

201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Introduction : De nombreuses propriétés de certaines fonctions peuvent s'obtenir par l'étude des espaces auxquelles elles appartiennent. Les solutions de certains problèmes d'analyse dépendent également de l'espace dans lequel on cherche des solutions.

1 Espaces de fonctions régulières sur un compact

Soit (X, d) espace métrique compact, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1.1 Généralités

Proposition 1. $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est une \mathbb{K} -algèbre.

Définition 2. On munit $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ de $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \max_{x \in X} |f(x)|$.

Proposition 3. Cette application est bien définie, et c'est une norme qui rend $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ complet.

1.2 Parties denses

Proposition 4. Les fonctions continues dérivable nulle part forment une partie dense de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Théorème 5 (Stone-Weierstrass). Toute sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ contenant les constantes et telle que $\forall x \in X, \exists f, g \in \mathcal{A}, f(x) \neq g(x)$, est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Exemple 6. Les fonctions lipschitziennes sont denses dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Théorème 7. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. On définit son *module de continuité* par $w_f(h) = \sup_{|x-y|<h} |f(x) - f(y)|$. Pour $p \in [0, 1]$, soient $X_1(p), \dots, X_n(p)$ iid suivant une loi de Bernoulli de paramètre p .

On pose, pour $p \in [0, 1]$, $S_n(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p)$, et $p \in [0, 1]$, $B_n(p) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) \right]$.

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f , on a $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ et cette inégalité est optimale.

1.3 Parties compactes

Théorème 8 (Ascoli). Soit $H \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$. On suppose que pour tout $x \in X, H(x) = \{f(x), x \in H\}$ est relativement compacte, et que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta > 0, \forall f \in H, \forall y \in X, d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Alors \overline{H} est relativement compacte.

Application 9 (Cauchy-Peano). Soient I intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide, U ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}(I \times U, \mathbb{R}^n), t_0 \in I, y_0 \in U$. Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ possède une solution locale.

2 Espaces de fonctions intégrables

2.1 Structure

Définition 10. Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}$, et $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0, |f| \leq M \mu\text{-p.p.}\}$. On notera $\mathcal{L}_p(\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}, \|f\|_p < \infty\}$.

Proposition 11 (Hölder). Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a alors, pour f, g mesurables, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Corollaire 12 (Minkowski). Pour f, g mesurables, on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Proposition 13. La relation \sim définie sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ par $f \sim g \Leftrightarrow f = g \mu\text{-p.p.}$ est une relation d'équivalence.

Définition 14. L'espace quotient est noté $L^p(\mu)$. Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage, on le note $\ell^p(\mathbb{N})$.

Proposition 15. $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé.

Proposition 16. Soient $p \leq q$.

- On a alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subseteq \ell^q(\mathbb{N})$.
- Si μ est une mesure finie, on a $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Proposition 17. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^p(\mu)$. Alors elle possède une sous-suite qui converge presque partout.

Contre-exemple 18. La convergence L^p n'implique pas la convergence $\mu\text{-p.p.}$ La suite de fonctions "stroboscope" $(f_{n,k})_{n,k}$ donne un contre-exemple, avec $f_{n,k}(x) = \mathbb{1}_{[2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)]}(x), n \in \mathbb{N}, k \in [0, 2^n - 1]$.

Théorème 19 (Riesz-Fischer). $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

Théorème 20 (Convergence dominée). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\mu)^{\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers f . S'il existe $g \in L^p(\mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ -p.p., alors $f \in L^p(\mu)$ et $\|f - f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Contre-exemple 21. La domination est nécessaire : $f_n = n^{1/p} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ converge presque partout vers 0 mais pas dans $L^p(\lambda)$.

Proposition 22. Dans un espace probabilisé, la convergence L^p implique la convergence en probabilité.

2.2 Convolution et régularisation

Définition 23. Soient $p \in [1, +\infty]$, soient $f \in L^1, g \in L^p$. On définit leur produit de convolution par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

Proposition 24. $f * g$ est bien définie presque partout. De plus, $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Corollaire 25. $(L^1(\mathbb{R}), +, *, \times)$ est une algèbre de Banach.

