

171. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

1 Généralités

1.1 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Définition 1. On appelle forme bilinéaire sur $E \times E$ une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ et $\varphi(\cdot, y)$ sont linéaires. φ est dite symétrique si pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Définition 2. On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme $q(x) = \varphi(x, x)$ où φ forme bilinéaire symétrique. φ est appelée forme bilinéaire associée à q , ou forme polaire de q . On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E .

Exemple 3. $q(x, y, z) = 2x^2 + xy - xz + 2yz$ définit une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 .
 $q(P) = \int_0^1 P(t)P'(t)dt$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 4 (Polarisation). Si $q \in Q(E)$, alors elle possède une unique forme bilinéaire symétrique φ , donnée par pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$.

Ainsi, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , on a

$\varphi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^t X M Y$ où X, Y sont les vecteurs des coordonnées de x, y dans la base \mathcal{B} et $M = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$.

Définition 5. M est appelée la matrice de φ (ou de q) dans la base \mathcal{B} .

Proposition 6. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et si M, M' sont les matrices de q respectivement dans $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, on a $M' = {}^t P M P$.

Définition 7. On appelle rang de q le rang de ses matrices associées. On appelle noyau de q le sous-espace $\ker(q) = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$ (où φ forme polaire de q). q est dite non dégénérée si $\ker(q) = \{0\}$.

Exemple 8. Dans l'exemple précédent, une matrice de q est $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
et q est de rang 3.

1.2 Formes quadratiques positives

Définition 9. Soit $q \in Q(E)$. Elle est dite définie si $\forall x \neq 0, q(x) \neq 0$. Elle est dite positive si $\forall x \in E, q(x) \geq 0$. On note $Q^+(E)$ (resp. $Q^{++}(E)$) l'ensemble des formes quadratiques positives (resp. définies positives) sur E .

Proposition 10. Si q est définie, alors elle est non dégénérée.

Contre-exemple 11. Sur \mathbb{R}^2 , $q(x, y) = x^2 - y^2$ est non dégénérée mais pas définie (car $q(x, x) = 0$ pour tout x).

Contre-exemple 12. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $q(A) = \text{tr}(A)^2$ est positive mais non définie.

Exemple 13. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$ définit une forme quadratique définie positive.

Proposition 14 (Schwarz). Soit $q \in Q^+(E)$, soit φ sa forme polaire. Alors $\forall x, y \in E, |\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$.

Corollaire 15 (Minkowski). Si $q \in Q^+(E)$, pour tous $x, y \in E$, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.

On suppose désormais E de dimension finie.

2 Orthogonalité et isotropie

2.1 Orthogonalité

Définition 16. Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire φ , soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A le sous-espace $A^\perp = \{x \in E, \forall y \in A, \varphi(x, y) = 0\}$.

Exemple 17. Ainsi $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \ker(q)$.

Proposition 18. Si E de dimension finie et F sev de E , on a $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap \ker(q))$ et $F^{\perp\perp} = F + \ker(q)$.

Définition 19. Une base (e_1, \dots, e_n) de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, \varphi(e_i, e_j) = 0$, et orthonormée si $\forall i, j, \varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Proposition 20. Une base est orthogonale (resp. orthonormée) pour q ssi la matrice de q dans cette base est diagonale (resp. la matrice identité).

Exemple 21. Dans \mathbb{R}^2 , la base canonique est orthogonale mais pas orthonormée pour $q(x, y) = x^2 - y^2$.

2.2 Groupe orthogonal

Définition 22. Soit $q \in Q(E)$, on définit son groupe orthogonal $O(q) = \{u \in GL(E), \forall x \in E, q(u(x)) = q(x)\}$.

Proposition 23. C'est un groupe pour la loi de composition.

Proposition 24. Si \mathcal{B} base de E dans laquelle S est la matrice de q et A celle de u , on a $u \in O(q) \Leftrightarrow {}^tASA = S$.

Théorème 25. Si E est de dimension finie, tout sous-groupe compact de $GL(E)$ est contenu dans le groupe orthogonal d'une forme quadratique définie positive.

2.3 Isotropie

Définition 26. Soit $q \in E$, soit $x \in E$. x est dit isotrope si $q(x) = 0$. On appelle cône isotrope et on note $I(q)$ l'ensemble des éléments isotropes de q .

Exemple 27. Si $E = \mathbb{R}^2, q(x, y) = x^2 - y^2$, on a $I(q) = \{(x, \pm x), x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 28. Un sev F de E est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

Proposition 29. On a $E = F \oplus F^\perp$ ssi F est non isotrope.

3 Réduction et classification

3.1 Réduction simultanée

Théorème 30. Si $q_1 \in Q^{++}(E)$ et $q_2 \in Q(E)$, il existe une base de E orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2 .

