

154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Introduction : La notion de sous-espace stable est à la base de la théorie de la réduction des endomorphismes.

Soient \mathbb{K} un corps, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Généralités

1.1 Sous-espaces stables

Définition 1. Un sous-espace F de E est dit stable par u si $u(F) \subseteq F$.

Exemple 2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\ker(P(u))$, $\text{Im}(P(u))$ sont des sous-espaces stables par u . En particulier, les sous-espaces propres sont stables.

Exemple 3. Une rotation de \mathbb{R}^3 admet son axe pour sous-espace stable.

Proposition 4. Si toutes les droites vectorielles de E sont stables par u , alors u est une homothétie.

Corollaire 5. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, si tous les sous-espaces de E de dimension k sont stables par u , alors u est une homothétie.

Proposition 6. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u admet une droite stable. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors u admet une droite ou un plan stable.

Proposition 7. Si u est nilpotent, ses seuls sous-espaces propres sont les $\ker(u^j)$, $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Proposition 8. F sous-espace de E est stable par u si et seulement si F^\perp est un sous-espace de E^* stable par ${}^t u$.

1.2 Endomorphisme induit

Définition 9. Si F sous-espace stable par u , on définit l'endomorphisme induit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ par $u_F : x \mapsto u(x)$.

Proposition 10. Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E telle que $\mathcal{B}_F := (e_1, \dots, e_k)$ base de F . Alors dans \mathcal{B} , la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$.

Proposition 11. On a alors $\mu_{u_F} | \mu_u$ et $\chi_{u_F} | \chi_u$.

Remarque 12. Réciproquement, si u admet une matrice triangulaire par blocs, alors on en déduit un sous-espace stable.

Proposition 13. Si $E = F \oplus G$ où F, G stables par u , alors $\mu_u = \mu_{u_F} \wedge \mu_{u_G}$.

2 Réduction des endomorphismes

2.1 Réduction par blocs

Proposition 14. La matrice de u relativement à une décomposition de E de la forme $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ est diagonale par blocs ssi $\forall i, E_i$ stable par u .

Théorème 15 (des noyaux). Soient $P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, soit $P = P_1 \dots P_k$. Alors $\ker(P(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \ker(P_k(u))$.

Définition 16. On suppose χ_u scindé, $\chi_u = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$. Alors $N_j = \ker((u - \lambda_j \text{Id}_E)^{\alpha_j})$ est appelé sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_j .

Proposition 17. Si χ_u est scindé, alors E est somme directe de sous-espaces caractéristiques, et la matrice de u dans une base adaptée est de la forme $\text{diag}(M_1, \dots, M_k)$ où $M_j \in \mathcal{M}_{\alpha_j}(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont tous égaux à λ_j .

Exemple 18. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ donné par $u(x, y, z, t) = (x + y, y, 2z + t, 2t)$ possède exactement 9 sous-espaces stables.

2.2 Diagonalisation et trigonalisation

Définition 19. On appelle drapeau complet de E une suite $\{0\} = F_0 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$ de sous-espaces de E tels que pour tout k , $\dim(F_k) = k$.

Proposition 20. u est trigonalisable si et seulement s'il existe un drapeau complet formé de sous-espaces stables par u .

Théorème 21. u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Théorème 22. u est diagonalisable si et seulement s'il stabilise n droites vectorielles, si et seulement si μ_u est scindé à racines simples.

Remarque 23. Si F sous-espace stable par u , et si u est diagonalisable (resp. trigonalisable), alors u_F est diagonalisable (resp. trigonalisable).

Proposition 24. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors $\text{Im}(u), \ker(u)$ sont stables par v .

Théorème 25. Si $(u_j)_{j \in J}$ famille d'endomorphismes diagonalisables (resp. trigonalisables) de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent, alors ils se diagonalisent (resp. trigonalisent) dans une même base.

Application 26. $GL_m(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont des groupes isomorphes ssi $m = n$.

2.3 Décomposition de Dunford

Lemme 27. Si χ_u est scindé, alors $E = \bigoplus_{j=1}^p N_j$ où les N_j sont des sous-espaces caractéristiques, et les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u .

