

## 159. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

### 1 Généralités sur les formes linéaires

#### 1.1 Espace dual

**Définition 1.** On appelle forme linéaire sur  $E$  une application linéaire  $f$  de  $\mathbb{E}$  dans  $\mathbb{K}$ . L'ensemble des formes linéaires  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  sera noté  $E^*$ , on l'appelle espace dual de  $E$ .

**Remarque 2.** Si  $x \in E, \varphi \in E^*$ , on note  $\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$ .

**Proposition 3.**  $E^*$  est aussi de dimension finie  $n$ .

**Remarque 4.** Une forme linéaire est soit nulle soit surjective.

**Théorème 5 (Riesz).** Si  $E$  est un espace euclidien ou hermitien et  $\varphi \in E^*$ , il existe un unique  $a \in E$  tel que pour tout  $x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$ .

**Exemple 6.** Soit  $\Phi$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \Phi(X) = \text{tr}(AX)$ .

#### 1.2 Hyperplans

**Définition 7.** Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est appelé hyperplan s'il admet un supplémentaire de dimension 1.

**Remarque 8.** En particulier en dimension finie,  $H$  hyperplan ssi  $\dim(H) = n - 1$ .

**Théorème 9.** Un sev  $H$  de  $E$  est un hyperplan si et seulement s'il existe  $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$  tel que  $H = \ker(\varphi)$ .

**Application 10.** Tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  rencontre  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**Proposition 11.** Les seules applications linéaires qui stabilisent tous les hyperplans de  $E$  sont les homothéties.

## 2 Dualité en dimension finie

### 2.1 Bases duales et antéduales

**Définition 12.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ . On définit pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^* \in E^*$  par  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ .  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est appelée base duale de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**Proposition 13.**  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  forme une base de  $E^*$ , et  $\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$ .

**Exemple 14.** On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et considère la base de  $\mathbb{R}^3$  donnée par  $f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 0, -1), f_3 = (0, 1, 1)$ . Alors  $(f_1^*, f_2^*, f_3^*) = (e_1^* - e_2^* + e_3^*, e_2^* - e_3^*, -e_1^* + 2e_2^* - e_3^*)$ .

**Proposition 15.** Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ , soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Alors la matrice de passage de  $\mathcal{B}^*$  à  $\mathcal{B}'^*$  dans  $E^*$  est  ${}^t P^{-1}$ .

**Théorème 16.** Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  base de  $E^*$ . Il existe une unique base de  $E$  dont  $(f_1, \dots, f_n)$  soit la base duale.

**Définition 17.** On l'appelle base antéduale de  $(f_1, \dots, f_n)$ .

**Exemple 18.** Si  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  distincts et pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi_i \in \mathbb{R}_n[X]^*$  est définie par  $\varphi_i(P) = P(x_i)$ , alors  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  base de  $\mathbb{R}_n[X]^*$  de base antéduale  $(L_0, \dots, L_n)$  où  $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ .

**Remarque 19.** La base antéduale d'obtient par inversion d'un système linéaire.

### 2.2 Bidual

**Définition 20.** On appelle bidual de  $E$  l'espace  $E^{**}$ .

**Théorème 21.** Pour  $x \in E$ , on définit  $\Phi_x \begin{cases} E^* & \rightarrow \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto \langle \varphi, x \rangle \end{cases}$ . Alors l'application  $E \rightarrow E^{**}, x \mapsto \Phi_x$  est un isomorphisme.

**Remarque 22.** Cet isomorphisme est canonique.

## 3 Orthogonalité et transposée

### 3.1 Orthogonalité

**Définition 23.** Deux éléments  $x \in E, \varphi \in E^*$  sont dits orthogonaux si  $\langle \varphi, x \rangle = 0$ .

Si  $A \subset E$ , on définit son orthogonal  $A^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in A, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$ .

Si  $B \subset E^*$ , on définit son orthogonal  $B^\circ = \{x \in E, \forall \varphi \in B, \langle \varphi, x \rangle = 0\}$ .

**Remarque 24.** Si  $\varphi \in E^*$ ,  $\{\varphi\}^\circ = \ker(\varphi)$ .

**Proposition 25.** Le passage à l'orthogonal renverse les inclusions.

**Proposition 26.** Si  $F$  sev de  $E$ , on a  $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$  et  $F^{\perp\circ} = F$ . Si  $G$  sev de  $E^*$ , on a  $\dim(G) + \dim(G^\circ) = n$  et  $G^{\circ\perp} = G$ .

**Corollaire 27.** Une partie  $F$  de  $E$  est un sev de dimension  $n-d$  s'il existe  $d$  formes linéaires indépendantes  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  telles que  $F = \{x \in E, \varphi_1(x) = \dots = \varphi_d(x) = 0\}$ .

