

109. Représentations de groupes finis de petit cardinal.

Introduction : La théorie des représentations a d'abord été introduite en chimie (les groupes jouant un rôle en cristallographie).

1 Théorie des représentations

Soit G un groupe fini.

1.1 Représentations linéaires

Définition 1. On appelle représentation linéaire de G la donnée d'un couple (ρ, V) où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est un morphisme de groupes. Si V est de dimension finie, sa dimension est appelée degré de la représentation.

Exemple 2. $\mathbf{1} : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto 1$ est une représentation de degré 1, appelée représentation triviale.

Exemple 3. Soit V espace de dimension $|G|$, de base $\{e_g, g \in G\}$. Alors $\rho : g \mapsto (\rho(g) : e_h \mapsto e_{gh})$ est une représentation de degré $|G|$, appelée représentation régulière.

Définition 4. On appelle sous-représentation de (ρ, V) la donnée d'un sous-espace vectoriel W de V stable par tous les $\rho(g), g \in G$. Une représentation qui ne possède pas de sous-représentation autre que $\{0\}$ et V est dite irréductible.

Exemple 5. Toute représentation de degré 1 est irréductible.

Contre-exemple 6. La représentation régulière n'est pas irréductible si $|G| \geq 2$.

Théorème 7 (Maschke). Toute sous-représentation possède un supplémentaire qui est aussi une sous-représentation.

Corollaire 8. Toute représentation linéaire se décompose comme somme directe de représentations irréductibles.

Proposition 9. Soit H sous-groupe distingué de G , soit $\bar{\rho} : G/H \rightarrow GL(V)$ une représentation de G/H , soit $\pi : G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Alors $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$ est une représentation de G , irréductible ssi $\bar{\rho}$ est irréductible.

Définition 10. Soient $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ deux représentations de G . On appelle morphisme de représentations toute application linéaire $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $\forall g \in G, \varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$. Si une telle application est de plus un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels, les représentations sont dites isomorphes.

Théorème 11 (Schur). Si $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ sont deux représentations irréductibles de G , et $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ morphisme de représentations, alors soit $\varphi = 0$, soit c'est un isomorphisme, et en identifiant V_1 et V_2 par φ , il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \lambda \text{Id}$.

1.2 Théorie des caractères

On munit $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ du produit scalaire hermitien $\langle f, h \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{h(g)}$.

Définition 12. Soit (ρ, V) une représentation de G . On appelle caractère de la représentation l'application $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$.

Remarque 13. On a $\chi_\rho(1) = \text{deg}(\rho)$.

Définition 14. On appelle fonction centrale une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ constante sur les classes de conjugaison, ie telle que $\forall g, h \in G, f(ghg^{-1}) = f(h)$.

Théorème 15.

- (i). À isomorphisme près, G possède un nombre fini de représentations irréductibles, égal au nombre de classes de conjugaison.
- (ii). Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales sur G .
- (iii). Une représentation est irréductible ssi son caractère χ vérifie $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, et deux représentations sont équivalentes ssi elles ont même caractère.
- (iv). Si on note χ_1, \dots, χ_m les caractères irréductibles, on a $|G| = \sum_{i=1}^m \chi_i(1)^2$.

Définition 16. On appelle table de caractères le tableau donnant les valeurs des caractères irréductibles sur les différentes classes de conjugaison.

Proposition 17. Ses colonnes sont orthonormées.

Théorème 18. Soit G un groupe fini dont on connaît la table de caractères, on note $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ l'ensemble de ses caractères irréductibles (deux à deux non isomorphes). Alors, si H est un sous-groupe de G , H est distingué dans G , si et seulement si, il existe $i \subseteq \llbracket 1, r \rrbracket, H = \bigcap_{i \in I} \ker(\chi_i)$ (où $\ker(\chi_i) = \{g \in G, \chi_i(g) = \chi_i(e_G)\}$).

Corollaire 19. G est simple ssi $\forall i, \forall g \in G \setminus \{1\}, \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$.

2 Étude de quelques classes de groupes

2.1 Groupes abéliens

Proposition 20. G est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

Définition 21. G est dit cyclique s'il existe $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$.

Théorème 22. Si G est cyclique d'ordre n , alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 23. La table de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est, si on note $\omega = e^{2i\pi/n}$:

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	\dots	\bar{n}
χ_1	1	1	\dots	1
χ_2	1	ω	\dots	ω^{n-1}
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
χ_n	1	ω^{n-1}	\dots	$\omega^{(n-1)(n-1)}$

Théorème 24. Si G est abélien, il existe une unique suite $d_1 | \dots | d_k$ d'entiers naturels tels que $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$.

