

## 153. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soient  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### 1 Polynômes d'endomorphisme

#### 1.1 L'algèbre $K[u]$

**Définition 1.** Pour tout  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in K[X]$ , on définit  $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$ .

**Remarque 2.** Pour  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  et  $P \in K[X]$ , on définit de même  $P(A)$ , et on note que si  $\mathcal{B}$  base de  $E$ , on a  $P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$ .

**Théorème 3.**  $\Phi_u \begin{cases} K[X] & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto P(u) \end{cases}$  est un morphisme d'algèbres. Son image est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ , on la note  $K[u]$ .

**Définition 4.** Les éléments de  $\ker(\Phi_u)$  sont appelés polynômes annulateurs de  $u$ .

**Exemple 5.** L'homothétie  $\frac{b}{a}\text{Id}_E$  admet  $aX - b$  pour polynôme annulateur.

**Proposition 6.**  $u$  possède toujours un polynôme annulateur.

**Contre-exemple 7.** C'est faux en dimension infinie : l'opérateur de dérivation sur  $K[X]$  n'a pas de polynôme annulateur.

**Application 8.** Si  $P$  polynôme annulateur de  $u$ , on peut calculer  $u^k$  en calculant le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par  $P$ . De plus, si  $P(0) \neq 0$ , alors  $u$  inversible et  $u^{-1} \in K[u]$ .

**Définition 9.**  $\ker(\Phi_u)$  étant un idéal de  $K[X]$  qui est un anneau principal, il est engendré par un unique polynôme unitaire. On l'appelle polynôme minimal de  $u$ , et on le note  $\pi_u$ .

**Exemple 10.** Si  $p$  est un projecteur non trivial, son polynôme minimal est  $X^2 - X$ .

**Proposition 11.**  $K[u]$  est isomorphe (comme  $K$ -algèbre) à  $K[X]/\pi_u$ .

**Corollaire 12.** — Si  $d = \deg(\pi_u)$ , on a  $\dim_K(K[u]) = d$ .  
— Si  $\pi_u = P_1 \cdots P_r$  (produit d'irréductibles), alors  $K[u]$  isomorphe à  $K[X]/P_1 \times \cdots \times K[X]/P_r$ .  
—  $K[u]$  est un corps ssi il est intègre ssi  $\pi_u$  est irréductible.

### 1.2 Endomorphismes cycliques

**Définition 13.** Soit  $x \in E$ . On définit le sous-espace cyclique de  $u$  associé à  $x$  par  $\langle x \rangle_u = \{P(u)(x), P \in K[X]\}$ . On dit que  $u$  est cyclique s'il existe  $x \in E$  tel que  $E = \langle x \rangle_u$ .

**Exemple 14.** Si  $n = 2$  et  $u$  pas une homothétie, alors  $u$  est cyclique.

**Lemme 15.** Pour  $x \in E$ , on note  $I_{u,x} = \{P \in K[X], P(u)(x) = 0_E\}$ . C'est un idéal de  $K[X]$ , on note  $P_x$  son unique générateur unitaire. Il existe  $x \in E$  tel que  $P_x = \pi_u$ .

**Théorème 16.**  $u$  est cyclique si et seulement si  $\deg(\pi_u) = n$ .

**Définition 17.** Soit  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$  unitaire.

Sa matrice compagnon est définie par  $\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

**Proposition 18.**  $u$  est cyclique si et seulement si il est représenté dans une certaine base par une matrice compagnon.

**Définition 19.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ , on définit son polynôme caractéristique par  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ .

**Proposition 20.** C'est un invariant de similitude, on peut donc définir  $\chi_u = \chi_A$  où  $A$  est une matrice représentant  $u$ .

**Théorème 21** (Cayley-Hamilton).  $\chi_u$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

## 2 Réduction des endomorphismes

### 2.1 Lemme des noyaux

**Proposition 22.** Soit  $P$  polynôme annulateur de  $u$ . Alors si  $\lambda$  valeur propre de  $u$ , on a  $P(\lambda) = 0$ . De plus, si  $P = \chi_u$  ou  $P = \pi_u$ , la réciproque est vraie.

