

157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Soient K un corps, E un K -espace vectoriel de dimension n .

1 Généralités

1.1 Endomorphismes trigonalisables

Définition 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. A est dite triangulaire supérieure si $\forall i, j, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est trigonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 3. f est trigonalisable si et seulement si il stabilise un drapeau complet de E .

Proposition 4. f est trigonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé, si et seulement si χ_f est scindé.

Corollaire 5. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Contre-exemple 6. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque 7. Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont exactement ses éléments diagonaux. Ainsi, si f trigonalisable, on a $\text{tr}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda$ et $\det(f) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda$.

Définition 8. Soit f endomorphisme trigonalisable, on note $\chi_f = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$. On appelle sous-espace caractéristique associé à λ_i l'espace $N_i(f) = \ker((f - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i})$.

Proposition 9. Les $N_i(f)$ sont des espaces stables par f , et $E = \bigoplus_{i=1}^r N_i(f)$.

Il existe alors une base \mathcal{B} de E dans laquelle

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_r \end{pmatrix} \text{ avec } T_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_j}(K).$$

Proposition 10. Deux endomorphismes trigonalisables qui commutent se trigonalisent dans une même base.

1.2 Endomorphismes nilpotents

Définition 11. f est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On appelle alors indice de nilpotence de f l'entier $\min\{k \in \mathbb{N}, f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$.

Proposition 12. f est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable et possède 0 comme seule valeur propre.

Proposition 13. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \geq 1$, $\text{tr}(A^k) = 0$.

Application 14 (Burnside). *Un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement si il est d'exposant fini.*

Remarque 15. Si f trigonalisable, l'endomorphisme induit sur un sous-espace caractéristique est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Théorème 16 (Dunford). Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d soit diagonalisable, n nilpotent, $d \circ n = n \circ d$ et $f = d + n$. De plus, d, n sont des polynômes en f .

2 Réduction de Jordan

2.1 Réduction des endomorphismes nilpotents

Définition 17. Soit $m \in \mathbb{N}$. On appelle bloc de Jordan de taille m la matrice J_m ayant des 1 sur la diagonale supérieure et des 0 partout ailleurs.

Proposition 18. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, J_m^k est de rang $(m - k)_+$.

Théorème 19. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe une unique suite d'entiers $\deg(\pi_f) = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ et une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} J_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_r} \end{pmatrix}$.

Corollaire 20. Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si et seulement si ils ont la même réduite de Jordan.

Application 21. $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si N et $2N$ sont semblables.

Lemme 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Alors la suite de sous-espaces $(\ker(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire en E . De plus, la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $v_k = \dim(\ker(f^{k+1})) - \dim(\ker(f^k))$ est décroissante.

Proposition 22. Le nombre de blocs de Jordan de taille $k \geq 1$ de f est alors $v_{k-1} - v_k$.

2.2 Tableaux de Young

Définition 23. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, de décomposition de Jordan $(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$. On appelle tableau de Young de f le tableau à r lignes tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la i -ème ligne comporte d_i cases.

Proposition 24. Soit p l'indice de nilpotence de f . Le tableau de Young de f est aussi le tableau à p colonnes tel que, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la j -ème colonne comporte v_j cases.

Exemple 25. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^7)$ est nilpotent d'indice 3, tel que $\text{rg}(f) = 4, \text{rg}(f^2) = 1$, son tableau de Young est

.

On peut lire sur le tableau de Young la dimension de $\text{Im}(f^j) \cap \ker(f^k)$: c'est le nombre de cases de l'intersection entre les k premières colonnes du tableau, et les lignes dont on a rogné les j dernières cases.

2.3 Cas général

Proposition 26. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. Pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe des suites $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,s_j}$ telles que la matrice de f soit dans une certaine base diagonale par blocs, de blocs $\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,s_1}} + J_{d_{1,s_1}}, \dots, \lambda_r I_{d_{r,1}} + J_{d_{r,1}}, \dots, \lambda_r I_{d_{r,s_r}} + J_{d_{r,s_r}}$.

3 Applications

3.1 Invariants de similitude

Théorème 27 (Frobenius). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite de polynômes P_1, \dots, P_r unitaires telle $\forall i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, P_{i+1} | P_i$ et la matrice de f est dans une certaine base diagonale par blocs, de blocs C_{P_1}, \dots, C_{P_r} , où on note C_P la matrice compagnon d'un polynôme P . De plus, $\pi_f = P_1$ et $\chi_f = P_1 \cdots P_r$.

Définition 28. P_1, \dots, P_r sont appelés invariants de similitude de f .

Proposition 29. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, soit

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{r_i}. \text{ Alors } \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} + J_{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{r_p} + J_{r_p} \end{pmatrix} \text{ est semblable à } C_P.$$

Application 30. Si on connaît les invariants de similitude d'un endomorphisme trigonalisable, on obtient la réduite de Jordan en remplaçant chaque invariant de similitude par des blocs de Jordan associés aux racines et de taille donnée par la multiplicité.

Exemple 31. Si les invariants de similitude sont $X, X(X-1)^2, X^2(X-1)^3$, les blocs de Jordan sont $J_1, J_1, I_2 + J_2, J_2, I_3 + J_3$.

Lemme 2. Soient $\lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$. Le polynôme minimal de $\lambda I_m + J_m$ est $(X - \lambda)^m$.

Application 32. Si on connaît la réduction de Jordan d'un endomorphisme trigonalisable, on obtient ses invariants de similitude en listant les polynômes minimaux des blocs de Jordan. On obtient alors le premier invariant en faisant le produit des polynômes de plus haut degré associés à chaque valeur propre ; en les retirant de la liste et en itérant, on obtient tous les invariants de similitude.

Exemple 33. Si les blocs de Jordan sont $2I_3 + J_3, 2I_3 + J_3, I_2 + J_2, J_2, J_1$, les invariants de similitude sont $X^2(X-1)^2(X-2)^3, X(X-1)^3$.

3.2 Rayon spectral

Définition 34. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit son rayon spectral : $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

Proposition 35 (Householder). Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varepsilon > 0$. Il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Application 36. La suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Développements

- Théorème de Burnside
- Décomposition de Dunford

Références

- [1] G. Allaire, S. M. Kaber, ALGÈBRE LINÉAIRE NUMÉRIQUE, Ellipses.
- [2] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cépaduès.
- [3] R. Mansuy, R. Mneimné, ALGÈBRE LINÉAIRE, Vuibert.