

161. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3.

Introduction : Les isométries, applications qui conservent les distances, jouent un rôle fondamental en géométrie mais aussi (entre autres) en cristallographie.

Soit (E, \vec{E}) un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. On appelle isométrie de E une application $f : E \rightarrow E$ telle que pour tous $A, B \in E$, $f(A)f(B) = AB$. On note $\text{Is}(E)$ l'ensemble des isométries de E .

Proposition 2. f est une isométrie si et seulement si elle est affine et \vec{f} est une application orthogonale.

Proposition 3. Soit $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de E . f est une isométrie ssi $\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(A_i)f(A_j) = A_iA_j$. Et alors $(f(A_0), \dots, f(A_n))$ forme aussi un repère affine de $f(E)$.

Corollaire 4. $\text{Is}(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $\text{GA}(E)$.

Définition 5. Si $f \in \text{Is}(E)$ vérifie $\det(\vec{f}) = 1$, f est appelée déplacement, et antidéplacement dans le cas contraire. On note $\text{Is}^+(E), \text{Is}^-(E)$ respectivement les ensembles des déplacements et antidéplacements.

Proposition 6. $\text{Is}^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Is}(E)$.

Exemple 7. Les translations sont des déplacements. Une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace affine de codimension 1 (resp. 2) est un antidéplacement (resp. un déplacement).

Définition 8. Ces deux types de symétrie sont appelés respectivement réflexion et retournement.

Proposition 9. Si on note, pour $A \in E$, $\text{Is}_A(E) = \{f \in \text{Is}(E), f(A) = A\}$, $\text{Is}_A(E)$ est un sous-groupe de $\text{Is}(E)$, et $\text{Is}_A(E) \rightarrow O(\vec{E}), f \mapsto \vec{f}$ est un isomorphisme de groupes.

Théorème 10. Tout $f \in \text{Is}(E)$ s'écrit de manière unique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$, où $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$ et $g \in \text{Is}(E)$ ayant au moins un point fixe.

1.2 Étude du groupe orthogonal

Remarque 11. En fixant une base orthonormée de \vec{E} , on identifie $O(\vec{E})$ à $O_n(\mathbb{R})$.

Lemme 12. Soient \vec{F} un sous-espace vectoriel de \vec{E} et $\varphi \in O(\vec{E})$. Alors \vec{F}^\perp est stable par φ .

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Théorème 13. Si $\varphi \in O(\vec{E})$, il existe une base orthonormée de \vec{E} dans laquelle la matrice de E est de la forme $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_s})$.

Proposition 14. $SO(\vec{E})$ et $\text{Is}^+(E)$ sont connexes par arcs.

Proposition 15. Tout $\varphi \in O(\vec{E})$ peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions.

Corollaire 16. Tout $f \in \text{Is}(E)$ peut s'écrire comme produit d'au plus n réflexions.

Proposition 17. Pour $n \geq 3$, tout élément de $SO(E)$ peut s'écrire comme produit d'au plus n retournements.

2 Classification en dimensions 2 et 3

2.1 Isométries du plan

On suppose ici $\dim(\vec{E}) = 2$.

Définition 18. On appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ une isométrie de \vec{E} qui a une matrice de la forme R_θ dans une base orthonormée. On appelle rotation de E une isométrie affine dont la partie linéaire est une rotation vectorielle, et possédant au moins un point fixe.

Proposition 19. La composée de deux symétries orthogonales d'axes D, D' sécants en Ω est une rotation de centre Ω et d'angle (D, D') . Réciproquement, toute rotation peut s'écrire comme le produit de deux symétries orthogonales d'axes passant par son centre, dont l'un peut être choisi arbitrairement.

Définition 20. On appelle symétrie glissée la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

Théorème 21. On a la classification suivante des isométries affines du plan :

| | Translation | Rotation | Réflexion | Réflexion glissée |
|----------------|-------------|------------|---|---|
| Points fixes | \emptyset | Un point | Une droite | \emptyset |
| $Mat(\vec{f})$ | I_2 | R_θ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |

2.2 Isométries de l'espace

On suppose ici $\dim(\vec{E}) = 3$.

Définition 22. On appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ toute isométrie vectorielle dont la matrice est dans une certaine base $\text{diag}(1, R_\theta)$. L'axe dirigé par le premier vecteur est appelé axe de la rotation. On appelle rotation affine toute application affine ayant au moins un point fixe et dont la partie linéaire est une rotation vectorielle.

Définition 23. On appelle vissage la composée d'une translation et d'une rotation.

On note $\vec{E}_1 = \ker(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{E}})$.

Théorème 24. On a la classification suivante des isométries affines de l'espace :

| $\dim(\vec{E}_1)$ | 3 | 1 | 2 | 0 |
|-------------------|---------------|----------|------------------|-------------------|
| Points fixes | Id_E | Rotation | Réflexion | Rotation-symétrie |
| Pas de point fixe | Translation | Vissage | Symétrie glissée | |

Application 25. Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

3 Isométries conservant une partie

3.1 Premiers résultats et exemples

Si A partie de E , on notera $\text{Is}(A)$ l'ensemble des isométries de E qui laissent A invariante.

