

## 158. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

**Introduction** : Les matrices symétriques interviennent dans de nombreux problèmes (théorie des graphes, analyse numérique) et possèdent des propriétés intéressantes.

### 1 Généralités

#### 1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.** Si  $\mathbb{K}$  est un corps et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , elle est dite symétrique si  ${}^tM = M$  et antisymétrique si  ${}^tM = -M$ . Si  $K = \mathbb{C}$ , elle est dite hermitienne si  $M := {}^t\bar{M} = M$ . On note respectivement  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$  les ensembles des matrices symétriques, antisymétriques, hermitiennes.

**Exemple 2.** La matrice du Laplacien discret  $\frac{1}{n^2} \text{tridiag}(-1, 2, -1)$  est symétrique.

**Remarque 3.** Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls, et ceux d'une matrice hermitienne sont réels.

**Proposition 4.** On a, si  $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , et vu comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

**Définition 5.** Si  $M$  est symétrique réelle ou hermitienne, elle est dite positive (resp. définie positive) si  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ),  $x^*Mx \geq 0$  (resp.  $> 0$  dès lors que  $x \neq 0$ ). On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ ) l'ensemble des matrices symétriques ou hermitiennes positives (resp. définies positives).

**Proposition 6.** Si  $M$  est symétrique ou hermitienne positive (resp. définie positive), ses valeurs propres sont réelles et positives (resp. strictement positives).

#### 1.2 Liens avec les formes quadratiques et hermitiennes

**Définition 7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle forme bilinéaire symétrique sur  $E$  une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  telle que pour tous  $x, y \in E$ ,  $\varphi(x, \cdot), \varphi(\cdot, y)$  soient linéaires et  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ . On appelle forme quadratique une application  $q : E \rightarrow \mathbb{K}$  telle qu'il existe  $\varphi$  forme bilinéaire symétrique sur  $E$  telle que  $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$ .

**Définition 8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On appelle forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur  $E$  une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tous  $x, y \in E$ ,  $\varphi(x, \cdot)$  est semi-linéaire,  $\varphi(\cdot, y)$  est linéaire et  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ . On appelle forme hermitienne une application  $q : E \rightarrow \mathbb{K}$  telle qu'il existe  $\varphi$  forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur  $E$  telle que  $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$ .

Si  $\dim(E) = n$ , que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ ,  $\varphi$  forme bilinéaire ou forme sesquilinéaire, on note  $S = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$ . Alors, pour tous  $x, y \in E$ , si on note  $X, Y$  leurs matrices dans  $\mathcal{B}$ , on a  $\varphi(x, y) = X^*SY$ .

**Remarque 9.** L'application qui à une forme bilinéaire ou sesquilinéaire associe sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est un isomorphisme.

**Proposition 10.**  $\varphi$  est symétrique ou hermitienne si et seulement si sa matrice est symétrique ou hermitienne.

**Proposition 11.** Si  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$  et  $q$  forme quadratique ou hermitienne dont les matrices dans  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  sont respectivement  $M, M'$ , alors si  $P$  matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , on a  $M' = P^*MP$ .

**Définition 12.** On dit alors que  $M, M'$  sont congrues.

## 2 Réduction et applications

### 2.1 Théorèmes spectraux

**Proposition 13.** Soit  $E$  un espace euclidien ou hermitien, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique  $f^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ . Dans une base orthonormée, si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , la matrice de  $f^*$  est  $A^*$ .

**Définition 14.**  $f^*$  est appelé l'adjoint de  $f$ .  $f$  est dit auto-adjoint si  $f^* = f$ .

**Corollaire 15.**  $f$  est auto-adjoint ssi sa matrice en base orthonormée est symétrique (si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) ou hermitienne (si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

**Lemme 16.** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  est auto-adjoint et  $F$  sev de  $E$  stable par  $f$ , alors  $F^\perp$  stable par  $f$ .

**Théorème 17.** Il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres pour  $f$ , et ses valeurs propres sont réelles. Ainsi, si  $S$  matrice symétrique réelle ou hermitienne, il existe  $P$  matrice orthogonale ou unitaire et  $D$  diagonale réelle tels que  $S = P^*DP$ .

**Corollaire 18.** Ainsi, une matrice hermitienne est positive (resp. définie positive) ssi ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

**Proposition 19.** Si  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}), B \in S_n(\mathbb{R})$ , il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale réelle telles que  $A = {}^tPP$  et  $B = {}^tPDP$ .

**Application 20.** Soient  $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Alors  $\det((1-\alpha)A + \alpha B) \geq \det(A)^{1-\alpha} \det(B)^\alpha$ , avec inégalité stricte si  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $A \neq B$ .

