

## 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

**Introduction :** De nombreuses propriétés d'algèbre linéaire se traduisent en termes d'actions de groupes. C'est un point de vue fécond qui permet d'obtenir des théorèmes de classification.

Soit  $K$  un corps.

### 1 Action de translation

#### 1.1 Action du groupe linéaire

On cherche à résoudre le système linéaire  $Ax = b$  où  $x \in K^n$  est l'inconnue et  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ ,  $b \in K^p$  sont donnés. Pour  $P \in GL_p(K)$ , le système est équivalent à  $PAx = Pb$ . Peut-on choisir  $P$  de façon à ce que  $PA$  soit simple ?

**Proposition 1.**  $GL_p(K)$  agit sur  $\mathcal{M}_{p,n}(K)$  par  $P \cdot A = PA$ .

**Définition 2.** Cette action est appelée action de translation à gauche.

**Définition 3.** Pour  $1 \leq i \neq j \leq p$ ,  $\lambda \neq 0$ , on pose  $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ . Pour  $1 \leq i \leq p$ ,  $\alpha \notin \{0, 1\}$ , on pose  $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$ . De telles matrices sont appelées respectivement transvections et dilatations.

**Proposition 4.** Ce sont des matrices inversibles, et multiplier à gauche par une telle matrice revient à effectuer une opération élémentaire sur les lignes.

**Définition 5.** On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul le plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en lignes si lorsqu'une ligne est nulle, toutes les suivantes sont nulles, et si le pivot de chaque ligne est strictement plus à droite que ceux des lignes précédentes. Elle est dite de plus réduite si les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

**Exemple 6.** La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est échelonnée en lignes.

**Théorème 7.**  $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$  sont dans la même orbite ssi  $\ker(A) = \ker(B)$ .

**Théorème 8.** L'ensemble des matrices échelonnées en ligne réduites forme une transversale de l'action de translation à gauche.

Le représentant échelonné en lignes réduit s'obtient avec l'algorithme du pivot de Gauss.

**Application 9.** Les transvections engendrent  $SL_n(K)$  et les transvections et dilatations engendrent  $GL_n(K)$ .

#### 1.2 Action des groupes orthogonal et unitaire

En restreignant à un sous-groupe, on voit que  $O_n(\mathbb{R})$  et  $U_n(\mathbb{C})$  agissent respectivement sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par translation à gauche.

**Théorème 10** (Décomposition polaire). Pour tout  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  (resp.  $GL_n(\mathbb{C})$ ), il existe un unique  $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$  (resp.  $(U, H) \in U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$ ) tel que  $A = \Omega S$  (resp.  $A = UH$ ). Ainsi toute matrice inversible possède dans son orbite une unique matrice symétrique ou hermitienne définie positive.

### 2 Action de Steinitz et matrices équivalentes

**Proposition 11.**  $GL_p(K) \times GL_n(K)$  agit sur  $\mathcal{M}_{p,n}(K)$  par  $(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$ .

**Définition 12.** Cette action est appelée action de Steinitz. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.

**Remarque 13.** L'action de Steinitz traduit un changement de base pour l'endomorphisme associé à la matrice.

**Théorème 14.** Si  $\text{rg}(A) = r$ , alors  $A$  est équivalente à  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ .

**Corollaire 15.**  $\{J_r, 1 \leq r \leq \min(n, p)\}$  forme une transversale sous l'action de Steinitz.

**Corollaire 16.** Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

**Application 17.** On a  $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$ .

### 3 Action de conjugaison et matrices semblables

#### 3.1 Généralités

**Proposition 18.**  $GL_n(K)$  agit sur  $\mathcal{M}_n(K)$  par  $P \cdot A = PAP^{-1}$ .

**Définition 19.** Cette action est appelée action de conjugaison. Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

**Proposition 20.** Soit  $L/K$  une extension de corps, soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ . Si elles sont dans la même orbite pour l'action de  $GL_n(L)$ , elles sont dans la même orbite pour l'action de  $GL_n(K)$ .

**Définition 21.**  $A$  est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, et trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

**Proposition 22.**  $A$  est diagonalisable ssi elle annule un polynôme scindé à racines simples, et trigonalisable ssi elle annule un polynôme scindé.

**Corollaire 23.** Pour  $K$  algébriquement clos (en particulier pour  $K = \mathbb{C}$ ), l'ensemble des matrices triangulaires supérieures fournit un système de représentants pour toutes les orbites.

### 3.2 Réduction de Jordan

**Définition 24.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On appelle bloc de Jordan de taille  $m$  la matrice  $J_m$  ayant des 1 sur la diagonale supérieure et des 0 partout ailleurs.

**Théorème 25.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent. Il existe une unique suite d'entiers  $\deg(\pi_f) = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$  et une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\text{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_r})$ .

**Corollaire 26.** Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si et seulement si ils ont la même réduite de Jordan.

**Application 27.**  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est nilpotente si et seulement si  $N$  et  $2N$  sont semblables.