Application 31. Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit $\alpha \in [0, 1]$. Alors $\det((1 - \alpha)A + \alpha B) \geq \det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha$, avec inégalité stricte si $\alpha \in]0, 1[$ et $A \neq B$.

Théorème 32 (John-Loewner). Soit K compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n . Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K .

3.2 Loi d'inertie de Sylvester

Proposition 33. Si $q \in Q(E)$, il existe une base de E orthogonale pour Q .

Théorème 34 (Gauss). Pour tout $q \in Q(E)$, si $r = \text{rg}(q)$, il existe $\ell_1, \dots, \ell_r \in E^*$ linéairement indépendantes et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^*$ telles que $q = \sum_{i=1}^r a_i \ell_i^2$.

Cette décomposition s'obtient de façon effective, en "éliminant" des variables au fur et à mesure de la construction des ℓ_i et en utilisant les identités $xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$.

Exemple 35. Pour $E = \mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique donnée par $q(x, y, z) = 5xy + 6xz + 3yz$. On a, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, q(x, y, z) = \frac{1}{20}(5x + 5y + 9z)^2 - \frac{1}{20}(5x + 5y - 3z)^2 - \frac{18}{5}z^2$. On définit donc une base orthogonale en posant $f_1 = 5e_1 + 5e_2 + 9e_3, f_2 = 5e_1 + 5e_2 - 3e_3, f_3 = e_3$.

Théorème 36 (Sylvester). Soient $q \in Q(E), r = \text{rg}(q)$. Il existe $s \in \llbracket 0, r \rrbracket$ et une base de E dans laquelle la matrice de q est $\text{diag}(I_s, -I_{r-s}, 0_{n-r})$. De plus, s ne dépend que de q et pas de la base choisie.

Définition 37. $(s, r - s)$ est appelé signature de la forme quadratique q , et notée $\text{sgn}(q)$.

Proposition 38. q a pour signature (s, t) ssi sa décomposition de Gauss comporte r termes positifs et s termes négatifs.

Exemple 39. Dans l'exemple précédent, la signature est $(1, 2)$.

Définition 40. Deux formes quadratiques q_1, q_2 sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q_2 = q_1 \circ u$.

Corollaire 41. q_1, q_2 sont équivalentes ssi elles sont même signature.

4 Applications

4.1 Classification des coniques euclidiennes

Définition 42. Soient $q \in Q(\mathbb{R}^2)$ non nulle, $\ell \in (\mathbb{R}^2)^*, k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, q(x, y) + \varphi(x, y) = k\}$ est appelé une conique.

Théorème 43. Si q non dégénérée, alors \mathcal{C} admet une équation de la forme $aX^2 + bY^2 = h$. En particulier :

- Si $\text{sgn}(q) = (2, 0)$, \mathcal{C} est une ellipse, éventuellement dégénérée. Si $h > 0$, elle admet une équation de la forme $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$. Si $h = 0$, \mathcal{C} est réduite à un point, et elle est vide si $h < 0$.
- Si $\text{sgn}(q) = (1, 1)$ (ie $ab < 0$), \mathcal{C} est une hyperbole, éventuellement dégénérée. Si $h \neq 0$ et $a > 0, b < 0$, elle admet une équation de la forme $\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1$. Si $h = 0$, \mathcal{C} est constituée de deux droites.

Et quitte à changer les signes de q, φ, k , on peut toujours se ramener à ces deux cas.

Théorème 44. Si q dégénérée, elle admet une équation de la forme $a(X-\alpha)^2 - bY = h$. C'est une parabole, éventuellement dégénérée. Si $b \neq 0$, l'équation se met sous la forme $y' = ax^2$. Si $b = 0$, l'équation se réduit à $x'^2 = h/a$. Ainsi, si $h < 0$, \mathcal{C} est vide ; si $h = 0$, \mathcal{C} est la droite $x = 0$. Si $h > 0$, \mathcal{C} est constituée de deux droites parallèles.

4.2 Calcul différentiel

Proposition 45. Soient U ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, soit $a \in U$ tel que $df(a) = 0$. $d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique.

- Si elle est définie positive, alors f admet un minimum en a .
- Si ni $d^2f(a)$ ni $-d^2f(a)$ n'est positive, alors f n'admet pas d'extremum en a .

Théorème 46 (Morse). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 , soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose $df_0 = 0$ et d^2f_0 forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ entre deux voisinages U, V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in U, f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

Développements

- Ellipsoïde de John-Loewner.
- Lemme de Morse.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [3] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cépaduès.
- [4] A. Szpirglas et al., ALGÈBRE L3, Pearson.