

## 151. Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.

**Introduction :** On acquiert généralement assez tôt la notion d'espace à une, deux ou trois dimensions. Comment formaliser cette notion et la généraliser aux dimensions plus grandes ?

On suppose connues les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire.

### 1 Dimension d'un espace vectoriel

Soit  $K$  un corps, soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel.

#### 1.1 Familles libres, génératrices, bases

**Définition 1.** Soit  $S$  une partie de  $E$ . On appelle sous-espace engendré par  $S$ , et on note  $\text{Vect}(S)$ , le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $S$ .

**Proposition 2.**  $\text{Vect}(S)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $S$ .

**Définition 3.** Soit  $(v_1, \dots, v_p)$  une famille de  $E$ . Elle est dite génératrice si  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = E$ . Si  $E$  possède une famille génératrice finie, il est dit de type fini.

**Définition 4.** La famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est dite libre si pour tout

$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$ ,  $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ . Elle est dite liée si elle n'est pas libre.

**Proposition 5.**  $(v_1, \dots, v_p)$  est liée ssi  $\exists i \in \llbracket 1, p \rrbracket, v_i \in \text{Vect}(v_j, j \neq i)$ .

**Définition 6.** Une famille libre et génératrice est appelée base de  $E$ .

**Exemple 7.**  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  et  $\{(1, 1), (1, -1)\}$  forment des bases de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 8 (Existence).** Soit  $G$  une famille génératrice finie de  $E$ . Alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  contenue dans  $G$ .

**Théorème 9 (Base incomplète).** Supposons  $E$  de type fini et  $L$  famille libre de  $E$ . Alors il existe  $L'$  famille de  $E$  telle que  $L \cup L'$  soit une base de  $E$ .

**Lemme 10.** Si  $G$  famille génératrice finie de  $E$  contenant  $n$  éléments, toute famille possédant plus de  $n$  éléments est liée.

**Théorème 11 (Dimension).** Si  $E$  est un espace vectoriel de type fini, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que toutes les bases de  $E$  soient de cardinal  $n$ . De plus, toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à  $n$ , et toute famille génératrice est de cardinal supérieur ou égal à  $n$ .

**Définition 12.**  $n$  est appelé dimension de  $E$ , et  $E$  est dit de dimension finie.

**Exemple 13.** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle scalaire  $y'' + y = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , de base  $\{\cos, \sin\}$ .

#### 1.2 Calcul de la dimension

**Proposition 14.** Si  $E_1, E_2$  sont des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors  $E_1 \times E_2$  aussi et  $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$ .

**Exemple 15.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K^n$  est de dimension  $n$ .

**Proposition 16.** Si  $F$  de dimension finie et  $F$  sev de  $E$ , alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ , et  $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$ .

**Proposition 17 (Grassmann).** Soient  $F, G$  sev de  $E$ . Alors  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ .

**Proposition 18.** On a  $E = F \oplus G$  si et seulement si deux des trois conditions suivantes sont satisfaites :  $E = F + G$ ,  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ .

**Application 19.** Soient  $F, G$  sev de  $E$  de même dimension. Alors ils admettent un supplémentaire commun.

### 2 Applications linéaires et matrices

Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimensions finies  $n, p$ , soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

#### 2.1 Dimension et applications linéaires

**Proposition 20.** Soit  $F$  espace vectoriel, soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ .  $\varphi$  est uniquement déterminée par son image sur  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 21.**  $\varphi$  est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de  $E$  est une base de  $F$ . En particulier,  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimensions.

**Application 22.** Tout  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $K^n$ .

## 2.2 Matrice associée à une application linéaire

**Définition 23.** Soit  $(v_1, \dots, v_p)$  famille de vecteurs de  $E$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , soient  $u_{1j}, \dots, u_{nj} \in K$  tels que  $v_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} e_i$ . La matrice  $U = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  est appelée matrice de la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$  et notée  $Mat_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ .

**Proposition 24.** La famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$ , si et seulement si,  $Mat_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$  est inversible.

**Définition 25.** Dans ce cas,  $P := Mat_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$  est appelée matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ .

**Définition 26.** Si  $F$  espace de dimension finie de base  $\mathcal{C}$ , on définit la matrice de  $\varphi$  dans les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  par  $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) = Mat_{\mathcal{C}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ .

## 2.3 Rang

Soient  $E, F$  de dimensions respectives  $n, p$ , soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**Définition 27.** Soit  $(v_1, \dots, v_p) \in F$ . On appelle rang de cette famille la dimension de  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ . Si  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ , on appelle rang de  $M$  et on note  $\text{rg}(M)$  le rang de ses colonnes vues comme éléments de  $K^p$ . On appelle rang de  $\varphi$  la quantité  $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$ .

**Proposition 28.** On a  $\text{rg}({}^t M) = \text{rg}(M)$ .

**Proposition 29.** Si  $A = Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$ , alors  $\text{rg}(M) = \text{rg}(\varphi)$ .

