

170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Soit K un corps de caractéristique différente de 2, soit E un K -espace vectoriel de dimension finie.

1 Généralités

1.1 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Définition 1. On appelle forme bilinéaire sur $E \times E$ une application $\varphi : E \times E \rightarrow K$ telle que pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ et $\varphi(\cdot, y)$ sont linéaires. φ est dite symétrique si pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Définition 2. On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \rightarrow K$ de la forme $q(x) = \varphi(x, x)$ où φ forme bilinéaire symétrique. φ est appelée forme bilinéaire associée à q , ou forme polaire de q . On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E .

Exemple 3. $q(x, y, z) = 2x^2 + xy - xz + 2yz$ définit une forme quadratique sur \mathbb{R}^3 .
 $q(P) = \int_0^1 P(t)P'(t)dt$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}_n[X]$.

Théorème 4 (Polarisation). Si $q \in Q(E)$, alors elle possède une unique forme bilinéaire symétrique associée φ , donnée par pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$.

1.2 Écriture matricielle

Ainsi, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , on a

$\varphi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^t X M Y$ où X, Y sont les vecteurs des coordonnées de x, y dans la base \mathcal{B} et $M = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$.

Définition 5. M est appelée la matrice de φ (ou de q) dans la base \mathcal{B} .

Proposition 6. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et si M, M' sont les matrices de q respectivement dans $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, on a $M' = {}^t P M P$.

Définition 7. M, M' sont alors dites congrues ou congruentes.

1.3 Noyau et rang

Définition 8. On appelle rang de q le rang de ses matrices associées. On appelle noyau de q le sous-espace $\ker(q) = \{x \in E, \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$ (où φ forme polaire de q). q est dite non dégénérée si $\ker(q) = \{0\}$.

Exemple 9. Dans l'exemple précédent, une matrice de q est $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et q est de rang 3.

Définition 10. q est dite définie si $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) \neq 0$.

Définition 11. Si $K = \mathbb{R}$, q est dite positive si $\forall x \in E, q(x) \geq 0$, et négative si $-q$ est positive.

2 Orthogonalité et isotropie

2.1 Orthogonalité

Définition 12. Soit $q \in Q(E)$ de forme polaire φ , soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A le sous-espace $A^\perp = \{x \in E, \forall y \in A, \varphi(x, y) = 0\}$.

Exemple 13. Ainsi $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \ker(q)$.

Proposition 14. Si E de dimension finie et F sev de E , on a $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap \ker(q))$ et $F^{\perp\perp} = F + \ker(q)$.

Définition 15. Une base (e_1, \dots, e_n) de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j, \varphi(e_i, e_j) = 0$, et orthonormée si $\forall i, j, \varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Proposition 16. Une base est orthogonale (resp. orthonormée) pour q ssi la matrice de q dans cette base est diagonale (resp. la matrice identité).

Exemple 17. Dans \mathbb{R}^2 , la base canonique est orthogonale mais pas orthonormée pour $q(x, y) = x^2 - y^2$.

Proposition 18. Si $q \in Q(E)$, il existe une base de E orthogonale pour Q .

Théorème 19 (Gauss). Pour tout $q \in Q(E)$, si $r = \text{rg}(q)$, il existe $\ell_1, \dots, \ell_r \in E^*$ linéairement indépendantes et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^*$ telles que $q = \sum_{i=1}^r a_i \ell_i^2$.

Cette décomposition s'obtient de façon effective, en "éliminant" des variables au fur et à mesure de la construction des ℓ_i et en utilisant l'identité $xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$.

Exemple 20. Pour $E = \mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique donnée par $q(x, y, z) = 5xy + 6xz + 3yz$. On a, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = \frac{1}{20}(5x + 5y + 9z)^2 - \frac{1}{20}(5x + 5y - 3z)^2 - \frac{18}{5}z^2$. On définit donc une base orthogonale en posant $f_1 = 5e_1 + 5e_2 + 9e_3$, $f_2 = 5e_1 + 5e_2 - 3e_3$, $f_3 = e_3$.

