

## 140. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Soit  $K$  un corps.

### 1 Corps des fractions rationnelles

**Définition 1.**  $K[X]$  étant un anneau intègre, on peut définir son corps des fractions, noté  $K(X)$ , comme l'ensemble  $K[X] \times K[X] \setminus \{0\}$  quotienté par la relation d'équivalence  $(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow AD = BC$ . Il est muni des lois  $(A, B) + (C, D) = (AD + BC, BD)$  et  $(A, B) \times (C, D) = (AC, BD)$ .

**Proposition 2.**  $(K(X), +, \times, \cdot)$  est un corps et une  $K$ -algèbre. Le neutre est donné par la classe de  $(0, 1)$  et l'unité par la classe de  $(1, 1)$ . L'inverse de la classe de  $(A, B)$  est la classe de  $(B, A)$ .

**Théorème 3.** Pour tout  $F \in K(X)$ , il existe un unique  $(A_0, B_0) \in F$  tel que  $A_0 \wedge B_0 = 1$ . De plus,  $(C, D) \in F \Leftrightarrow \exists \Delta \in K[X], C = \Delta A_0, D = \Delta B_0$ .

**Définition 4.** On l'appelle représentant irréductible de  $F$  et on note  $F = \frac{A_0}{B_0}$ .

**Remarque 5.**  $K[X]$  se plonge dans  $K(X)$  par  $P \mapsto (P, 1)$ .

**Proposition 6.** Soit  $F \in K(X)$ . La quantité  $\deg(A) - \deg(B) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ne dépend pas du représentant choisi.

**Définition 7.** On l'appelle degré de  $F$  et on note  $\deg(F)$ .

**Définition 8.** Soit  $F \in K(X)$  de représentant irréductible  $\frac{A}{B}$ . On appelle racine (respectivement pôle) de  $F$  d'ordre  $k$  toute racine de  $A$  (respectivement de  $B$ ) de multiplicité  $k$ .

**Proposition 9.** Soient  $F, G \in K(X)$ . On a  $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$  et  $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$ .

**Proposition 10.** Soit  $F \in K(X)$ . La fraction  $\frac{AB' - A'B}{B^2}$  ne dépend pas du représentant  $\frac{A}{B}$  choisi.

**Définition 11.** On l'appelle fraction dérivée de  $F$ , et on la note  $F'$ .

**Proposition 12.** Le groupe des automorphismes d'algèbre de  $K(X)$  est isomorphe à  $PGL_2(K)$ .

## 2 Décomposition en éléments simples

### 2.1 Résultats théoriques

**Lemme 13.** Pour tout  $F \in K(X)$ , il existe un unique  $P \in K[X]$  tq  $\deg(F - P) < 0$ .

**Définition 14.**  $P$  est appelé partie entière de  $F$ .

**Exemple 15.** La partie entière de  $\frac{X^4 + 1}{X^2 + X + 1}$  est  $X^2 - X$ .

**Corollaire 16.** Soit  $K(X)^- = \{F \in K(X), \deg(F) < 0\}$ , on a  $K(X) = K[X] \oplus K(X)^-$ .

**Lemme 17.** Pour tout  $(A, B_1, \dots, B_n) \in K[X]^{n+1}$  avec les  $(B_i)_i$  non nuls et deux à deux premiers entre eux, il existe un unique  $n$ -uplet  $(A_1, \dots, A_n) \in K[X]^n$  tel que  $\frac{A}{B_1 \cdots B_n} = \frac{A_1}{B_1} + \dots + \frac{A_n}{B_n}$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg\left(\frac{A_i}{B_i}\right) < 0$ .

**Lemme 18.** Pour tous  $Q \in K[X] \setminus \{0\}, A \in K[X], k \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $k$ -uplet  $(A_1, \dots, A_k) \in K[X]^k$  tel que  $\frac{A}{Q^k} = \sum_{j=1}^k \frac{A_j}{Q^j}$  et  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \deg\left(\frac{A_j}{Q^j}\right) < 0$ .

**Théorème 19.** Soit  $F \in K(X)$  de forme irréductible  $\frac{A}{B}, \deg(B) \geq 1$ . On note  $B = bQ_1^{k_1} \cdots Q_n^{k_n}$  où les  $Q_i$  sont irréductibles unitaires non associés. Alors il existe une unique famille de  $k_1 + \dots + k_n + 1$  polynômes  $E, (P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k_i}}$  telle

que  $\frac{A}{B} = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j}$  et  $\forall i, j, \deg\left(\frac{P_{i,j}}{Q_i^j}\right) < 0$ .  $E$  est la partie entière de  $F$ .

**Corollaire 20.** Dans le cas du corps  $\mathbb{C}$  qui est algébriquement clos,  $Q = b(X - a_1)^{k_1} \cdots (X - a_n)^{k_n}$ , et alors il existe une unique famille de  $k_1 + \dots + k_n$  scalaires

$(\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k_i}}$  et  $E \in K[X]$  tels que  $F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j}$ .

**Corollaire 21.** Si  $K = \mathbb{R}$ ,  $F$  possède une unique écriture de la forme  $F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,r}}{(X - a_i)^r} + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{l_j} \frac{\beta_{j,s}X + \gamma_{j,s}}{(X^2 + p_jX + q_j)^s}$ .

