

## 107. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

**Introduction :** Les représentations ont d'abord été introduites en chimie pour l'étude des structures cristallines, avant que leur théorie soit étendue.

Soit  $G$  un groupe fini.

### 1 Représentations de groupes

#### 1.1 Définitions

**Définition 1.** On appelle représentation linéaire du groupe  $G$  la donnée d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et d'un morphisme de groupes  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . La représentation est dite fidèle si  $\rho$  est injectif.

**Remarque 2.** Cela revient à se donner une action de  $G$  sur  $V$  compatible avec la structure d'espace vectoriel.

**Définition 3.** Lorsque  $V$  est de dimension finie, sa dimension est appelée degré de la représentation.

**Proposition 4.** Si  $(\rho, V)$  représentation de  $G$  de degré fini, alors pour tout  $g \in G$ ,  $\rho(g)$  est diagonalisable.

**Définition 5.** Si  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  sont deux représentations de  $G$ , on appelle morphisme de représentations toute application linéaire  $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$  tel que  $\forall g \in G, f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$ . Si  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on dit que les représentations sont isomorphes.

#### 1.2 Exemples et construction de représentations

**Exemple 6.** Pour tout espace vectoriel  $V$ , on définit la représentation triviale par  $\rho(g) = \text{Id}_V$ .

**Exemple 7.**  $\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$  définit une représentation de degré 1 de  $\mathcal{S}_n$ .

**Exemple 8.**  $\mathcal{S}_4$  est isomorphe au groupe des isométries de l'espace qui stabilisent le tétraèdre régulier. Cela définit une représentation de degré 3 de  $\mathcal{S}_4$ .

**Exemple 9.** On appelle  $V = \mathbb{C}G$  l'espace vectoriel de base  $\{e_h, h \in G\}$ . On définit une représentation  $G \rightarrow GL(V)$  par  $\rho(g) : e_h \mapsto e_{gh}$ , appelée représentation régulière. C'est une représentation fidèle.

**Définition 10.** Si  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  sont deux représentations de  $G$ , on définit la représentation somme directe sur  $V_1 \oplus V_2$  par  $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \rho_1(g) + \rho_2(g)$ .

**Proposition 11.** Soient  $H$  sous-groupe distingué de  $G$ ,  $\bar{\rho} : G/H \rightarrow GL(V)$  une représentation de  $G/H$ ,  $\pi : G \rightarrow G/H$  la projection canonique. Alors  $\rho := \bar{\rho} \circ \pi$  définit une représentation de  $G$ .

#### 1.3 Sous-représentations et représentations irréductibles

**Définition 12.** Si  $(\rho, g)$  est une représentation de  $G$ , on appelle sous-représentation un sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$  stable par tous les  $\rho(g), g \in G$ .  $(\rho, V)$  est dite irréductible si elle ne possède pas de sous-représentation autre que  $\{0\}$  et  $V$ .

**Exemple 13.** Si  $|G| \geq 2$ , la représentation régulière possède toujours une sous-représentation, engendrée par  $\sum_{h \in G} e_h$ .

**Exemple 14.** Les représentations de degré 1 sont irréductibles.

**Proposition 15.** Si  $G$  est abélien, les seules représentations irréductibles sont celles de degré 1.

**Proposition 16.** Si  $H$  sous-groupe distingué de  $G$  et que  $\bar{\rho} : G/H \rightarrow GL(V)$  est une représentation irréductible, alors la représentation  $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$  est irréductible.

**Théorème 17 (Schur).** Soient  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  deux représentations irréductibles de  $G$ , soit  $f : V_1 \rightarrow V_2$  un morphisme de représentations. Alors, soit  $f = 0$ , soit c'est un isomorphisme. En identifiant  $V_1$  et  $V_2$  par  $f$ , on a alors  $\rho_1 = \rho_2$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $f = \lambda \text{Id}_V$ .

**Théorème 18 (Maschke).** Si  $(\rho, V)$  représentation de degré fini de  $G$ ,  $V$  est somme directe de sous-représentations irréductibles.

## 2 Caractères des représentations linéaires

#### 2.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 19.** On appelle fonction centrale toute fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant  $\forall g, h \in G, f(ghg^{-1}) = f(h)$ . On note  $\mathcal{F}^{cent}(G, \mathbb{C})$  l'ensemble des fonctions centrales sur  $G$ .

**Définition 20.** Si  $(\rho, V)$  représentation de  $G$ , on définit son caractère  $\chi_\rho : g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$ . On parle de caractère irréductible pour désigner le caractère d'une représentation irréductible.

**Exemple 21.** Le caractère de la représentation régulière est donné par  $\chi(g) = |G|$  si  $g = 1$ ,  $\chi(g) = 0$  sinon.

**Proposition 22.** Les caractères sont des fonctions centrales sur  $G$ .

**Proposition 23.** Soient  $(\rho, V), (\rho', V')$  deux représentations de  $G$ . On a :

- $\chi_\rho(1) = \dim(V)$ .
- $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ .
- Si les représentations sont isomorphes, alors  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .
- $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ .

## 2.2 Orthogonalité des caractères

On munit  $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$  du produit scalaire hermitien  $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$ .

**Proposition 24.** Les caractères irréductibles forment une famille orthonormée.

**Corollaire 25.** Le nombre de caractères irréductibles est majoré par le nombre de classes de conjugaison de  $G$ .

**Théorème 26.** Une représentation est irréductible ssi son caractère  $\chi$  vérifie  $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ . De plus, deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère.

