

155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Introduction : Diagonaliser un endomorphisme revient à décomposer l'espace en sous-espaces sur lesquels il agit comme une homothétie. Si cela aide grandement à comprendre l'endomorphisme, cela n'est pas toujours possible.

Soient K un corps, E un K -espace vectoriel de dimension finie n .

1 Généralités

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.1 Rappels et définitions

Lemme 1 (des noyaux). Soit $P = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_r^{\alpha_r} \in K[X]$ dont on donne la décomposition en produit de polynômes irréductibles. Alors

$\ker(P(f)) = \bigoplus_{j=1}^r \ker(Q_j^{\alpha_j}(f))$, et les projecteurs associés sont des polynômes en f .

Théorème 2 (Cayley-Hamilton). χ_f est un polynôme annulateur de f .

Définition 3. f est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 4. Soit \mathcal{B} base de E . f diagonalisable, si et seulement si, $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable. Les coefficients diagonaux de la matrice associée sont alors les valeurs propres de f .

1.2 Critères de diagonalisabilité

Proposition 5. f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f , si et seulement si E est somme directe de sous-espaces propres de f .

Corollaire 6. Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Théorème 7. f est diagonalisable, si et seulement si, f annule un polynôme scindé à racines simples.

Exemple 8. Les projecteurs annulent $X^2 - X$, donc sont diagonalisables. Les symétries annulent $X^2 - 1$, donc sont diagonalisables.

Exemple 9. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{C} mais pas sur \mathbb{R} .

Théorème 10. f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.

Corollaire 11. f est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_{\lambda}(f)) = n$.

1.3 Co-diagonalisabilité

Théorème 12. Soit $(f_j)_{1 \leq j \leq k}$ famille d'endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$. Ils sont diagonalisables dans une même base, si et seulement si, ils sont tous diagonalisables et commutent deux à deux.

Application 13. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont diagonalisables, alors $\Phi \begin{cases} \mathcal{M}_n(K) & \rightarrow \mathcal{M}_n(K) \\ M & \mapsto AMB \end{cases}$ est diagonalisable.

1.4 Endomorphismes normaux

On considère ici que E est un espace hermitien.

Définition 14. $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si f et f^* commutent.

Théorème 15. f est normal si et seulement si f et f^* sont diagonalisables dans une même base orthonormée.

Corollaire 16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M est normale si et seulement s'il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ telle que P^*MP soit diagonale.

Théorème 17 (Cas réel). On suppose E euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe \mathcal{B} base orthonormée telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \tau_1, \dots, \tau_s)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et les τ_i sont des blocs de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. En particulier, si M est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée sur \mathbb{R} .

Théorème 18 (Matrices antisymétriques). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^* = -M$. Alors il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ telle que P^*MP soit diagonale à coefficients imaginaires purs.

2 Approximation par un endomorphisme diagonalisable

2.1 Décomposition de Dunford

Théorème 19. Supposons que χ_f soit scindé sur K . Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d diagonalisable, n nilpotent, $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$. De plus, d et n sont des polynômes en f .

Application 20. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a A diagonalisable ssi $\exp(A)$ diagonalisable. De plus, $\exp(A) = I_n$ ssi A diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z}$.

2.2 Densité des matrices diagonalisables

Théorème 21. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables. $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $D_n(\mathbb{R})$ est dense dans l'ensemble des matrices réelles trigonalisables, pour la topologie de la norme.

Application 22. Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ permet de redémontrer Cayley-Hamilton.

Application 23. L'application qui à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe sa partie diagonale de la décomposition de Dunford n'est pas continue dès que $n \geq 2$.

3 Applications

3.1 Calculs de puissances, suites récurrentes linéaires

Remarque 24. Diagonaliser une matrice permet un calcul rapide de ses puissances : en effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$.

Application 25. Si on considère un système de suites linéaires récurrentes donné par $U_0 \in K^n, \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$, alors $U_n = A^n U_0$, donc si on sait diagonaliser A , on connaît le terme général de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On considère désormais une suite récurrente linéaire d'ordre p , définie par u_0, \dots, u_{p-1} et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n$. En posant,

pour $n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in K^p$, on se ramène à l'étude de $U_{n+1} = {}^tAU_n$ où A

est la matrice compagnon associée au polynôme $P = a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$.

Lemme 26. A est diagonalisable si et seulement si P scindé à racines simples.

Si on est dans ce cas, on peut calculer le terme général.

3.2 Un résultat combinatoire

Définition 27. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, soit $n = |V|$.

On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 28. La matrice d'adjacence est symétrique, et donc diagonalisable.

Application 29 (Théorème de l'amitié). Si G est tel que tout couple de sommets possède exactement un voisin commun, alors il existe un sommet adjacent à tous les autres.

3.3 Représentations et caractères

Définition 30. Soit G un groupe. Une représentation linéaire de G de degré n est un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$. Le caractère associé à cette représentation est alors défini par $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$.

Exemple 31. La signature est une représentation de \mathcal{S}_n de degré 1. L'application identité est une représentation des groupes diédraux de degré 2.

Définition 32. Une représentation est dite irréductible s'il n'existe pas de sous-espace propre de \mathbb{C}^n stable par tous les $\rho(g), g \in G$. Deux représentations ρ_1, ρ_2 sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall g \in G, \rho_2(g) = u \circ \rho_1(g) \circ u^{-1}$.

Lemme 33. Il y a autant de représentations irréductibles (à équivalence près) que de classes de conjugaisons dans G .

Proposition 34. Si G est fini d'ordre N , pour tout $g \in G, \rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines N -èmes de l'unité.

Application 35. Soit G groupe fini, soit $X = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ l'ensemble de ses caractères irréductibles. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $K_i = \ker(\chi_i) = \{x \in G, \chi_i(x) = \chi_i(e_G)\}$. Alors, si H sous-groupe de G , H est distingué dans G , si et seulement si, il existe $I \subseteq \llbracket 1, r \rrbracket, H = \bigcap_{i \in I} K_i$.

Développements

- Décomposition de Dunford.
- Théorème de l'amitié.

Références

- [1] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [2] R. Mansuy, R. Mneimné, ALGÈBRE LINÉAIRE, Vuibert.
- [3] G. Peyré, L'ALGÈBRE DISCRÈTE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER, Ellipses.