### 3.2 Application transposée

**Définition 28.** Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On définit sa transposée,  ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$  par  ${}^t u(f) = f \circ u$ .

**Proposition 29.** On a  $\text{rg}({}^t u) = \text{rg}(u)$ ,  $\text{Im}({}^t u) = \ker(u)^\perp$ ,  $\ker({}^t u) = \text{Im}(u)^\perp$ .

**Proposition 30.** Si  $E, F, G$  trois espaces vectoriels,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$ .

**Proposition 31.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  $F$  est stable par  $u$ , ssi,  $F^\perp$  est stable par  ${}^t u$ .

**Application 32.** Deux endomorphismes de  $E$  se trigonalisent dans une même base si et seulement s'ils sont tous deux trigonalisables et commutent.

## 4 Applications

### 4.1 Réduction de Frobenius

**Théorème 33.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe une suite  $F_1, \dots, F_r$  de sev de  $E$ , tous stables par  $f$ , tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
- Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $f|_{F_i}$  endomorphisme cyclique de  $F_i$ .
- En notant  $P_i$  le polynôme minimal de  $f|_{F_i}$ , on a  $\forall i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, P_{i+1} | P_i$ .

De plus, la suite des  $P_1, \dots, P_r$  ne dépend que de  $f$  et pas de la décomposition choisie.

**Corollaire 34** (Réduction de Fröbenius). Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et si  $P_1, \dots, P_r$  sont ses invariants de similitude, alors il existe une base dans laquelle la matrice de  $f$  est (par blocs)  $\text{diag}(C(P_1), \dots, C(P_r))$ , où  $C(P)$  désigne la matrice compagnon du polynôme  $P$ .

**Exemple 35.** La réduite de Frobenius de  $\text{diag}(\mathcal{C}_{X^2}, \mathcal{C}_{X^2+1})$  est  $\mathcal{C}_{X^2(X^2+1)}$ .

**Application 36.** Deux éléments de  $\mathcal{L}(E)$  sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

### 4.2 Transvections et dilatations

**Définition 37.** Soient  $H$  un hyperplan de  $E$ ,  $D$  un supplémentaire de  $H$ ,  $\lambda \neq 1$ . On appelle dilatation d'hyperplan  $H$ , de droite  $D$  et de rapport  $\lambda$  un automorphisme  $u \in GL(E)$  tel que  $H = \ker(u - \text{Id})$ ,  $D = \ker(u - \lambda \text{Id})$ .

**Proposition 38.** Soit  $u \in GL(E)$  fixant un hyperplan  $H$ . On a équivalence entre : (i).  $u$  dilatation, (ii).  $\lambda := \det(u) \neq 1$ , (iii).  $u$  possède une valeur propre distincte de 1 et  $u$  diagonalisable, (iv).  $\text{Im}(u - \text{Id}) \not\subset H$ , (v).  $u$  a pour matrice  $\text{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$  dans une certaine base.

**Corollaire 39.** Deux dilatations sont conjuguées ssi elles ont même rapport.

**Définition 40.** On appelle transvection un élément de  $SL(E)$  distinct de  $\text{Id}_E$  fixant un hyperplan.

**Proposition 41.** Soit  $u \in GL(E)$  fixant un hyperplan  $H = \ker(\varphi)$ . On a équivalence entre : (i).  $u$  transvection, (ii).  $\exists a \in H, \forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x)a$ , (iii).  $u$  non diagonalisable, (iv).  $\text{Im}(u - \text{Id}) \neq \{0\}$  et  $\text{Im}(u - \text{Id}) \subset H$ , (v).  $u$  a pour matrice  $I_n + E_{n-1,n}$  dans une certaine base.

**Proposition 42.** Deux transvections sont conjuguées dans  $GL(E)$ , et dans  $SL(E)$  si  $\dim(E) \geq 3$ .

**Théorème 43.**  $SL(E)$  est engendré par les transvections, et  $GL(E)$  par les transvections et les dilatations.

### 4.3 Calcul différentiel

**Remarque 44.** La différentielle d'une application différentiable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 45** (Extrema liés). Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soient  $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ , soit  $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$ . Si  $f|_\Gamma$  possède un extremum relatif en  $a \in \Gamma$ , et si les formes linéaires  $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$  forment une famille libre, alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tels que  $df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$ .

**Application 46.**  $SO_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des éléments de  $SL_n(\mathbb{R})$  de norme minimale.

## Développements

- Réduction de Frobenius.
- Théorème des extrema liés.

## Références

- [1] S. Francinou et al., ORAUX X-ENS ALGÈBRE 1, Cassini.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [3] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cépaduès.
- [4] A. Szpirglas et al., ALGÈBRE L3, Pearson.