Exemple 25. Tables de caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

	$\bar{0}$	$\bar{1}$
χ_0	1	1
χ_1	1	-1

	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$
$\chi_0\chi_0$	1	1	1	1
$\chi_0\chi_1$	1	-1	1	-1
$\chi_1\chi_0$	1	1	-1	-1
$\chi_1\chi_1$	1	-1	-1	1

2.2 Groupes diédraux

Définition 26. On appelle groupe diédral D_n le groupe des isométries du plan qui conservent le polygone régulier à n côtés.

Proposition 27. D_n contient n rotations d'angle $\frac{k\pi}{n}$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ qui forment un sous-groupe R_n isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et n symétries. De plus, si r rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s est une symétrie, on a $r^n = 1$, $s^2 = 1$, $(sr)^2 = 1$ et tout élément de D_n s'écrit de façon unique $r^k s^i$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $i \in \{0, 1\}$.

Cas n pair

Dans ce cas, les classes de conjugaison sont $\{\text{Id}\}$, $\{r^{n/2}\}$, $\{r^i, r^{-i}\}$, $i \in \llbracket 1, n/2-1 \rrbracket$, $\{r^{2j}s, j \in \llbracket 0, n/2-1 \rrbracket\}$ et $\{r^{2j+1}s, j \in \llbracket 0, n/2-1 \rrbracket\}$.

Il y a 4 caractères de degré 1, donnés par

	r^k	$r^k s$
χ_0	1	1
χ_1	1	-1
χ_2	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ_3	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$.

On pose pour $0 \leq h, k \leq n-1$, $\rho_h(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix}$, $\rho_h(r^k s) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}$.

Cela définit des représentations. Pour tout h , ρ_h, ρ_{n-h} sont isomorphes, ρ_0 et $\rho_{n/2}$ sont réductibles et les ρ_h , $1 \leq h \leq \frac{n}{2}-1$ sont irréductibles deux à deux non isomorphes, de caractère donné par $\chi_h(r^k) = 2 \cos(2\pi kh/n)$, $\chi_h(r^k s) = 0$, et on a ainsi tous les caractères irréductibles.

Cas n impair

Les classes de conjugaison sont $\{\text{Id}\}$, $\{r^i, r^{-i}\}$, $i \in \llbracket 1, n/2-1 \rrbracket$, $\{r^j s, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. Il y a 2 caractères de degré 1, donnés par

	r^k	$r^k s$
χ_0	1	1
χ_1	1	-1

Les ρ_h , $1 \leq h \leq \frac{n}{2}-1$ donnent alors tous les autres caractères irréductibles.

3 Petits groupes symétriques et alternés

3.1 Étude de \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_4

Lemme 28. Les classes de conjugaison dans \mathcal{S}_n sont données par les décompositions en produits de cycles à supports disjoints.

Proposition 29. \mathcal{S}_4 est isomorphe aux isométries préservant le tétraèdre et aux isométries directes préservant le cube.

On a ainsi les tables de \mathcal{S}_3 et \mathcal{S}_4 :

	Id	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ'_s	3	-1	0	1	-1
χ_t	2	0	-1	0	2

3.2 Étude de \mathcal{A}_4

Les classes de conjugaison de \mathcal{A}_4 sont $\{\text{Id}\}$, $V_4 = \{\text{Bitranspositions}\}$, $\{(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 2), (2, 4, 3)\}$, $\{(1, 3, 2), (1, 2, 4), (1, 4, 3), (2, 3, 4)\}$. V_4 est distingué dans \mathcal{A}_4 et $\mathcal{A}_4/V_4 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On déduit de la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et de l'orthogonalité des caractères la table de \mathcal{A}_4 :

	Id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	j	j^2
χ'_1	1	1	j^2	j
χ_2	3	-1	0	0

4 Groupes d'ordre 8

Proposition 30. Les seuls groupes d'ordre 8 sont, à isomorphisme près, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, D_4 et \mathbb{H}_8 .

On obtient la table de caractères de \mathbb{H}_8 en notant que $\{-1, 1\}$ est un sous-groupe distingué et que $\mathbb{H}_8/\{-1, 1\}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

	1	-1	i	j	k
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	-1	1
χ'_1	1	1	1	-1	-1
χ''_1	1	1	-1	1	-1
χ_2	2	-2	0	0	0

Bien qu'ils ne soient pas isomorphes, D_4 et \mathbb{H}_8 ont la même table.

Développements

- Tables de caractères de D_4 et \mathbb{H}_8 .
- Table de caractères de \mathcal{S}_4 .

Références

- [1] G. Peyré, L'ALGÈBRE DISCRÈTE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER, Ellipses.
- [2] G. Rauch, LES GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS, Ellipses.
- [3] F. Ulmer, THÉORIE DES GROUPES, Ellipses.