

## 160. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

**Introduction :** La notion d'espace euclidien permet de faire le lien entre algèbre linéaire et géométrie, et notamment de faire apparaître les notions d'angles et de distances.

Soit  $E$  espace euclidien de dimension  $n$ , dont une base orthonormée est  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

### 1 Endomorphismes normaux

#### 1.1 Adjoint d'un endomorphisme

**Proposition 1.** Il existe un unique  $f^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ .

**Définition 2.**  $f^*$  est appelé l'adjoint de  $f$ .

**Proposition 3.** Si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t A$ .

**Corollaire 4.** On a  $f^{**} = f$ ,  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ ,  $\text{rg}(f^*) = \text{rg}(f)$  et  $\det(f^*) = \det(f)$ .

**Proposition 5.** Soit  $F$  sev de  $E$  stable par  $f$ . Alors  $F^\perp$  est stable par  $f^*$ .

**Définition 6.**  $f$  est dit normal si  $f$  et  $f^*$  commutent. Il est dit orthogonal s'il est inversible et que  $f^{-1} = f^*$ . On note  $O(E)$  l'ensemble des endomorphismes orthogonaux, et  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices d'endomorphismes orthogonaux.

**Proposition 7.** Ainsi, si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ,  $f$  est normal ssi  $A$  et  ${}^t A$  commutent, et  $f$  orthogonal ssi  ${}^t A A = A {}^t A = I_n$ .

**Proposition 8.** Si  $f$  est normal, alors pour tout  $x \in E, \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ .

**Proposition 9.**  $f$  est orthogonal si et seulement s'il envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée.

#### 1.2 Réduction des endomorphismes normaux

**Lemme 10.** Si  $f$  est normal et  $\lambda$  valeur propre de  $f$ , alors  $E_\lambda(f)^\perp$  est stable par  $f$ .

**Lemme 11.** Si  $\dim(E) = 2$  et si  $f$  est normal sans valeurs propres réelles, alors il existe  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

**Théorème 12.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  normal. Alors il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $E$  est de la forme  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, A_1, \dots, A_s)$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  et  $A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

## 2 Endomorphismes (anti-)symétriques

### 2.1 Propriétés de ces endomorphismes

**Définition 13.**  $f$  est dit symétrique (ou auto-adjoint) si  $f^* = f$  et antisymétrique si  $f^* = -f$ .

**Remarque 14.** Cela se traduit matriciellement en  ${}^t A = A$  (respectivement  ${}^t A = -A$ ). On note  $S_n(\mathbb{R})$  (resp.  $A_n(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

**Proposition 15.** On a  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .

**Application 16.** Soit  $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$  inversible. Alors il existe  $V$  voisinage de  $A_0$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  et  $\psi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\forall A \in V, A = {}^t \psi(A) A_0 \psi(A)$ .

**Remarque 17.** Les endomorphismes symétriques et antisymétriques sont normaux.

**Théorème 18.** Si  $f$  est symétrique, il existe une base orthonormée dans laquelle sa matrice est diagonale (à valeurs propres réelles).

**Théorème 19.** Si  $f$  est anti-symétrique, il existe une base orthonormée dans laquelle sa matrice est  $\text{diag}(0, \dots, 0, A_1, \dots, A_s)$  où  $A_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Définition 20.**  $A \in S_n(\mathbb{R})$  est dite positive (resp. définie positive) si  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x \rangle \geq 0$  (resp.  $\langle Ax, x \rangle > 0$  dès lors que  $x \neq 0$ ).

**Corollaire 21.**  $A \in S_n(\mathbb{R})$  est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

### 2.2 Applications

**Lemme 22.** Soit  $\varphi$  forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . Alors il existe un unique  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tous  $x, y \in E, \varphi(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle$ , et  $f$  est auto-adjoint.

**Corollaire 23.** Il existe une base orthonormée à la fois pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et pour  $\varphi$ .

**Corollaire 24.** Si  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), B \in S_n(\mathbb{R})$ , il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^t P P$  et  $B = {}^t P D P$ .

**Application 25.** Soient  $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Alors  $\det((1 - \alpha)A + \alpha B) \geq \det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha$ , avec inégalité stricte si  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $A \neq B$ .

**Application 26** (John-Loewner). Soit  $K$  compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe un unique ellipsoïde centré en  $0$  de volume minimal contenant  $K$ .

**Proposition 27.** Pour tout  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , il existe un unique  $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $S = R^2$ , et  $R$  est un polynôme en  $S$ .

**Proposition 28.**  $\exp$  réalise un homéomorphisme de  $S_n(\mathbb{R})$  sur  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

## 3 Endomorphismes orthogonaux

### 3.1 Groupe orthogonal

**Proposition 29.**  $(O(E), \circ)$  est un sous-groupe de  $GL(E)$ .

**Proposition 30.** Si  $f \in O(E)$ , alors  $\det(f) = \pm 1$ .

**Proposition 31.** Si  $f$  est antisymétrique, alors  $\exp(f)$  est orthogonal.

**Définition 32.** On définit alors  $SO(E) = \{f \in O(E), \det(f) = 1\}$ .

**Proposition 33.**  $SO(E)$  est un sous-groupe distingué de  $O(E)$ .

**Théorème 34.**  $O(E)$  est engendré par les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan.

### 3.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux

**Remarque 35.** Les endomorphismes orthogonaux sont normaux, et leurs valeurs propres (complexes) sont de module 1.

**Théorème 36.** Si  $f$  endomorphisme orthogonal, il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\text{diag}(I_r, -I_s, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k})$  où  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

**Corollaire 37.** Si  $\dim(E) = 2$ , les éléments de  $SO(E)$  ont une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  (rotations d'angle  $\theta$ ). Les éléments qui ne sont pas dans  $SO(E)$  possèdent une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Corollaire 38.** Si  $\dim(E) = 3$ , les éléments de  $SO(E)$  ont une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (rotations d'angle  $\theta$  et d'axe le dernier vecteur de la base).

**Définition 39.** Lorsque  $\theta = \pi$ , on parle de retournement.

**Théorème 40.** Les retournements engendrent  $SO_3(\mathbb{R})$ .

**Application 41.**  $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.

**Proposition 42.** Si  $\dim(E) = 3$ , les éléments de  $O(E) \setminus SO(E)$  ont une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

### 3.3 Propriétés topologiques

On munit  $E$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la topologie de la norme.

**Proposition 43.**  $O_n(\mathbb{R})$  est compact.

**Lemme 44.** Si  $K$  convexe compact de  $E$  et  $H$  sous-groupe compact de  $GL(E)$  tel que  $\forall u \in H, u(K) \subseteq K$ , alors  $\exists a \in K, \forall u \in H, u(a) = a$ .

**Théorème 45.** Tout sous-groupe compact de  $GL(E)$  est conjugué à  $O(E)$ .

**Théorème 46** (Décomposition polaire). Pour tout  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique  $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $A = \Omega S$ , et cela définit un homéomorphisme de  $GL_n(\mathbb{R})$  sur  $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Application 47.** Les points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$  (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne) sont les éléments de  $O(E)$ .

## Développements

- $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.
- Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$ .

## Références

- [1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ALGÈBRE 2, 3, Cassini.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [3] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cepaduès.