

203. Utilisation de la notion de compacité.

Introduction : La compacité possède au moins trois grandes catégories d'applications : faire converger des suites, prouver l'existence d'extrema, et passer de propriétés locales à des propriétés globales. On illustrera ces trois aspects dans cette leçon.

1 Rappels sur la compacité

Définition 1. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique séparé. On dit qu'il est compact si tout recouvrement de X par des ouverts possède un sous-recouvrement fini. Une partie de X est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.

On se placera dans toute la suite sur un espace métrique (X, d) .

1.1 Compacité et suites

Théorème 2 (Bolzano-Weierstrass). X est compact, si et seulement si, toute suite de $X^{\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence.

Proposition 3. Toute partie fermée d'un espace compact est compacte. Tout compact est fermé et borné.

Exemple 4. Les compacts de \mathbb{R} sont les parties fermées bornées.

Corollaire 5. Si X compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ possède une seule valeur d'adhérence, alors $(x_n)_n$ converge.

Théorème 6. X est compact si et seulement si il est précompact et complet.

Théorème 7 (Tychonov). Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille de parties compactes, alors $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est compact pour la topologie produit.

1.2 Continuité et compacité

Proposition 8. Soient E, F deux espaces métriques, $f \in \mathcal{C}(E, F)$, K compact de E . Alors $f(K)$ compact de F .

Application 9. Si K compact, F métrique, $f \in \mathcal{C}(K, F)$ bijection continue, alors f homéomorphisme.

Corollaire 10. Si $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Application 11 (Rolle). Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

Application 12. Si K métrique compact, F espace métrique, on définit une distance sur $\mathcal{C}(K, F)$ par $d(f, g) = \max_{x \in K} d(f(x), g(x))$.

Définition 13. On l'appelle distance de la convergence uniforme.

Théorème 14 (Heine). Si $f \in \mathcal{C}(K, F)$ où K, F espaces métriques, K compact, alors f est uniformément continue.

Application 15. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Pour $p \in [0, 1]$, soient $X_1(p), \dots, X_n(p)$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $S_n(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p)$. On pose enfin pour tout $p \in [0, 1]$,

$B_n(p) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) \right]$. $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f .

Définition 16. Soient E, F espaces métriques, soit $f \in \mathcal{C}(E, F)$. f est dite propre si pour tout K compact de F , $f^{-1}(K)$ compact de E .

Exemple 17. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ est propre.

Théorème 18 (Hadamard-Lévy). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. f est un difféomorphisme, si et seulement si, f est propre et sa différentielle est partout inversible.

1.3 Compacité dans les espaces vectoriels normés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 19. On munit \mathbb{R}^n de la norme uniforme $\| \cdot \|_{\infty}$. Alors la sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{\infty} = 1\}$ est compacte.

Théorème 20. Sur \mathbb{R}^n , toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 21. Il existe une topologie normée canonique sur les espaces de dimension finie, et les compacts sont alors les fermés bornés.

Exemple 22. $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 23 (Riesz). Un evn E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.

2 Compacité et espaces de fonctions

Théorème 24 (Dini).

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ suite croissante. Alors, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, la convergence est uniforme.
2. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ suite de fonctions croissantes qui converge simplement, alors la convergence est uniforme.

Exemple 25. Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : x \mapsto \exp(-x)$ sur \mathbb{R}_+ .

Application 26 (Glivenko-Cantelli). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid, on note F leur fonction de répartition commune. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k \leq t}. \text{ Alors } \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ presque sûrement.}$$

Théorème 27 (Ascoli). Soient K compact, F métrique, $H \subseteq \mathcal{C}(K, F)$. On suppose que pour tout $x \in K$, $H(x) = \{f(x), x \in H\}$ est relativement compacte, et que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in K, \exists \delta > 0, \forall f \in H, \forall y \in K, d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Alors \overline{H} est relativement compacte.

Application 28. Soit $K \in \mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R})$, soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, soit $T : E \rightarrow E$ défini par $T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$. Alors $T(\mathcal{B}_E(0, 1))$ est relativement compacte.

Théorème 29 (Stone-Weierstrass). On munit $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_\infty$. Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ qui contient les constantes et vérifie $\forall x \neq y \in K, \exists f \in \mathcal{A}, f(x) \neq f(y)$. Alors \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Application 30. Les fonctions lipschitziennes sont denses dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

3 Résolution d'équations

3.1 Théorèmes de point fixe

Théorème 31. Soit $f : K \rightarrow K$ vérifiant $\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f admet un point fixe, et la suite définie par $x_0 \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ce point fixe.

Contre-exemple 32. Le résultat est faux si K non compact : prendre $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 33. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , soit K compact de E , soit H un sous-groupe compact de $GL(E)$ tel que pour tout $u \in H, u(K) \subseteq K$. Alors les éléments de H ont un point fixe commun dans K .

Application 34. Il existe une forme quadratique définie positive q telle que $H \subseteq O(q)$.

Théorème 35 (Brouwer). Soit C partie convexe compacte d'un espace vectoriel E de dimension finie. Toute application continue $f : C \rightarrow C$ admet au moins un point fixe.

Application 36 (Perron-Frobenius). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si elle est à coefficients positifs, alors son rayon spectral est une valeur propre associée à un vecteur propre à coefficients positifs.

Théorème 37 (Schauder). Soit E espace vectoriel de dimension infinie. Le résultat précédent reste vrai.

Application 38 (Cauchy-Peano). Soit I intervalle non vide et non réduit à un point de \mathbb{R} , soit U ouvert non vide de \mathbb{R}^n , soit $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Alors, pour $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe g de classe C^1 sur un voisinage de (t_0, x_0) vérifiant $g'(t) = f(t, g(t))$ et $g(t_0) = x_0$.

3.2 Problèmes de minimisation

Théorème 39. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Alors f possède un minimum global sur \mathbb{R}^n .

Exemple 40. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$. f possède un (unique) minimum sur \mathbb{R}^n .

Application 41. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, soit F sous-espace de E de dimension finie. Alors, pour tout $x \in E$, il existe $\bar{x} \in F$ tel que $\|x - \bar{x}\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Théorème 42 (John-Loewner). Soit K compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n . Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K .

Remarque 43. Ce résultat permet de retrouver la caractérisation des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Développements

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Références

- [1] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [2] D. Li, COURS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Ellipses.
- [3] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.
- [4] A. Pommellet, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - COURS D'ANALYSE, Ellipses.
- [5] F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, Cassini.