

## 181. Barycentre dans un espace affine de dimension finie, convexité. Exemples et applications.

**Introduction** : La moyenne pondérée, le centre de gravité donnent une notion intuitive de barycentre. On la généralise ici et on en donne des applications.

Soit  $(\mathcal{E}, E)$  un espace affine de dimension  $n$ .

### 1 Notion de barycentre

#### 1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.** Soient  $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{E}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des scalaires. On définit la fonction vectorielle de Leibniz associée par  $\phi : \mathcal{E} \rightarrow E, M \mapsto \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ .

**Proposition 2.** On a :

- Si  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$ , alors  $\phi(M)$  est un vecteur indépendant de  $M$ .
- Sinon, il existe un unique  $G \in \mathcal{E}$  tel que  $\phi(G) = 0$ .

$$\text{Il vérifie, } \forall M \in \mathcal{E}, \sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i \right) \overrightarrow{MG}.$$

**Définition 3.**  $G$  est appelé barycentre du système de points pondérés  $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_r, \lambda_r)\}$ , et noté  $G = \text{Bar}\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_r, \lambda_r)\}$  ou  $G = \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i$ . Lorsque celui-ci est défini, on appelle isobarycentre de  $A_1, \dots, A_r$  le barycentre de  $\{(A_1, 1), \dots, (A_r, 1)\}$ .

**Remarque 4.** Le barycentre est invariant par multiplication des  $(\lambda_i)$  par un scalaire non nul. On peut donc supposer  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ .

**Théorème 5** (Associativité). Soit  $(I_1, \dots, I_k)$  une partition de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , telle que pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $\Lambda_j := \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0$ . Alors, si on note pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,

$$G_j = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)_{i \in I_j}\}, \text{ on a } G = \text{Bar}\{(G_j, \Lambda_j)_{1 \leq j \leq k}\}.$$

**Application 6.** Dans un plan affine euclidien, les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

**Proposition 7.** Le sous-espace affine engendré par une partie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des barycentres de points de  $\mathcal{F}$ .

**Exemple 8.** Deux points distincts engendrent une droite affine. Trois points non alignés engendrent un plan affine.

**Théorème 9.** Soient  $(\mathcal{F}, F)$  un autre espace affine,  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ .  $f$  affine ssi, pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  tels que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i \neq 0, \forall A_1, \dots, A_r \in \mathcal{E}, f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(A_i)$ .

#### 1.2 Coordonnées barycentriques

**Proposition 10.** Soit  $A_0, \dots, A_n$  un repère affine de  $\mathcal{E}$ . Alors tout point  $M \in \mathcal{E}$  s'écrit de manière unique sous la forme  $M = \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i$  avec  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

**Définition 11.** On dit que  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  est une famille de coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère  $(A_0, \dots, A_n)$ .

**Exemple 12.** Le centre de gravité d'un triangle d'un plan affine euclidien a pour coordonnées barycentriques  $(1/3, 1/3, 1/3)$ .

**Proposition 13.** Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien orienté, soit  $ABC$  triangle non plat. Si  $M \in \mathcal{P}$ , ses coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux aires algébriques  $(\mathcal{A}(BCM), \mathcal{A}(CAM), \mathcal{A}(ABM))$ . De plus, si toutes les coordonnées sont de même signe,  $M$  est dans l'intérieur (géométrique) du triangle  $ABC$ .

**Application 14** (Lemoine). Il existe un unique point dans l'intérieur géométrique du triangle  $ABC$  minimisant la somme des carrés de ses distances aux sommets  $A, B, C$ . Ses coordonnées barycentriques sont  $(BC^2, AC^2, AB^2)$ .

**Définition 15.** Un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  est dit homogène s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que dans  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, T]$ , on ait  $P(TX_1, \dots, TX_n) = T^k P(X_1, \dots, X_n)$ . L'ensemble  $\mathcal{E}$  des points dont les coordonnées barycentriques  $(x_1, \dots, x_n)$  vérifient  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  est alors bien défini. On dira que  $\mathcal{E}$  admet  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  pour équation barycentrique.

**Exemple 16.** L'ensemble des droites affines d'un plan affine  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des parties admettant une équation barycentrique de la forme  $aX + bY + cZ = 0$ , où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  distincts dans leur ensemble.

**Proposition 17.** Soit  $\mathcal{P}$  plan affine, soit  $ABC$  triangle de référence. Les 3 points de coordonnées barycentriques  $(x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq 3$  sont alignés ssi  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ .

**Théorème 18.** Considérons trois droites affines  $d_i, 1 \leq i \leq 3$ , dont les équations barycentriques sont  $a_i x + b_i y + c_i z = 0$ . Ces trois droites sont parallèles ou concou-

rantes, ssi  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ .

## 2 Convexité

### 2.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 19.** Une partie  $C$  de  $\mathcal{E}$  est dite convexe si  $\forall A, B \in \mathcal{E}, \forall t \in [0, 1], (1 - t)A + tB \in C$ .

**Exemple 20.**

- Les convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.
- Les boules ouvertes et fermées d'un espace normé sont convexes.
- Les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  sont convexes.

**Proposition 21.** Une intersection de convexes est convexe. L'image directe et l'image réciproque d'une partie convexe par une application affine sont convexes.

