

153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soient K un corps, E un K -espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Polynômes d'endomorphisme

1.1 L'algèbre $K[u]$

Définition 1. Pour tout $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in K[X]$, on définit $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$.

Remarque 2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P \in K[X]$, on définit de même $P(A)$, et on note que si \mathcal{B} base de E , on a $P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$.

Théorème 3. $\Phi_u \begin{cases} K[X] & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto P(u) \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres. Son image est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$, on la note $K[u]$.

Définition 4. Les éléments de $\ker(\Phi_u)$ sont appelés polynômes annulateurs de u .

Exemple 5. L'homothétie $\frac{b}{a}\text{Id}_E$ admet $aX - b$ pour polynôme annulateur.

Proposition 6. u possède toujours un polynôme annulateur.

Contre-exemple 7. C'est faux en dimension infinie : l'opérateur de dérivation sur $K[X]$ n'a pas de polynôme annulateur.

Application 8. Si P polynôme annulateur de u , on peut calculer u^k en calculant le reste de la division euclidienne de X^k par P . De plus, si $P(0) \neq 0$, alors u inversible et $u^{-1} \in K[u]$.

Définition 9. $\ker(\Phi_u)$ étant un idéal de $K[X]$ qui est un anneau principal, il est engendré par un unique polynôme unitaire. On l'appelle polynôme minimal de u , et on le note π_u .

Exemple 10. Si p est un projecteur non trivial, son polynôme minimal est $X^2 - X$.

Proposition 11. $K[u]$ est isomorphe (comme K -algèbre) à $K[X]/\pi_u$.

Corollaire 12. — Si $d = \deg(\pi_u)$, on a $\dim_K(K[u]) = d$.

- Si $\pi_u = P_1 \cdots P_r$ (produit d'irréductibles), alors $K[u]$ isomorphe à $K[X]/P_1 \times \cdots \times K[X]/P_r$.
- $K[u]$ est un corps ssi il est intègre ssi π_u est irréductible.

1.2 Endomorphismes cycliques

Définition 13. Soit $x \in E$. On définit le sous-espace cyclique de u associé à x par $\langle x \rangle_u = \{P(u)(x), P \in K[X]\}$. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \langle x \rangle_u$.

Exemple 14. Si $n = 2$ et u pas une homothétie, alors u est cyclique.

Lemme 15. Pour $x \in E$, on note $I_{u,x} = \{P \in K[X], P(u)(x) = 0_E\}$. C'est un idéal de $K[X]$, on note P_x son unique générateur unitaire. Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_u$.

Théorème 16. u est cyclique si et seulement si $\deg(\pi_u) = n$.

Définition 17. Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$ unitaire.

Sa matrice compagnon est définie par $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Proposition 18. u est cyclique si et seulement si il est représenté dans une certaine base par une matrice compagnon.

Définition 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit son polynôme caractéristique par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Proposition 20. C'est un invariant de similitude, on peut donc définir $\chi_u = \chi_A$ où A est une matrice représentant u .

Théorème 21 (Cayley-Hamilton). χ_u est un polynôme annulateur de u .

2 Réduction des endomorphismes

2.1 Lemme des noyaux

Proposition 22. Soit P polynôme annulateur de u . Alors si λ valeur propre de u , on a $P(\lambda) = 0$. De plus, si $P = \chi_u$ ou $P = \pi_u$, la réciproque est vraie.

Théorème 23 (des noyaux). Soient $P_1, \dots, P_r \in K[X]$ premiers entre eux. Alors

$$\ker \left[\left(\prod_{i=1}^r P_i \right) (u) \right] = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u)).$$

Application 24. u est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ssi π_u est scindé à racines simples. u est trigonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé ssi π_u est scindé.

Exemple 25. Un projecteur est toujours diagonalisable.
Si $K = \mathbb{F}_q$, u est diagonalisable si et seulement si $X^q - X$ annule u .

Théorème 26 (Dunford). Supposons que χ_u soit scindé sur K . Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d diagonalisable, n nilpotent, $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$. De plus, d et n sont des polynômes en f .

2.2 Réduction de Frobenius

Théorème 27. Il existe une suite F_1, \dots, F_r de sous-espaces de E , tous stables par u , tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$,
- Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, u_{F_i} est un endomorphisme cyclique de F_i ,
- Si on note P_i le polynôme minimal de u_{F_i} , on a pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $P_{i+1} | P_i$.

De plus, la suite des P_1, \dots, P_r ne dépend que de u et pas du choix de la décomposition. On a de plus $\pi_u = P_1$ et $\chi_u = P_1 \cdots P_r$.

Définition 28. Les P_1, \dots, P_r sont appelés invariants de similitude de u .

Corollaire 29. Il existe alors une base dans laquelle la matrice de u est (par blocs) $\text{diag}(\mathcal{C}(P_1), \dots, \mathcal{C}(P_r))$.

Exemple 30. La réduite de Frobenius de $\text{diag}(\mathcal{C}_{X^2}, \mathcal{C}_{X^2+1})$ est $\mathcal{C}_{X^2(X^2+1)}$.

Application 31. Deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

3 Applications

3.1 Bicommutant

Définition 32. On appelle commutant de u , et on note $\mathcal{C}(u)$, l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u . On appelle bicommutant de u l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{C}(u)$.

Exemple 33. Le commutant de $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

Proposition 34. On a toujours $\dim(\mathcal{C}(u)) \geq n$, avec égalité si et seulement si u est cyclique.

Théorème 35. Le bicommutant de u est exactement $K[u]$.

3.2 Structure du groupe linéaire

Lemme 36. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique $S_0 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = S_0^2$.

Théorème 37 (Décomposition polaire). Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$.

Remarque 38. Il y a un résultat équivalent sur \mathbb{C} :
Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $(U, H) \in U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$ tel que $A = UH$.

3.3 Exponentielle de matrices

Définition 39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On définit $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ (cette définition étant justifiée par la complétude de $\mathcal{M}_n(K)$).

Proposition 40. $\exp(A) \in K[A]$.

Proposition 41. On a :

- Si A, B commutent, $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.
- $\exp(A) \in GL_n(K)$, d'inverse $\exp(-A)$.
- $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$.
- $A \in K[\exp(A)]$.

Proposition 42. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Proposition 43. Les solutions du système différentiel $y' = Ay$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^n$ sont données par $y(t) = \exp(tA)y(0)$.

Développements

- Décomposition de Dunford.
- Réduction de Frobenius.

Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] R. Mansuy, R. Mneimné, ALGÈBRE LINÉAIRE, Vuibert.
- [3] R. Mneimné, F. Testard, INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE CLASSIQUES, Hermann.