## 2.2 Signature d'une forme quadratique réelle

**Proposition 21.** La relation de congruence est une relation d'équivalence.

**Théorème 22.** Pour tout  $S \in S_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique  $(r, s) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $S$  soit congrue à  $\text{diag}(I_r, -I_s, 0_{n-r-s})$ .

**Définition 23.**  $(r, s)$  est appelé la signature de  $S$ .

**Remarque 24.** Le calcul de la signature peut se faire en passant par la forme quadratique, grâce à l'algorithme de Gauss.

**Exemple 25.** La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour forme quadratique associée  $q(x, y, z) = 2(xy + yz + xz) = \frac{1}{4}[(x + y + 2z)^2 - (x - y)^2] - z^2$  et sa signature est  $(1, 2)$ .

## 2.3 Racine carrée et décomposition polaire

**Proposition 26.** Soit  $S \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ . Il existe une unique matrice  $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$  telle que  $S = A^2$ , et  $A$  est un polynôme en  $S$ .

**Théorème 27.** Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  (resp.  $GL_n(\mathbb{C})$ ). Il existe un unique couple  $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$  (resp.  $(U, H) \in U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$ ) tel que  $M = \Omega S$  (resp.  $M = UH$ ).

# 3 Applications

## 3.1 Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

Soient  $A \in GL_n(\mathbb{C}), b \in \mathbb{C}^n$ . On cherche à résoudre le problème  $Ax - b = 0$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{C}^n$ .

**Définition 28.** Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$  que l'on écrit  $A = M - N$  avec  $M$  inversible. On dit que la méthode itérative associée à cette décomposition est convergente si, pour tout  $b \in \mathbb{C}^n$ , pour tout  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ , la suite définie par  $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$  converge.

**Lemme 29.** Si la méthode converge, alors sa limite  $x$  est l'unique solution du système linéaire  $Ax = b$ .

**Proposition 30.** La méthode converge, si et seulement si,  $\rho(M^{-1}N) < 1$ .

**Théorème 31.** Si  $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ , alors  $M^* + N$  est hermitienne. Si elle est de plus définie positive, alors la méthode itérative converge.

**Application 32.** On note  $D$  la partie diagonale de  $A$ ,  $E$  sa partie triangulaire inférieure,  $F$  sa partie triangulaire supérieure.

La méthode de Jacobi est associée à la décomposition  $M = D, N = E + F$ .

La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition  $M = D - E, N = F$ . Ainsi, si  $A$  est hermitienne définie positive, la méthode de Gauss-Seidel converge. Si de plus,  $2D - A$  est définie positive, la méthode de Jacobi converge.

**Exemple 33.** La résolution de systèmes linéaires associés à la matrice du Laplacien  $1D$  peuvent se faire par Jacobi et Gauss-Seidel.

## 3.2 Hessienne d'une application de classe $\mathcal{C}^2$

**Définition 34.** Soient  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ , soit  $a \in U$ . On appelle hessienne de  $f$  en  $a$  la matrice  $H(a) = (d^2f(e_i, e_j))_{i,j}$ .

**Proposition 35.**  $H$  est symétrique.

**Proposition 36.** Soit  $a \in U$  tel que  $df(a) = 0$ . Alors

- Si  $H(a)$  définie positive, alors  $f$  admet un minimum en  $a$ .
- Si ni  $H(a)$  ni  $-H(a)$  n'est positive, alors  $f$  n'admet pas d'extremum en  $a$ .

**Contre-exemple 37.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^3$  vérifie  $df(0, 0) = 0, d^2f(0, 0)$  positive, mais  $(0, 0)$  n'est pas un minimum local.

**Contre-exemple 38.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^4$  admet un minimum local strict en  $(0, 0)$  mais  $d^2f(0, 0)$  non définie positive.

**Lemme 39.** Soit  $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$  inversible. Alors il existe  $V$  voisinage de  $A_0$  dans  $S_n(\mathbb{R})$  et  $\psi : V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$ .

**Théorème 40 (Morse).** Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $0$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . On suppose  $df_0 = 0$  et  $d^2f_0$  forme quadratique non dégénérée, de signature  $(p, n - p)$ . Alors il existe un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  entre deux voisinages  $U, V$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(0) = 0$  et  $\forall x \in U, f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$ .

## 3.3 Théorie des graphes

**Définition 41.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté, soit  $n = |V|$ .

On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Remarque 42.** La matrice d'adjacence est symétrique, et donc diagonalisable.

**Application 43** (Théorème de l'amitié). *Si  $G$  est tel que tout couple de sommets possède exactement un voisin commun, alors il existe un sommet adjacent à tous les autres.*

## Développements

- Méthodes itératives de décomposition régulière.
- Lemme de Morse.
- Théorème de l'amitié.

## Références

- [1] G. Allaire, S.-M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses.
- [2] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [3] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ALGÈBRE 3, Cassini.
- [4] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [5] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cépaduès.