \right) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}_-) \right)$.

X est une partie connexe mais non connexe par arcs de \mathbb{R}^2 .

Proposition 20. Les propriétés de stabilité (union, produit, image par une fonction continue) restent vraies pour la connexité par arcs.

Application 21. \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.

Théorème 22. Sur un ouvert d'un \mathbb{R} -espace normé, les deux notions coïncident.

Définition 23. Si $a, b \in X$ On appelle ligne brisée joignant a et b tout ensemble de la forme $\bigcup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1}]$ où pour tout $i, [x_i, x_{i+1}] \subset X$ et $x_0 = a, x_n = b$. On dit que A est connexe par lignes brisées si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une ligne brisée de A joignant a et b .

Théorème 24. Soit E un \mathbb{R} -espace normé, soit Ω ouvert de E . Ω connexe ssi elle est connexe par lignes brisées.

2 Applications à l'analyse

2.1 Calcul différentiel

Proposition 25. Soit U ouvert connexe de \mathbb{R}^n , soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si pour tout $x \in U$, $df(x) = 0$, alors f est constante.

Définition 26. Soient E, F evn. On dit que $f : E \rightarrow F$ est propre si $\forall K$ compact de F , $f^{-1}(K)$ compact de E .

Proposition 27. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est propre ssi $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Théorème 28 (Hadamard-Lévy). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. C'est un difféomorphisme ssi elle est propre et sa différentielle est partout inversible.

Exemple 29. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - \arctan(y), y - \arctan(x)/2)$ est un difféomorphisme global.

2.2 Analyse complexe

Soit U ouvert connexe de \mathbb{C} , soit f analytique sur U .

Théorème 30 (Prolongement analytique). Soit $a \in U$. On a équivalence entre :

- (i). f nulle sur U .
- (ii). f nulle sur un voisinage de a .
- (iii). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

Définition 31. Une partie A de U est dite discrète si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $A \cap D(a, r) = \{a\}$.

Théorème 32 (Zéros isolés). Si f non identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros est une partie discrète et fermée de U .

Corollaire 33. L'anneau des fonctions analytiques sur U est intègre.

Définition 34. On appelle chemin une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . Il est dit fermé si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Définition 35. Si γ chemin fermé, pour tout $z \notin \gamma([0, 1])$, on définit son indice par rapport à γ , $\text{Ind}(\gamma, z) = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$.

Proposition 36. $z \mapsto \text{Ind}(\gamma, z)$ est à valeurs dans \mathbb{Z} , constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$ et nulle sur la composante connexe non bornée.

Exemple 37. Si $\gamma : t \mapsto e^{2i\pi t}$, on a $\text{Ind}(\gamma, z) = 1$ si $|z| < 1$ et 0 sinon.

Théorème 38 (Cauchy). Soient U ouvert convexe de \mathbb{C} , γ chemin fermé dans U , $z \in U \setminus \gamma([0, 1])$, f holomorphe sur U . Alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{Ind}(\gamma, z)f(z)$.

Théorème 39 (Liouville). Toute fonction holomorphe bornée sur \mathbb{C} est constante.

Application 40 (D'Alembert-Gauss). Tout polynôme à coefficients dans \mathbb{C} a une racine dans \mathbb{C} .

3 Applications en algèbre

Définition 41. On appelle groupe topologique un groupe G muni d'une topologie séparée rendant les applications $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ continue.

Proposition 42. Si G groupe topologique connexe, le seul sous-groupe de G ouvert est lui-même.

Application 43. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Proposition 44. Tout sous-groupe distingué discret d'un groupe topologique connexe est contenu dans le centre.

Exemple 45. Les sous-groupes distingués discrets de $GL_n(\mathbb{C})$ sont abéliens.

Proposition 46. Si G groupe topologique, on note G^0 la composante connexe de e_G . C'est un sous-groupe distingué de G .

Application 47. Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Développements

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

Références

- [1] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [2] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.
- [3] P. Tauvel, ANALYSE COMPLEXE, Dunod.