**Théorème 28.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  trigonalisable, on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ses valeurs propres. Pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , il existe des suites  $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,s_j}$  telles que la matrice de  $f$  soit dans une certaine base diagonale par blocs, de blocs

$$\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,s_1}} + J_{d_{1,s_1}}, \dots, \lambda_r I_{d_{r,1}} + J_{d_{r,1}}, \dots, \lambda_r I_{d_{r,s_r}} + J_{d_{r,s_r}}$$

### 3.3 Réduction de Frobenius

**Théorème 29.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe une suite  $F_1, \dots, F_r$  de sous-espaces de  $E$ , tous stables par  $u$ , tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ ,
- Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $u_{F_i}$  est un endomorphisme cyclique de  $F_i$ ,
- Si on note  $P_i$  le polynôme minimal de  $u_{F_i}$ , on a pour tout  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ,  $P_{i+1} | P_i$ .

De plus, la suite des  $P_1, \dots, P_r$  ne dépend que de  $u$  et pas du choix de la décomposition. On a de plus  $\pi_u = P_1$  et  $\chi_u = P_1 \cdots P_r$ .

**Définition 30.** Les  $P_1, \dots, P_r$  sont appelés invariants de similitude de  $u$ .

**Corollaire 31.** Il existe alors une base dans laquelle la matrice de  $u$  est (par blocs)  $\text{diag}(\mathcal{C}(P_1), \dots, \mathcal{C}(P_r))$ .

**Exemple 32.** La réduite de Frobenius de  $\text{diag}(\mathcal{C}_{X^2}, \mathcal{C}_{X^2+1})$  est  $\mathcal{C}_{X^2(X^2+1)}$ .

**Application 33.** Les réduites de Frobenius forment une transversale pour l'action de conjugaison.

## 4 Matrices de permutation

**Définition 34.** Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . On définit sa matrice de permutation  $P_\sigma = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  par  $\forall i, j, p_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}$ .

**Proposition 35.**  $\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{M}_n(K)$  à gauche par  $\sigma \cdot M = P_\sigma M$  et à droite par  $M \cdot \sigma = M P_\sigma$ . L'action à gauche (resp. à droite) permute les lignes (resp. les colonnes) de  $M$  selon  $\sigma^{-1}$  (resp.  $\sigma$ ).

**Proposition 36.** On a alors  $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$  et  $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ .

**Théorème 37** (Décomposition de Bruhat). Soit  $\mathcal{G} = GL_n(K)$ , soit  $\mathcal{T}_s$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles à coefficients dans  $K$ .

Alors  $\mathcal{G} = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathcal{T}_s P_\sigma \mathcal{T}_s$ .

**Application 38.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , on note  $\mathcal{D}$  l'ensemble de ses drapeaux. Alors  $\mathcal{D}$  est en bijection avec  $\mathcal{G}/\mathcal{T}_s$ . De plus,  $\mathcal{G}$  agit sur  $\mathcal{G}/\mathcal{T}_s \times \mathcal{G}/\mathcal{T}_s$ , et l'ensemble des orbites s'identifie à  $\mathcal{S}_n$ .

## 5 Action de congruence

On suppose  $\text{car}(K) \neq 2$ .

**Proposition 39.**  $GL_n(K)$  agit sur  $\mathcal{S}_n(K)$  par  $P \cdot S = {}^t P S P$ .

**Définition 40.** Cette action est appelée action de congruence, deux matrices dans la même orbite sont dites congrues ou congruentes.

**Remarque 41.** Deux matrices sont congruentes si et seulement si elles représentent la même forme quadratique dans des bases différentes.

**Théorème 42.** Si  $K = \mathbb{C}$ , il y a  $n+1$  orbites, représentées par les  $J_r, r \in \{0, n-1\}$ . Ainsi, deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même rang.

**Théorème 43** (Sylvester). Si  $K = \mathbb{R}$ , il y a  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  orbites, représentées par les matrices diagonales par blocs  $\text{diag}(I_p, -I_q, 0_{n-p-q})$  avec  $p + q \leq n$ .

**Définition 44.**  $(p, q)$  est appelé signature de  $S$ .

**Application 45** (Morse). Soit  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0, soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . On suppose  $df_0 = 0$  et  $d^2f_0$  forme quadratique non dégénérée, de signature  $(p, n - p)$ . Alors il existe un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  entre deux voisinages  $U, V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(0) = 0$  et  $\forall x \in U, f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$ .

**Théorème 46.** Si  $K = \mathbb{F}_q$ , soit  $\alpha$  élément non carré dans  $\mathbb{F}_q$ . Il y a  $2n + 1$  orbites, représentées par les matrices diagonales par blocs  $\text{diag}(I_r, 0_{n-r})$  et  $\text{diag}(I_{r-1}, \alpha, 0_{n-r})$ . Ainsi, deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même rang et même déterminant.

**Application 47** (Réciprocité quadratique). Soient  $p, q \geq 3$  premiers.

Alors  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$ .

## Développements

- Décomposition de Bruhat.
- Loi de réciprocité quadratique.

## Références

- [1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, OBJECTIF AGRÉGATION, H&K.
- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.
- [3] P. Caldero, J. Germoni, HISTOIRES HÉDONISTES DE GROUPES ET DE GÉOMÉTRIES, TOME 1, Calvage & Mounet.
- [4] R. Mansuy, R. Mneimné, ALGÈBRE LINÉAIRE, Vuibert.
- [5] A. Szpirglas et al., ALGÈBRE L3, Pearson.