

## 202. Exemples de parties denses et applications.

**Introduction** : L'intérêt de la densité réside principalement dans la possibilité d'étendre des propriétés prouvées sur des parties relativement petites, à l'instar des bases en algèbre linéaire.

**Définition 1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, soit  $A$  partie de  $X$ .  $A$  est dense dans  $X$  si  $\overline{A} = X$ .  $X$  est dit séparable s'il possède une partie dénombrable dense.

**Proposition 2.**  $A$  dense dans  $X$  ssi tout élément de  $X$  est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .

## 1 Densité en dimension finie

### 1.1 Dans $\mathbb{R}$

**Proposition 3.**  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ , et  $\mathbb{R}$  est séparable.

**Application 4.** Les morphismes de groupes de  $\mathbb{R}_+$  sont les  $\varphi_a : x \mapsto ax, a \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 5.** Tout sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  est soit dénombrable, soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Application 6.**  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ .

**Application 7.**  $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

### 1.2 Dans des espaces de matrices

Ici  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est muni de la topologie normée.

**Proposition 8.**  $GL_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Application 9.** Pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

**Application 10.**  $\det$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $d(\det)(A)H = \text{tr}({}^t\text{Com}(A)H)$ .

**Proposition 11.** L'ensemble des matrices diagonalisables et l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes sont denses dans l'ensemble des matrices trigonalisables.

**Application 12.** L'application qui à une matrice trigonalisable associe sa partie diagonalisable de la décomposition de Dunford n'est pas continue.

**Application 13** (Cayley-Hamilton). Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\chi_M(M) = 0$ .

## 2 Densité et complétude

### 2.1 Prolongement de fonctions

**Théorème 14.** Soient  $E, F$  deux espaces métriques,  $F$  étant complet. Soit  $A$  partie dense de  $E$ , soit  $f : A \rightarrow F$  uniformément continue. Alors il existe un unique prolongement continu  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $E$ , et de plus  $\tilde{f}$  est uniformément continue.

**Application 15.** L'intégrale de Riemann s'étend par des fonctions en escalier aux fonctions réglées.

**Application 16** (Transformée de Fourier sur  $L^2$ ).  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ . La transformée de Fourier-Plancherel, définie sur  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  par  $\mathcal{P}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx$  se prolonge en un isomorphisme isométrique  $\mathcal{P}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 2.2 Théorème de Baire

**Théorème 17** (Baire). Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. Toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.

**Application 18.** L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans  $\mathcal{C}[0, 1]$ .

**Application 19.** Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense.

### 2.3 Bases hilbertiennes

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert.

**Proposition 20.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $H$ . Il est dense dans  $H$ , si et seulement si,  $F^\perp = \{0\}$ .

**Définition 21.** On dit qu'une famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^\mathbb{N}$  est une base hilbertienne de  $H$  si elle est orthonormée et totale, c'est à dire que  $\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$  est dense dans  $H$ .

**Théorème 22.** Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

**Exemple 23.** Si on pose, pour  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $e_k(x) = e^{ikx}$ ,  $L^2([0, 2\pi])$  admet  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  pour base hilbertienne.

**Proposition 24.** Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne, on a alors :

$$\text{— Pour tout } x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

$$- \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

-  $\Delta : H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  isométrie surjective.

**Théorème 25** (Shannon). Soit  $I = [-1, 1]$ .

On considère  $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$ .

(i).  $BL^2(I)$  est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont  $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne.

(ii).  $\forall u \in BL^2(I), u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$ , la convergence ayant lieu uniformément et dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 3 Densité dans des espaces de fonctions

### 3.1 Densité dans $L^p$ , régularisation

On se place sur l'espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ .

**Proposition 26.** Pour  $p \in [1, \infty[$ ,  $L^1 \cap L^\infty$  dense dans  $L^p$ .

**Lemme 27.** L'espace des fonctions étagées intégrables est dense dans  $L^p$

**Proposition 28.** L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans  $L^p$  pour  $p \in [1, \infty[$ .

**Proposition 29.**  $L^p$  est séparable pour  $p \in [1, \infty[$ .

**Définition 30.** On dit qu'une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  est une approximation de l'unité si pour tout  $n, \varphi_n \geq 0$  presque partout,  $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = 1$  et  $\forall \varepsilon >$

$$0, \int_{|x| > \varepsilon} \varphi_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Exemple 31.** Si  $\varphi$  positive d'intégrale 1, on définit une approximation de l'unité en posant  $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$ .

**Exemple 32.** On pose  $\rho(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $g(x) = \rho(1 - x^2)$ .  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  à support dans  $[-1, 1]$ . En particulier, en prenant  $\varphi = g$  dans l'exemple précédent on obtient des approximations de l'unité  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact.

**Proposition 33.** Soit  $f \in L^p(\mathbb{R}), p < \infty$ , soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une approximation de l'unité. On a  $f * \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ .

**Théorème 34.**  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R})$  pour  $p < \infty$ .

### 3.2 Approximation de fonctions

**Théorème 35** (Stone-Weierstrass). Soit  $K$  compact, soit  $\mathcal{A}$  sous-algèbre de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  séparant les points et contenant les constantes. Alors  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ .

#### Approximation par des polynômes

**Théorème 36.** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ . On définit son *module de continuité* par  $w_f(h) = \sup_{|x-y| < h} |f(x) - f(y)|$ . Pour  $p \in [0, 1]$ , soient  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  iid suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

On pose, pour  $p \in [0, 1]$ ,  $S_n(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p)$ , et  $p \in [0, 1]$ ,  $B_n(p) = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{S_n(p)}{n} \right) \right]$ .

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers  $f$ , on a  $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} w_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$  et cette inégalité est optimale.

#### Approximation par des polynômes trigonométriques

On note  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et on identifie les fonctions  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  aux fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodiques.

**Définition 37.** On appelle ensemble des polynômes trigonométriques, et on note  $\mathcal{P}$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$  engendré par les  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $e_n : t \mapsto e^{int}$ .

**Théorème 38** (Weierstrass).  $\mathcal{P}$  est dense dans  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ .

**Définition 39.** Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on définit son  $n$ -ème coefficient de Fourier par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \text{ On appelle série de Fourier de } f \text{ la série } \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n.$$

**Proposition 40.**  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{T})$ .

**Théorème 41** (Parseval). Si  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , on a  $\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ .

**Théorème 42** (Dirichlet). Si  $f$  est continue, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement vers  $f$  dans  $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Application 43.** Soit  $u_0 \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux avec  $u_0(0) = u_0(2\pi)$ . On considère le problème aux limites  $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0$  pour  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[$ ,  $u(0, x) = u_0(x)$  pour  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $u(t, 0) = u(t, 2\pi)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$ . Il y a une unique solution continue sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[$ .

## Développements

- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
- Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.
- Théorème d'échantillonnage de Shannon.

## Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] F. Hirsch, G. Lacombe, ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Dunod.