

107. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Introduction : Les représentations ont d'abord été introduites en chimie pour l'étude des structures cristallines, avant que leur théorie soit étendue.

Soit G un groupe fini.

1 Représentations de groupes

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle représentation linéaire du groupe G la donnée d'un \mathbb{C} -espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$. La représentation est dite fidèle si ρ est injectif.

Remarque 2. Cela revient à se donner une action de G sur V compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Définition 3. Lorsque V est de dimension finie, sa dimension est appelée degré de la représentation.

Proposition 4. Si (ρ, V) représentation de G de degré fini, alors pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.

Définition 5. Si $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ sont deux représentations de G , on appelle morphisme de représentations toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ tel que $\forall g \in G, f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$. Si f est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on dit que les représentations sont isomorphes.

1.2 Exemples et construction de représentations

Exemple 6. Pour tout espace vectoriel V , on définit la représentation triviale par $\rho(g) = \text{Id}_V$.

Exemple 7. $\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ définit une représentation de degré 1 de \mathcal{S}_n .

Exemple 8. \mathcal{S}_4 est isomorphe au groupe des isométries de l'espace qui stabilisent le tétraèdre régulier. Cela définit une représentation de degré 3 de \mathcal{S}_4 .

Exemple 9. On appelle $V = \mathbb{C}G$ l'espace vectoriel de base $\{e_h, h \in G\}$. On définit une représentation $G \rightarrow GL(V)$ par $\rho(g) : e_h \mapsto e_{gh}$, appelée représentation régulière. C'est une représentation fidèle.

Définition 10. Si $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ sont deux représentations de G , on définit la représentation somme directe sur $V_1 \oplus V_2$ par $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \rho_1(g) + \rho_2(g)$.

Proposition 11. Soient H sous-groupe distingué de G , $\bar{\rho} : G/H \rightarrow GL(V)$ une représentation de G/H , $\pi : G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Alors $\rho := \bar{\rho} \circ \pi$ définit une représentation de G .

1.3 Sous-représentations et représentations irréductibles

Définition 12. Si (ρ, g) est une représentation de G , on appelle sous-représentation un sous-espace vectoriel W de V stable par tous les $\rho(g), g \in G$. (ρ, V) est dite irréductible si elle ne possède pas de sous-représentation autre que $\{0\}$ et V .

Exemple 13. Si $|G| \geq 2$, la représentation régulière possède toujours une sous-représentation, engendrée par $\sum_{h \in G} e_h$.

Exemple 14. Les représentations de degré 1 sont irréductibles.

Proposition 15. Si G est abélien, les seules représentations irréductibles sont celles de degré 1.

Proposition 16. Si H sous-groupe distingué de G et que $\bar{\rho} : G/H \rightarrow GL(V)$ est une représentation irréductible, alors la représentation $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$ est irréductible.

Théorème 17 (Schur). Soient $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ deux représentations irréductibles de G , soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ un morphisme de représentations. Alors, soit $f = 0$, soit c'est un isomorphisme. En identifiant V_1 et V_2 par f , on a alors $\rho_1 = \rho_2$ et il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = \lambda \text{Id}_V$.

Théorème 18 (Maschke). Si (ρ, V) représentation de degré fini de G , V est somme directe de sous-représentations irréductibles.

2 Caractères des représentations linéaires

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 19. On appelle fonction centrale toute fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\forall g, h \in G, f(ghg^{-1}) = f(h)$. On note $\mathcal{F}^{cent}(G, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions centrales sur G .

Définition 20. Si (ρ, V) représentation de G , on définit son caractère $\chi_\rho : g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$. On parle de caractère irréductible pour désigner le caractère d'une représentation irréductible.

Exemple 21. Le caractère de la représentation régulière est donné par $\chi(g) = |G|$ si $g = 1$, $\chi(g) = 0$ sinon.

Proposition 22. Les caractères sont des fonctions centrales sur G .

Proposition 23. Soient $(\rho, V), (\rho', V')$ deux représentations de G . On a :

- $\chi_\rho(1) = \dim(V)$.
- $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
- Si les représentations sont isomorphes, alors $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.
- $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$.

2.2 Orthogonalité des caractères

On munit $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ du produit scalaire hermitien $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$.

Proposition 24. Les caractères irréductibles forment une famille orthonormée.

Corollaire 25. Le nombre de caractères irréductibles est majoré par le nombre de classes de conjugaison de G .

Théorème 26. Une représentation est irréductible ssi son caractère χ vérifie $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. De plus, deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère.

Théorème 27. Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de $\mathcal{F}^{cent}(G, \mathbb{C})$.