**Théorème 23** (des noyaux). Soient  $P_1, \dots, P_r \in K[X]$  premiers entre eux. Alors  $\ker \left[ \left( \prod_{i=1}^r P_i \right) (u) \right] = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u))$ .

**Application 24.**  $u$  est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ssi  $\pi_u$  est scindé à racines simples.  $u$  est trigonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé ssi  $\pi_u$  est scindé.

**Exemple 25.** Un projecteur est toujours diagonalisable.  
Si  $K = \mathbb{F}_q$ ,  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $X^q - X$  annule  $u$ .

**Théorème 26** (Dunford). Supposons que  $\chi_u$  soit scindé sur  $K$ . Alors il existe un unique couple  $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent,  $u = d + n$  et  $d \circ n = n \circ d$ . De plus,  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $f$ .

## 2.2 Réduction de Frobenius

**Théorème 27.** Il existe une suite  $F_1, \dots, F_r$  de sous-espaces de  $E$ , tous stables par  $u$ , tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ ,
- Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $u_{F_i}$  est un endomorphisme cyclique de  $F_i$ ,
- Si on note  $P_i$  le polynôme minimal de  $u_{F_i}$ , on a pour tout  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ,  $P_{i+1} | P_i$ .

De plus, la suite des  $P_1, \dots, P_r$  ne dépend que de  $u$  et pas du choix de la décomposition. On a de plus  $\pi_u = P_1$  et  $\chi_u = P_1 \cdots P_r$ .

**Définition 28.** Les  $P_1, \dots, P_r$  sont appelés invariants de similitude de  $u$ .

**Corollaire 29.** Il existe alors une base dans laquelle la matrice de  $u$  est (par blocs)  $\text{diag}(\mathcal{C}(P_1), \dots, \mathcal{C}(P_r))$ .

**Exemple 30.** La réduite de Frobenius de  $\text{diag}(\mathcal{C}_{X^2}, \mathcal{C}_{X^2+1})$  est  $\mathcal{C}_{X^2(X^2+1)}$ .

**Application 31.** Deux éléments de  $\mathcal{L}(E)$  sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

## 3 Applications

### 3.1 Bicommutant

**Définition 32.** On appelle commutant de  $u$ , et on note  $\mathcal{C}(u)$ , l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui commutent avec  $u$ . On appelle bicommutant de  $u$  l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les éléments de  $\mathcal{C}(u)$ .

**Exemple 33.** Le commutant de  $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$  est l'ensemble des matrices diagonales.

**Proposition 34.** On a toujours  $\dim(\mathcal{C}(u)) \geq n$ , avec égalité si et seulement si  $u$  est cyclique.

**Théorème 35.** Le bicommutant de  $u$  est exactement  $K[u]$ .

### 3.2 Structure du groupe linéaire

**Lemme 36.** Soit  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Il existe une unique  $S_0 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $S = S_0^2$ .

**Théorème 37** (Décomposition polaire). Pour tout  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique  $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $A = \Omega S$ .

**Remarque 38.** Il y a un résultat équivalent sur  $\mathbb{C}$  :  
Pour tout  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ , il existe un unique  $(U, H) \in U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$  tel que  $A = UH$ .

### 3.3 Exponentielle de matrices

**Définition 39.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . On définit  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$  (cette définition étant justifiée par la complétude de  $\mathcal{M}_n(K)$ ).

**Proposition 40.**  $\exp(A) \in K[A]$ .

**Proposition 41.** On a :

- Si  $A, B$  commutent,  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .
- $\exp(A) \in GL_n(K)$ , d'inverse  $\exp(-A)$ .
- $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$ .
- $A \in K[\exp(A)]$ .

**Proposition 42.**  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  est surjective.

**Proposition 43.** Les solutions du système différentiel  $y' = Ay$  d'inconnue  $y \in \mathbb{R}^n$  sont données par  $y(t) = \exp(tA)y(0)$ .

## Développements

- Décomposition de Dunford.
- Réduction de Frobenius.

## Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] R. Mansuy, R. Mneimné, ALGÈBRE LINÉAIRE, Vuibert.
- [3] R. Mneimné, F. Testard, INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE CLASSIQUES, Hermann.