**Définition 22.** Soit  $C$  convexe de  $\mathcal{E}$ , soit  $M \in C$ . On dit que  $M$  est un point extrémal de  $C$  si pour tous  $X, Y \in C, M = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y \Rightarrow X = Y = M$ .

**Exemple 23.** Le cercle est l'ensemble des points extrémaux du disque fermé. Les points extrémaux d'un triangle sont ses trois sommets.

**Exemple 24.** Les points extrémaux de la boule unité d'un espace euclidien  $E$  sont les éléments de  $O(E)$ .

### 2.2 Enveloppe convexe

**Définition 25.** Soit  $A$  une partie convexe de  $\mathcal{E}$ . On définit son enveloppe convexe, notée  $\text{Conv}(A)$ , comme la plus petite partie convexe de  $\mathcal{E}$  contenant  $A$ .

**Proposition 26.**  $\text{Conv}(A)$  est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de  $A$ , i.e. des barycentres d'éléments de  $A$  à coefficients positifs.

**Corollaire 27** (Gauss-Lucas). Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Alors les racines de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ .

**Théorème 28** (Carathéodory). L'enveloppe convexe de  $A$  est l'ensemble des combinaisons convexes de  $n + 1$  points de  $A$ .

**Définition 29.** On appelle simplexe de  $\mathcal{E}$  l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points affinement indépendants de  $E$ .

### 2.3 Aspects topologiques

**Proposition 30.** Si  $A$  est compacte,  $\text{Conv}(A)$  l'est aussi.

**Application 31.** Si  $G$  est un sous-groupe compact de  $GL_n(\mathbb{R})$ , il existe  $q \in Q^{++}(\mathbb{R}), G \subseteq O(q)$ .

**Proposition 32.** Toute partie convexe est connexe (par arcs). L'adhérence d'une partie convexe est convexe.

**Proposition 33.** Tout convexe compact est l'enveloppe convexe de sa frontière.

**Théorème 34** (Krein-Millman). Tout convexe compact de  $\mathcal{E}$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

## 3 Applications

### 3.1 Théorèmes de Menelaüs et Ceva

Soit  $\mathcal{P}$  plan affine euclidien orienté muni d'un triangle de référence  $ABC$ .

**Théorème 35** (Menelaüs). Soient  $A', B', C'$  respectivement sur  $(BC), (AC), (AB)$ .  $A', B', C'$  sont alignés ssi  $\frac{CA'}{BA'} \frac{AB'}{CB'} \frac{BC'}{AC'} = 1$ .

**Théorème 36** (Ceva).  $(AA'), (BB'), (CC')$  sont concourantes ou parallèles ssi  $\frac{CA'}{BA'} \frac{AB'}{CB'} \frac{BC'}{AC'} = -1$ .

### 3.2 Points remarquables du triangle

**Proposition 37.** Soit  $ABC$  triangle non plat d'un plan affine euclidien orienté.

- Les trois médianes sont concourantes, leur point de concours a pour coordonnées barycentriques  $(1, 1, 1)$ .
- Les trois hauteurs sont concourantes, leur point de concours a pour coordonnées barycentriques  $(\tan(\hat{A}), \tan(\hat{B}), \tan(\hat{C}))$ .
- Les trois médiatrices sont concourantes, leur point de concours a pour coordonnées barycentriques  $(\sin(2\hat{A}), \sin(2\hat{B}), \sin(2\hat{C}))$ .
- Les trois bissectrices sont concourantes, leur point de concours a pour coordonnées barycentriques  $(BC, AC, AB)$ .

### 3.3 Éléments finis $\mathbb{P}_k$

**Définition 38.** Soit  $\Omega$  ouvert connexe polyédrique de  $\mathbb{R}^2$ . On appelle maillage triangulaire de  $\Omega$  une famille  $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$  de simplexes contenus dans  $\overline{\Omega}$ , recouvrant  $\overline{\Omega}$  tels que  $\forall i \neq j, K_i \cap K_j$  est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune entière.

Si  $K$  est un simplexe de sommets  $a_1, a_2, a_3$ , pour  $x \in K$ , on note  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ses coordonnées barycentriques. Ce sont des formes affines.

**Définition 39.** On définit alors le treillis d'ordre  $k$  par  $\Sigma_k = \{x \in K, \forall j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \lambda_j(x) \in \{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}\}$ .

**Proposition 40.** Tout polynôme de  $\mathbb{R}_k[X_1, X_2]$  est caractérisé de manière unique par ses valeurs aux points de  $\Sigma_k$ .

**Remarque 41.** On peut ainsi approximer les solutions d'une EDP en interpolant des valeurs connues aux sommets du maillage.

## Développements

- Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$ .
- Sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

## Références

- [1] G. Allaire, ANALYSE NUMÉRIQUE ET OPTIMISATION, École Polytechnique.
- [2] G. Auliac, J. Delcourt, R. Goblot, ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE, Ediscience.
- [3] F. Combes, ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE, Bréal.
- [4] J.-D. Eiden, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE CLASSIQUE, Calvage & Mounet.
- [5] A. Szpirglas et al., ALGÈBRE L3, Pearson.