Corollaire 28. Il y en a donc autant que de classes de conjugaison.

2.3 Tables de caractères

Définition 29. On appelle table de caractères de G le tableau donnant les valeurs des différents caractères de G sur les différentes classes de conjugaison.

Théorème 30. Les différentes colonnes de la table de caractères sont orthonormées (pour le produit scalaire usuel de \mathbb{C}^N).

Exemple 31. Tables de caractères de $\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (en annexe).

Théorème 32. Soit G un groupe fini dont on connaît la table de caractères, on note $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ l'ensemble de ses caractères irréductibles (deux à deux non isomorphes). Alors, si H est un sous-groupe de G , H est distingué dans G , si et seulement si, il existe $i \subseteq \llbracket 1, r \rrbracket$, $H = \bigcap_{i \in I} \ker(\chi_i)$ (où $\ker(\chi_i) = \{g \in G, \chi_i(g) = \chi_i(e_G)\}$).

Corollaire 33. G est simple ssi $\forall i, \forall g \in G \setminus \{1\}, \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$.

3 Cas des groupes abéliens

On suppose G abélien.

3.1 Dual d'un groupe abélien

Définition 34. L'ensemble des caractères (de degré 1) de G est appelé dual de G , et noté \widehat{G} .

Théorème 35. \widehat{G} forme une base orthonormée de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$.

Théorème 36. Supposons G cyclique, soit g générateur de G , soit ω une racine primitive n -ème de l'unité. Alors $\widehat{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$ où pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\chi_j : g^k \mapsto \omega^{jk}$. En particulier, G et \widehat{G} sont isomorphes.

Remarque 37. L'isomorphisme n'est pas canonique, car il dépend du choix de ω .

Proposition 38. Si H, K sont deux groupes abéliens, alors $\widehat{H \times K}$ est isomorphe à $\widehat{H} \times \widehat{K}$.

Corollaire 39. On a alors encore $G \simeq \widehat{\widehat{G}}$.

Théorème 40. G et $\widehat{\widehat{G}}$ sont canoniquement isomorphes via $g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$.

3.2 Application : transformée de Fourier discrète

Remarque 41. \widehat{G} formant une base orthonormée de $\mathcal{F}(G)$, toute fonction $f \in \mathcal{F}(G)$ peut s'écrire $f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c_\chi(f) \chi$ avec $c_\chi(f) = \langle f, \chi \rangle$.

Définition 42. On appelle alors la transformée de Fourier de f l'application $\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}, \chi \mapsto |G| c_\chi(f) = \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(g)}$.

Proposition 43 (Inversion). On a alors $f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi$.

On se place désormais sur le groupe cyclique $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On note $\omega_N = e^{2i\pi/N}$, et on rappelle que les caractères de G sont les $\chi_k : n \mapsto e^{2ikn\pi/N} = \omega_N^{kn}, 0 \leq k \leq n-1$. On notera $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(\chi_k)$.

Définition 44. On appelle transformée de Fourier de $f = (f(n))_{0 \leq n \leq N}$ le vecteur $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}}$. On définit ainsi la transformée de Fourier comme une application $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$.

On a ainsi $\widehat{f}(k) = \sum_{n=0}^N f(n)\omega_N^{-nk}$.

Lemme 45.

Pour $x \in \mathbb{C}$, on définit la matrice de Vandermonde

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & x^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^{(N-1)} & \dots & x^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}. \text{ Alors } V(\omega_N^{-1}) \text{ a pour inverse } \frac{1}{N}V(\omega_N).$$

Remarque 46. Le calcul de la transformée de Fourier d'un échantillon $(f(k))_{0 \leq k \leq N-1}$ revient à faire le produit par $V(\omega_N^{-1})$. Ce calcul nécessite donc $O(N^2)$ opérations. L'inversion est donc également possible en le même nombre d'opérations. Il existe en fait un algorithme (dit FFT) permettant le calcul en $O(N \log(N))$ opérations.

Annexe

Table de caractères de \mathcal{S}_3 :

	<i>Id</i>	(1 2)	(1 2 3)
χ_1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1
χ_t	2	0	-1

Table de caractères de \mathcal{S}_4 :

	<i>Id</i>	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ'_s	3	-1	0	1	-1
χ_t	2	0	-1	0	2

Table de caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

Développements

- Table de caractères de \mathcal{S}_4 .
- Tables de caractères et sous-groupes distingués.

Références

- [1] G. Peyré, L'ALGÈBRE DISCRÈTE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER, Ellipses.
- [2] G. Rauch, LES GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS, Ellipses.