Proposition 26. Si $p, q \in [1, \infty]$ sont conjugués, alors $f * g$ est bien définie partout, uniformément continue, bornée, et $\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, si $1 < p < \infty$, $f * g$ a une limite nulle en l'infini, et c'est encore vrai si $p = 1$ et g est à support compact.

De façon générale, la convolution a un effet régularisant sur les fonctions.

Exemple 27. $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$ est la fonction tente sur $[0, 2]$.

Proposition 28. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R})$ bornée à dérivée bornée. Alors $f * g$ est dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Proposition 29. Soit $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, de dérivée intégrable. Alors $f * g$ dérivable, de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

Corollaire 30. Si $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Exemple 31. On pose $\rho(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \rho(1-x^2)$. g est C^{∞} à support dans $[-1, 1]$.

Définition 32. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si pour tout $n, \varphi_n \geq 0$ presque partout, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)dx = 1$ et $\forall \varepsilon >$

$$0, \int_{|x| > \varepsilon} \varphi_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exemple 33. Si φ positive d'intégrale 1, on définit une approximation de l'unité en posant $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$. En particulier, en prenant $\varphi = g$ on obtient des approximations de l'unité C^{∞} à support compact.

Proposition 34. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}), p < \infty$, soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. On a $f * \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème 35. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < \infty$.

2.3 Transformée de Fourier dans L^1 et L^2

Définition 36. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On définit sa transformée de Fourier par $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$.

Proposition 37. $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ et $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Exemple 38. Si $f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$, alors $\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi} \sin(\xi)$.

Si $f(x) = e^{-x^2}$, alors $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$.

Proposition 39. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On a $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Théorème 40. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$ pour presque tout x .

Théorème 41 (Plancherel). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.

Définition 42. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on définit $\mathcal{P}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}$.

Théorème 43. \mathcal{P} se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

3 Un cas particulier : espaces L^2

3.1 L'espace $L^2(\mathbb{T})$

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on munit $L^2(\mathbb{T})$ de la mesure $\frac{1}{2\pi}\lambda$ et du produit scalaire usuel. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n : x \mapsto e^{inx}$.

Proposition 44. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

Définition 45. On définit, pour $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_N = \text{vect}(e_n, |n| \leq N)$, ainsi que pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, les coefficients de Fourier $c_N(f) = \langle f, e_N \rangle$ et les sommes partielles de la série de Fourier, $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n$.

Proposition 46. $S_N(f)$ est le projeté orthogonal de f sur \mathcal{P}_N .

Théorème 47 (Féjer). On pose pour $N \in \mathbb{N}$, $\sigma_N(f) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f)e_n$. Alors $\sigma_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f$ dans $L^2(\mathbb{T})$.

Corollaire 48. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Application 49. Parseval s'écrit alors, pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

En l'appliquant à $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on tire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

3.2 Signaux à spectre borné

Définition 50. Soit $I = [-1, 1]$. On appelle ensemble des signaux à bande limitée dans I l'ensemble $BL^2(I) = \{u \in L^2(\mathbb{R}), \hat{u} = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I\}$.

Proposition 51. $BL^2(I)$ est un espace de Hilbert (muni du produit scalaire usuel) dont $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sinc}(2k\pi - x)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne.

Théorème 52 (Shannon). $\forall u \in BL^2(I)$, $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k\pi) \text{sinc}(2k\pi - x)$, la convergence ayant lieu uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Développements

- Densité des fonctions continues nulle part dérivables.
- Théorème d'échantillonnage de Shannon.

Références

[1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.

[2] J. Faraut, CALCUL INTÉGRAL, EDP Sciences.

[3] F. Hirsch, G. Lacombe, ÉLÉMENTS D'ANALYSE FONCTIONNELLE, Dunod.

[4] A. Pommellet, COURS D'ANALYSE, Ellipses.