Proposition 26. $\text{Is}(A)$ est un sous-groupe de $\text{Is}(E)$.

Théorème 27. Si $s \in \text{Is}^-(A)$, alors l'application $\text{Is}^-(A) \rightarrow \text{Is}^+(A), f \mapsto sf$ est une bijection.

Théorème 28. Toute isométrie qui stabilise une partie finie $\{A_0, \dots, A_k\}$ stabilise l'isobarycentre de A_0, \dots, A_k .

Ainsi, dans le cas d'une partie finie, on commence par chercher les déplacements qui stabilisent l'isobarycentre.

Application 29. Si T est un triangle non isocèle du plan, $\text{Is}(T) = \{\text{Id}_E\}$. Si T triangle isocèle non équilatéral, $\text{Is}(T)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3.2 Groupe diédral

On suppose ici $\dim(\vec{E}) = 2$.

Proposition 30. Soit $P = A_1 \cdots A_n$ un polygone à n sommets deux à deux distincts. On a équivalence entre :

- (i). P est inscrit dans un cercle \mathcal{C} et pour tout $k, A_k A_{k+1} = A_0 A_1$.
- (ii). Il existe une rotation r telle que pour tout $k, r(A_k) = A_{k+1}$.

Définition 31. On dit alors que P est un polygone régulier.

Lemme 32. Soient P polygone régulier et r une rotation associée. Alors le centre du cercle dans lequel P est inscrit est l'isobarycentre des sommets de P , et il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, k \wedge n = 1$, tel que r soit d'angle $\frac{2k\pi}{n}$.

Théorème 33. $\text{Is}^+(P) = \{\text{Id}_E, r, \dots, r^{n-1}\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème 34. Il y a exactement n réflexions laissant P fixe, ce sont celles par rapport aux droites (OA_k) et les médiatrices des segments $[A_k A_{k+1}]$.

Définition 35. $\text{Is}(P)$ est appelé groupe diédral d'indice n et noté D_n .

Théorème 36. D_n est un groupe d'ordre $2n$, engendré par un élément r d'ordre n et un élément s d'ordre 2.

Exemple 37. D_3 est isomorphe à S_3 .

3.3 Isométries du cube et du tétraèdre

Soit $C = ABCDEFGH$ un cube régulier d'isobarycentre O .

Lemme 38. L'image d'une face (resp. d'une arête, d'un sommet) du cube par un élément de $\text{Is}(C)$ est une face (resp. une arête, un sommet).

Théorème 39. Il y a 24 rotations laissant le cube invariant. Ce sont :

- L'identité.
- 9 rotations d'axes perpendiculaires aux faces, d'angles $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.
- 8 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axes les diagonales du cube.
- 6 rotations d'angle π et d'axes joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Théorème 40. Il y a 24 antidéplacements laissant le cube invariant. Ce sont :

- La symétrie de centre O .
- 6 réflexions par rapport à un plan contenant des arêtes opposées.
- 3 réflexions par rapport aux plans médiateurs des arêtes.
- 14 symétries-rotations n'admettant que O comme point fixe.

Corollaire 41. $\text{Is}^+(C) \simeq \mathcal{S}_4$ et $\text{Is}(C) \simeq \mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $T = ABCD$ un tétraèdre régulier d'isobarycentre O .

Théorème 42. Il y a 24 isométries préservant T , ce sont :

- L'identité.
- Les 8 rotations d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ par rapport à un axe.
- Les 3 demi-tours d'axes les intersections de deux plans médiateurs d'arêtes.
- Les 6 réflexions par rapport aux plans médiateurs des arêtes.
- Les 6 rotations-symétries, composées de la rotation d'une face et la réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête hors de la face.

Corollaire 43. $\text{Is}(T) \simeq \mathcal{S}_4$ et $\text{Is}^+(T) \simeq \mathcal{A}_4$.

Application 44. Table de caractères de \mathcal{S}_4 .

Annexe

Table de caractères de \mathcal{S}_4 :

| | Id | $(1\ 2)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 2\ 3\ 4)$ | $(1\ 2)(3\ 4)$ |
|--------------------|------|----------|-------------|----------------|----------------|
| χ_1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| χ_ε | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| χ_s | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| χ'_s | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| χ_t | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |

Développements

- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.
- Table de caractères de \mathcal{S}_4 .

Références

[1] B. Aebischer, GÉOMÉTRIE, Vuibert.

[2] M. Audin, GÉOMÉTRIE, EDP Sciences.

[3] F. Combes, ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE, Bréal.

[4] D.-J. Mercier, COURS DE GÉOMÉTRIE, EPU.