Théorème 21. Si $K = \mathbb{R}$, si $q_1 \in Q(E)$ définie positive et $q_2 \in Q(E)$, il existe une base de E orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2 .

Application 22. Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit $\alpha \in [0, 1]$. Alors $\det((1 - \alpha)A + \alpha B) \geq \det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha$, avec inégalité stricte si $\alpha \in]0, 1[$ et $A \neq B$.

Théorème 23 (John-Loewner). Soit K compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n . Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K .

2.2 Groupe orthogonal

Définition 24. Soit $q \in Q(E)$, on définit son groupe orthogonal $O(q) = \{u \in GL(E), \forall x \in E, q(u(x)) = q(x)\}$.

Proposition 25. C'est un groupe pour la loi de composition.

Proposition 26. Si \mathcal{B} base de E dans laquelle S est la matrice de q et A celle de u , on a $u \in O(q) \Leftrightarrow {}^tASA = S$.

Théorème 27. Si E est de dimension finie, tout sous-groupe compact de $GL(E)$ est contenu dans le groupe orthogonal d'une forme quadratique définie positive.

2.3 Isotropie

Définition 28. Soit $q \in E$, soit $x \in E$. x est dit isotrope si $q(x) = 0$. On appelle cône isotrope et on note $I(q)$ l'ensemble des éléments isotropes de q .

Exemple 29. Si $E = \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = x^2 - y^2$, on a $I(q) = \{(x, \pm x), x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 30. Un sev F de E est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

Proposition 31. On a $E = F \oplus F^\perp$ ssi F est non isotrope.

Définition 32. Un sev F de E est dit totalement isotrope si $F \subset F^\perp$. On appelle indice de q , et on note $\nu(q)$, la dimension maximale des sous-espaces de E totalement isotropes.

Proposition 33. On a toujours $\nu(q) \leq \frac{1}{2} \dim(E)$.

3 Classification des formes quadratiques

Définition 34. Deux formes quadratiques q_1, q_2 sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q_2 = q_1 \circ u$.

Proposition 35. C'est une relation d'équivalence. q_1, q_2 sont équivalentes ssi leurs matrices dans une base donnée sont congruentes.

Théorème 36. Si $K = \mathbb{C}$, il y a $n + 1$ classes, représentées par les $J_r, r \in \{0, n - 1\}$. Ainsi, deux matrices sont dans la même classe ssi elles ont même rang.

Corollaire 37. On a alors $\nu(q) = \left\lfloor \frac{\dim(E)}{2} \right\rfloor$.

Théorème 38 (Sylvester). Si $K = \mathbb{R}$, il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes, représentées par les matrices diagonales par blocs $\text{diag}(I_r, -I_s, 0_{n-r-s})$ avec $r + s \leq n$.

Définition 39. (r, s) est appelé signature de q .

Corollaire 40. On a alors $\nu(q) = \min(r, s)$.

Proposition 41. Ainsi deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont même signature. r, s sont respectivement le nombre de termes positifs et négatifs dans la décomposition de Gauss de q .

Application 42 (Morse). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . On suppose $df_0 = 0$ et d^2f_0 forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n - p)$. Alors il existe un C^1 -difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ entre deux voisinages U, V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in U, f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

Théorème 43. Si $K = \mathbb{F}_q$, soit α élément non carré dans \mathbb{F}_q . Il y a $2n + 1$ classes, représentées par les matrices diagonales par blocs $\text{diag}(I_r, 0_{n-r})$ et $\text{diag}(I_{r-1}, \alpha, 0_{n-r})$. Ainsi, deux matrices sont dans la même classe ssi elles ont même rang et même déterminant.

Application 44 (Réciprocité quadratique). Soient $p, q \geq 3$ premiers.

Alors $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$.

Développements

- Lemme de Morse.
- Loi de réciprocité quadratique.

Références

- [1] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [2] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cépaduès.
- [3] A. Szpirglas, ALGÈBRE L3, Pearson.