Théorème 28. Soit k un corps, soit E un k -espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur k . Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d diagonalisable, n nilpotent, $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$. De plus, d et n sont des polynômes en f .

Application 29. u est diagonalisable ssi $\exp(u)$ est diagonalisable.

3 Endomorphismes remarquables

3.1 Endomorphismes cycliques

Définition 30. Soit $x \in E$. On définit le sous-espace cyclique de u associé à x par $\langle x \rangle_u = \{P(u)(x), P \in K[X]\}$. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \langle x \rangle_u$.

Exemple 31. Si $n = 2$ et u pas une homothétie, alors u est cyclique.

Lemme 32. Pour $x \in E$, on note $I_{u,x} = \{P \in K[X], P(u)(x) = 0_E\}$. C'est un idéal de $K[X]$, on note P_x son unique générateur unitaire. Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \mu_u$.

Théorème 33. u est cyclique si et seulement si $\deg(\mu_u) = n$.

Définition 34. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$ unitaire.

Sa matrice compagnon est définie par $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Proposition 35. u est cyclique si et seulement si il est représenté dans une certaine base par une matrice compagnon.

Théorème 36. Il existe une suite F_1, \dots, F_r de sous-espaces de E , tous stables par u , tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$,
- Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, u_{F_i} est un endomorphisme cyclique de F_i ,
- Si on note P_i le polynôme minimal de u_{F_i} , on a pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $P_{i+1} | P_i$.

De plus, la suite des P_1, \dots, P_r ne dépend que de u et pas du choix de la décomposition. On a de plus $\mu_u = P_1$ et $\chi_u = P_1 \cdots P_r$.

Définition 37. Les P_1, \dots, P_r sont appelés invariants de similitude de u .

Corollaire 38. Il existe alors une base dans laquelle la matrice de u est (par blocs) $\text{diag}(\mathcal{C}(P_1), \dots, \mathcal{C}(P_r))$.

3.2 Endomorphismes normaux

On suppose E euclidien ou hermitien.

Lemme 39. Soit F sev de E stable par u . Alors F^\perp est stable par u^* .

Définition 40. u est dit normal si $u^*u = uu^*$.

Lemme 41. Si u est normal et λ valeur propre de u , alors $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u .

Théorème 42. On a équivalence entre :

- (i). u est normal.
- (ii). u se diagonalise en base orthonormée.
- (iii). u, u^* se diagonalisent dans une même base orthonormée.

4 Théorie des représentations

Définition 43. Soit G un groupe. On appelle représentation (linéaire) de G la donnée de (ρ, V) où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ un morphisme de groupes. On appelle degré de la représentation la dimension de V .

Exemple 44. Les isométries conservant les polygones réguliers donnent une représentation de degré 2 des groupes diédraux.

Définition 45. On appelle sous-représentation de (ρ, V) la donnée d'un sous-espace W de V stable par tous les $\rho(G), g \in G$. Une représentation qui ne possède pas de sous-représentation non triviale est dite irréductible.

Exemple 46. Si G est abélien, les seules représentations irréductibles sont celles de degré 1.

Lemme 47. Si G est fini et si (ρ, V) représentation de degré fini dont W est une sous-représentation, alors W possède un supplémentaire dans V qui définit aussi une sous-représentation.

Théorème 48 (Maschke). Toute représentation de degré fini d'un groupe fini est somme directe de représentations irréductibles.

Définition 49. Si $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ sont deux représentations de G , on appelle morphisme de représentations toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ tel que $\forall g \in G, f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$. Si f est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on dit que les représentations sont isomorphes.

Théorème 50 (Schur). Soient $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ deux représentations irréductibles de G , soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ un morphisme de représentations. Alors, soit $f = 0$, soit c'est un isomorphisme. En identifiant V_1 et V_2 par f , on a alors $\rho_1 = \rho_2$ et il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda \text{Id}_V$.

Développements

- Décomposition de Dunford.
- Réduction de Frobenius.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ALGÈBRE 1, Cassini.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [4] R. Mansuy, R. Mneimné, ALGÈBRE LINÉAIRE, Vuibert.
- [5] G. Rauch, LES GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS, Ellipses.