**Théorème 30** (du rang). On a  $\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \text{rg}(\varphi)$ .

**Corollaire 31.** Si  $\dim(E) = \dim(F)$ , on a  $\varphi$  injective  $\Leftrightarrow \varphi$  surjective.

Le calcul du rang d'une matrice peut se faire par l'algorithme du pivot de Gauss.

**Proposition 32.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ . On a  $\text{rg}(M) = r$  si et seulement s'il existe  $P \in GL_p(K), Q \in GL_n(K), M = PJ_r Q$  où  $J_r \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$  possède les  $r$  premiers coefficients de sa diagonale égaux à 1 et les autres nuls.

**Proposition 33.** Le rang de  $A$  est égal à la dimension de la plus grande sous-matrice de  $A$  inversible.

## 3 Applications

### 3.1 Algorithme de Berlekamp

**Théorème 34.** Soient  $p$  premier,  $q = p^s, P \in \mathbb{F}_q[X]$  sans facteurs carrés. Soient  $d = \deg(P), x = X \pmod{P}$  dans  $\mathbb{F}_q[X]/(P)$ , soit  $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^{d-1})$  base de  $\mathbb{F}_q[X]/(P)$ . On considère l'application  $S_P \begin{cases} \mathbb{F}_q[X]/(R) & \rightarrow \mathbb{F}_q[X]/(R) \\ \overline{Q} & \mapsto \overline{Q}^q \end{cases}$ . Cette application est linéaire, et l'algorithme suivant termine et retourne la décomposition de  $P$  en facteurs irréductibles :

1. Calculer la matrice de  $S_P - \text{Id}$  dans  $\mathcal{B}$ , et calculer  $r = \dim(\ker(S_P - \text{Id})) = \deg(P) - \text{rg}(S_P - \text{Id})$ . Si  $r = 1$ , on retourne  $P$ , sinon on passe en 2.
2. On calcule  $V \in \mathbb{F}_q[X]$  tel que sa classe modulo  $P$  ne soit pas représentée par un polynôme constant, et tel que  $\overline{V} \in \ker(S_P - \text{Id})$ . On calcule, pour  $\alpha \in \mathbb{F}_q$ ,  $\text{pgcd}(P, V - \alpha)$  avec l'algorithme d'Euclide, et on retourne en 1 avec chacun des polynômes non triviaux obtenus.

### 3.2 Extensions de corps

**Définition 35.** Soit  $K$  un corps. Une extension de  $K$  est un couple  $(L, i)$  où  $L$  est un corps et  $i$  un morphisme de corps de  $K$  dans  $L$ .

**Proposition 36.**  $L$  a alors une structure de  $K$ -espace vectoriel.

**Définition 37.** Si  $\dim_K(L) < +\infty$ , on dit que l'extension est finie, et on appelle degré de l'extension la quantité  $[L : K] = \dim_K(L)$ .

**Proposition 38** (Multiplicativité des degrés). Soit  $L$  extension finie de  $K$ ,  $M$  extension finie de  $L$ . Alors  $M$  extension finie de  $K$ , et  $[M : K] = [M : L][L : K]$ .

**Définition 39.** Soit  $a \in L$ . Il est dit algébrique sur  $K$  s'il est racine d'un polynôme de  $K[X]$ .

**Proposition 40.** Si  $L$  extension finie de  $K$ , tout élément de  $L$  est algébrique sur  $K$ .

**Application 41.** Si  $a, b$  algébriques sur  $K$ , alors  $a + b$  et  $ab$  algébriques sur  $K$ .

**Théorème 42.** Soit  $K$  corps fini ou de caractéristique nulle, soit  $L$  extension de  $K$  de degré fini. Alors il existe  $x \in L, L = K(x)$ .

### 3.3 Espaces normés de dimension finie

Soit  $E$  espace vectoriel de dimension finie, soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

**Lemme 43.** Si  $E$  est muni de la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ , la boule unité de  $E$  est compacte.

**Théorème 44.** Toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

**Corollaire 45.** Toutes les applications linéaires de  $E$  sur un espace vectoriel  $F$  sont continues.

**Application 46.** *Définition de la différentielle en dimension finie.*

**Théorème 47** (Extrema liés). Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soient  $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ , soit  $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$ . Si  $f|_\Gamma$  possède un extremum relatif en  $a \in \Gamma$ , et si les formes linéaires  $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$  forment une famille libre, alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  tels que  $df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$ .

**Théorème 48** (Riesz). Un espace vectoriel normé est de dimension finie, si et seulement si, il est localement compact.

## Développements

- Algorithme de Berlekamp.
- Théorème des extrema liés.

## Références

- [1] J.-P. Escofier, THÉORIE DE GALOIS, Dunod.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [3] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ANALYSE, Ellipses.
- [4] J. Grifone, ALGÈBRE LINÉAIRE, Cepaduès.