

## 152. Déterminant. Exemples et applications.

On considère  $k$  un corps (commutatif) et  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

### 1 Généralités

#### 1.1 Formes multilinéaires alternées

**Définition 1.** Soit  $f : E^n \rightarrow k$ . On dit qu'elle est  $n$ -linéaire si, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , pour tous  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in E$ , l'application  $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  est linéaire.

**Définition 2.** Une forme  $n$ -linéaire  $f$  est dite alternée si  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  dès qu'il existe  $i \neq j$  tels que  $x_i = x_j$ .

**Proposition 3.** On a alors  $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_n)$ .

On dit alors que  $f$  est antisymétrique. Si  $\text{car}(k) \neq 2$ , toute forme  $n$ -linéaire antisymétrique est alternée.

**Proposition 4.** L'ensemble  $\Lambda_n(E)$  des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est de dimension 1.

Ainsi, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ , il existe une unique forme linéaire alternée  $f$  telle que  $f(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

**Définition 5.**  $f$  est appelée le déterminant relatif à la base  $\mathcal{B}$ , et noté  $\det_{\mathcal{B}}$ .

**Proposition 6.** Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . Alors, pour tous  $x_1, \dots, x_n \in E, \det_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ .

**Proposition 7.**  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, si et seulement si,  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

**Proposition 8.** Si  $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}e_j$ , alors  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j)j}$ .

**Théorème 9.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors il existe un unique  $\alpha \in k$  tel que, pour tout  $f \in \Lambda_n(E)$ , pour tous  $x_1, \dots, x_n \in E, f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \alpha f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Définition 10.** Ce scalaire est appelé déterminant de  $u$ , et noté  $\det(u)$ .

**Proposition 11.** Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On a  $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$ ,  $\det(\text{Id}_E) = 1$  et  $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det(u) \neq 0$ . De plus, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ , on a  $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ .

### 1.2 Déterminant d'une matrice carrée

**Définition 12.** Soit  $A$  anneau commutatif, soit  $M \in \mathcal{M}_n(A)$ . On définit  $\det(M) =$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j)j}.$$

**Proposition 13.** Si  $u \in \mathcal{L}(E), \mathcal{B}$  base de  $E$ , on a  $\det(u) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ .

**Proposition 14.** On a pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(A), \det({}^t M) = \det(M)$ .

**Théorème 15 (Cramer).** Si  $M \in GL_n(k), b \in k^n$ , le système linéaire  $Mx = b$  possède une unique solution, donnée par  $x_i = \frac{\det(M_1, \dots, M_{i-1}, b, M_{i+1}, \dots, M_n)}{\det(M)}$ .

**Définition 16.** On définit le polynôme caractéristique de  $M : \chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ .

**Proposition 17.** Les valeurs propres de  $M$  sont exactement les racines de  $\chi_M$ .

**Théorème 18 (Cayley-Hamilton).**  $\chi_M(M) = 0$ .

### 1.3 Le groupe spécial linéaire

**Proposition 19.**  $\det : GL_n(k) \rightarrow k^*$  est un morphisme de groupes.

**Définition 20.**  $\ker(\det)$  est appelé groupe spécial linéaire, et noté  $SL_n(K)$ .

**Proposition 21.**  $SL_n(k)$  est engendré par les transvections.

**Corollaire 22.** Le groupe dérivé de  $GL_n(k)$  est  $SL_n(k)$  si  $k \neq \mathbb{F}_2$  ou  $n \geq 3$ .

**Application 23 (Frobenius-Zolotarev).** Soit  $p \geq 3$  premier, soit  $u \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ .

$$\text{On a } \varepsilon(u) = \left( \frac{\det(u)}{p} \right).$$

## 2 Calcul pratique du déterminant

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(k)$ .

### 2.1 Méthodes de calcul

Les déterminants de matrices  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$  peuvent être calculés avec la définition du déterminant. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

**Proposition 24** (Opérations élémentaires). Le déterminant d'une matrice ne change pas si on ajoute à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes). Il change de signe si on permute deux lignes (resp. deux colonnes). Il est multiplié par  $\lambda$  si on multiplie une ligne ou une colonne par  $\lambda \in k$ .

L'algorithme du pivot de Gauss permet, en multipliant par des matrices triangulaires, de se ramener à une matrice triangulaire supérieure. On peut alors calculer le déterminant en utilisant que le déterminant du produit est le produit des déterminants.

**Proposition 25** (Développement). Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , on note  $\Delta_{ij}$  le déterminant de la matrice formée en supprimant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $A$ . Alors :

- Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ .
- Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ .

**Définition 26.** On appelle comatrice de  $A$  la matrice  $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{i,j}$ .

**Application 27.** On a  $A {}^t \text{com}(A) = {}^t \text{com}(A) A = \det(A) I_n$ .

**Proposition 28** (Calcul par blocs).

Si  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$  alors  $\det(M) = \det(A) \det(D)$ .

## 2.2 Déterminants classiques

Déterminant de Vandermonde :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in k, \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Déterminant circulant :

On note  $\omega = e^{2ik\pi/n}$ . Soient  $a_1, \dots, a_n \in k$ , soit  $P = a_1 + a_2 X + \dots + a_n X^{n-1}$ . Alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j).$$

## 3 Applications du déterminant

### 3.1 Orientation de l'espace

Soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ . On définit la relation  $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2 \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) > 0$ .

**Proposition 29.** C'est une relation d'équivalence, pour laquelle il existe deux classes.

### 3.2 Distance à un sous-espace

**Définition 30.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien, soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $E$ . On appelle déterminant de Gram associé à cette famille  $G(x_1, \dots, x_p) = \det((\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p})$ .

**Proposition 31.** On a  $G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$  et la famille est libre si et seulement si  $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$ .

**Théorème 32.** Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  famille libre de  $E$ , soit  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ , soit  $y \in E$ . On a  $d(y, F)^2 = \frac{G(y, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}$ .

### 3.3 Le déterminant en analyse

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la topologie de la norme.

**Proposition 33.**  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue.

**Application 34.**  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert dense de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 35.**  $\det$  est même de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\forall A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), d\det(A)H = \text{tr}({}^t \text{com}(A)H)$ .

**Application 36** (Wronskien). Soient  $y_1, \dots, y_n$  solutions du système différentiel  $y'(t) = A(t)y(t)$ , avec  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})), y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Soit  $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ . Alors  $w'(t) = \text{tr}(A(t))w(t)$ .

**Théorème 37** (Changement de variables). Soient  $U, V$  ouverts de  $\mathbb{R}^n, \varphi : U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . On a  $f \in L^1(V) \Leftrightarrow |\det(d\varphi)|f \circ \varphi \in L^1(U)$ , et alors  $\int_V f d\lambda = \int_U |\det(d\varphi)|f \circ \varphi d\lambda$ .

**Application 38.**  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

### 3.4 Calcul de volumes dans $\mathbb{R}^n$

**Proposition 39.** Soient  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $|\det(u_1, \dots, u_n)|$  est égal au volume du paralléloétope construit sur  $u_1, \dots, u_n$ .

**Théorème 40** (John-Loewner). Soit  $K$  compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en 0 contenant  $K$ .

## Développements

- Théorème de Frobenius-Zolotarev
- Ellipsoïde de John-Loewner

## Références

- [1] J. Fresnel, ALGÈBRE DES MATRICES, Hermann.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [3] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cepaduès.