### 2.2 Calcul pratique

Calcul de la partie entière

La partie entière  $E$  est le quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

**Exemple 22.** Dans  $\mathbb{Q}(X)$ , la partie entière de  $\frac{X^6}{(X-1)^3(X^2+1)}$  est  $X+3$ .

#### Pôle simple

Si  $B = (X-a)Q$  avec  $Q(a) \neq 0$ , alors  $F = E + \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\tilde{F}}{Q}$ . On obtient  $\lambda$  en multipliant de chaque côté par  $(X-a)$  et en évaluant en  $a$ . On obtient  $\lambda = \frac{A(a)}{B'(a)}$ .

**Exemple 23.** On a  $\frac{X^4+1}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{P}{(X^2-1)^2}$ ,  $\deg(P) < 4$ .

**Application 24.** Dans  $\mathbb{R}$ , on peut trouver la partie relative à un dénominateur de degré 2 en le factorisant sous la forme  $(X-z)(X-\bar{z})$  puis en réduisant au même dénominateur.

#### Pôle multiple

**Lemme 25** (Division selon les puissances croissantes). Soient  $A, B \in K[X]$  avec  $B(0) \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $(Q, R) \in K[X]$  tel que  $A = BQ + X^{n+1}R$  avec  $\deg(Q) \leq n$ .

Ainsi, si  $F = \frac{A}{X^k B}$  avec  $B(0) \neq 0$ , en écrivant la division selon les puissances croissantes à l'ordre  $k-1$  de  $A$  par  $B$  :  $A = (a_0 + a_1 X + \dots + a_{k-1} X^{k-1})Q + X^k R$ , la partie polaire relative au pôle 0 est  $\frac{a_0}{X^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{X}$ . Pour un pôle  $a \neq 0$ , on applique la méthode à  $G(Y) = F(Y+a)$ .

**Exemple 26.** Dans  $\mathbb{R}(X)$ ,

$$\frac{X^6}{(X-1)^4(X^2+1)} = 1 + \frac{1}{2(X-1)^4} + \frac{5}{2(X-1)^3} + \frac{19}{4(X-1)^2} + \frac{4}{X-1} + \frac{1}{4(X^2+1)}.$$

#### Utilisation de la parité

**Lemme 27.** Si  $F$  est paire ou impaire et  $a$  pôle de  $F$  de multiplicité  $k$ , alors  $-a$  est aussi pôle de  $F$  de multiplicité  $k$ .

Ainsi les parties relatives aux pôles  $a$  et  $-a$  se déduisent l'une de l'autre en évaluant en  $-X$  et en utilisant l'unicité de la décomposition en éléments simples.

## 3 Applications

### 3.1 Calculs de primitives

**Lemme 28.** Un élément simple de la forme  $x \mapsto \frac{A}{(x-a)^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  admet une primitive de la forme  $x \mapsto \frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$  si  $k \neq 1$ ,  $x \mapsto A \ln|x-a|$  si  $k = 1$ .

Le calcul de primitive d'un élément simple de la forme  $x \mapsto \frac{ax+b}{((x-p)^2+q^2)^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  se ramène à celui de  $\frac{1}{(x^2+1)^k}$ , lequel peut se faire par récurrence ou par le changement de variable  $u = \arctan(x)$ .

**Exemple 29.** Une primitive de  $f : x \mapsto \frac{x^6}{(x-1)^4(x^2+1)}$  est donnée par  $F : x \mapsto x - \frac{1}{6(x-1)^3} - \frac{5}{4(x-1)^2} - \frac{19}{4(x-1)} + 4 \ln(x-1) + \frac{1}{4} \arctan(x)$ .

#### Règles de Bioche

Si  $R \in \mathbb{R}(X)$  n'est pas un polynôme, le calcul d'une primitive de  $x \mapsto R(\cos(x), \sin(x))$  ou  $R(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))$  se ramène à celui d'une primitive d'une fraction rationnelle par changement de variables.

**Exemple 30.** Une primitive de  $x \mapsto \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}$  est donnée sur  $]0, \pi[$  par  $x \mapsto -\frac{1}{4} \cotan^4(x)$ .

### 3.2 Séries formelles et séries génératrices

**Définition 31.** On appelle série formelle à coefficients dans  $K$  toute suite d'éléments de  $K$ . On note  $K[[X]]$  l'ensemble des séries formelles, et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K[[X]]$  sera notée  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ .

**Proposition 32.**  $K[[X]]$  (muni de la somme et de la convolution) est un anneau commutatif et  $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in K[[X]]$  est inversible si et seulement si  $a_0 \neq 0$ .

**Lemme 33.** Soient  $S \in K[[X]]$ ,  $F \in K(X)$ , soient  $\frac{A}{B}$ ,  $\frac{A_0}{B_0}$  deux représentants de  $F$ . Si  $A = BS$  dans  $K[[X]]$ , alors  $A_0 = B_0 S$  dans  $K[[X]]$ .

**Définition 34.** On dit que  $S$  est un développement en série formelle de  $F$ .

**Théorème 35.**  $F$  admet un développement en série formelle si et seulement si elle n'admet pas 0 pour pôle, et ce développement est alors unique.

**Exemple 36.** Le développement en série formelle de  $\frac{1}{1-X}$  est  $\sum_{n \in \mathbb{N}} X^n$ .

**Définition 37.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ , sa série génératrice est la série formelle  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$ .

Si une série génératrice s'écrit comme fraction rationnelle, la décomposition en éléments simples permet d'obtenir des propriétés de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Application 38.** Soient  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$  premiers entre eux dans leur ensemble. Pour  $n \geq 1$ , on note  $u_n = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k, a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n\}$ . Alors

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

## Développements

- Automorphismes de  $K(X)$ .
- Problème du rendu de monnaie.

## Références

- [1] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES - TOME 1, Masson.
- [2] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES - TOME 3, Masson.