**Théorème 27.** Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de  $\mathcal{F}^{cent}(G, \mathbb{C})$ .

**Corollaire 28.** Il y en a donc autant que de classes de conjugaison.

## 2.3 Tables de caractères

**Définition 29.** On appelle table de caractères de  $G$  le tableau donnant les valeurs des différents caractères de  $G$  sur les différentes classes de conjugaison.

**Théorème 30.** Les différentes colonnes de la table de caractères sont orthonormées (pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{C}^N$ ).

**Exemple 31.** Tables de caractères de  $\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (en annexe).

**Théorème 32.** Soit  $G$  un groupe fini dont on connaît la table de caractères, on note  $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$  l'ensemble de ses caractères irréductibles (deux à deux non isomorphes). Alors, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ ,  $H$  est distingué dans  $G$ , si et seulement si, il existe  $i \subseteq \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $H = \bigcap_{i \in I} \ker(\chi_i)$  (où  $\ker(\chi_i) = \{g \in G, \chi_i(g) = \chi_i(e_G)\}$ ).

**Corollaire 33.**  $G$  est simple ssi  $\forall i, \forall g \in G \setminus \{1\}, \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$ .

## 3 Cas des groupes abéliens

On suppose  $G$  abélien.

### 3.1 Dual d'un groupe abélien

**Définition 34.** L'ensemble des caractères (de degré 1) de  $G$  est appelé dual de  $G$ , et noté  $\widehat{G}$ .

**Théorème 35.**  $\widehat{G}$  forme une base orthonormée de  $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ .

**Théorème 36.** Supposons  $G$  cyclique, soit  $g$  générateur de  $G$ , soit  $\omega$  une racine primitive  $n$ -ème de l'unité. Alors  $\widehat{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$  où pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\chi_j : g^k \mapsto \omega^{jk}$ . En particulier,  $G$  et  $\widehat{G}$  sont isomorphes.

**Remarque 37.** L'isomorphisme n'est pas canonique, car il dépend du choix de  $\omega$ .

**Proposition 38.** Si  $H, K$  sont deux groupes abéliens, alors  $\widehat{H \times K}$  est isomorphe à  $\widehat{H} \times \widehat{K}$ .

**Corollaire 39.** On a alors encore  $G \simeq \widehat{\widehat{G}}$ .

**Théorème 40.**  $G$  et  $\widehat{\widehat{G}}$  sont canoniquement isomorphes via  $g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$ .

### 3.2 Application : transformée de Fourier discrète

**Remarque 41.**  $\widehat{G}$  formant une base orthonormée de  $\mathcal{F}(G)$ , toute fonction  $f \in \mathcal{F}(G)$  peut s'écrire  $f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c_\chi(f) \chi$  avec  $c_\chi(f) = \langle f, \chi \rangle$ .

**Définition 42.** On appelle alors la transformée de Fourier de  $f$  l'application  $\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}, \chi \mapsto |G| c_\chi(f) = \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(g)}$ .

**Proposition 43 (Inversion).** On a alors  $f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi$ .

On se place désormais sur le groupe cyclique  $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . On note  $\omega_N = e^{2i\pi/N}$ , et on rappelle que les caractères de  $G$  sont les  $\chi_k : n \mapsto e^{2ikn\pi/N} = \omega_N^{kn}, 0 \leq k \leq n-1$ . On notera  $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(\chi_k)$ .

**Définition 44.** On appelle transformée de Fourier de  $f = (f(n))_{0 \leq n \leq N}$  le vecteur  $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ . On définit ainsi la transformée de Fourier comme une application  $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ .

On a ainsi  $\widehat{f}(k) = \sum_{n=0}^N f(n)\omega_N^{-nk}$ .

**Lemme 45.**

Pour  $x \in \mathbb{C}$ , on définit la matrice de Vandermonde

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & x^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^{(N-1)} & \dots & x^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}. \text{ Alors } V(\omega_N^{-1}) \text{ a pour inverse } \frac{1}{N}V(\omega_N).$$

**Remarque 46.** Le calcul de la transformée de Fourier d'un échantillon  $(f(k))_{0 \leq k \leq N-1}$  revient à faire le produit par  $V(\omega_N^{-1})$ . Ce calcul nécessite donc  $O(N^2)$  opérations. L'inversion est donc également possible en le même nombre d'opérations. Il existe en fait un algorithme (dit FFT) permettant le calcul en  $O(N \log(N))$  opérations.

## Annexe

Table de caractères de  $\mathcal{S}_3$  :

	$Id$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_\varepsilon$	1	-1	1
$\chi_t$	2	0	-1

Table de caractères de  $\mathcal{S}_4$  :

	$Id$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_\varepsilon$	1	-1	1	-1	1
$\chi_s$	3	1	0	-1	-1
$\chi'_s$	3	-1	0	1	-1
$\chi_t$	2	0	-1	0	2

Table de caractères de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  :

	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$\chi_1$	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1	-1
$\chi_3$	1	1	-1	-1
$\chi_4$	1	-1	-1	1

## Développements

- Table de caractères de  $\mathcal{S}_4$ .
- Tables de caractères et sous-groupes distingués.

## Références

- [1] G. Peyré, L'ALGÈBRE DISCRÈTE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER, Ellipses.
- [2] G. Rauch, LES GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS, Ellipses.