

106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Soient K un corps et E un K -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Le groupe linéaire

1.1 Généralités

Définition 1. On appelle groupe linéaire de E , et on note $GL(E)$, l'ensemble des endomorphismes bijectifs de E . On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans K .

Proposition 2. Ce sont des groupes, respectivement pour la composition et le produit matriciel, et ils sont isomorphes.

Proposition 3. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.

Contre-exemple 4. $d : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P'$ surjectif non bijectif.
 $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto XP$ est injectif non bijectif.

Proposition 5. $f \in GL(E)$ ssi l'image d'une base de E par f est une base de E .

Application 6. $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est d'ordre $\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$.

1.2 Générateurs

Proposition 7. $\det : GL_n(K) \rightarrow K^*$ est un morphisme de groupes.

Définition 8. On appelle groupe spécial linéaire le sous-groupe $SL_n(K) = \ker(\det) = \{A \in GL_n(K), \det(A) = 1\}$.

Définition 9. Soient H un hyperplan de E , D un supplémentaire de H , $\lambda \neq 1$. On appelle dilatation d'hyperplan H , de droite D et de rapport λ un automorphisme $u \in GL(E)$ tel que $H = \ker(u - \text{Id}), D = \ker(u - \lambda \text{Id})$.

Proposition 10. Soit $u \in GL(E)$ fixant un hyperplan H . On a équivalence entre : (i). u dilatation, (ii). $\lambda := \det(u) \neq 1$, (iii). u possède une valeur propre distincte de 1 et u diagonalisable, (iv). $\text{Im}(u - \text{Id}) \not\subset H$, (v). u a pour matrice $\text{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$ dans une certaine base.

Corollaire 11. Deux dilatations sont conjuguées ssi elles ont même rapport.

Définition 12. On appelle transvection un élément de $SL(E)$ distinct de Id_E fixant un hyperplan.

Proposition 13. Soit $u \in GL(E)$ fixant un hyperplan $H = \ker(\varphi)$. On a équivalence entre : (i). u transvection, (ii). $\exists a \in H, \forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x)a$, (iii). u non diagonalisable, (iv). $\text{Im}(u - \text{Id}) \neq \{0\}$ et $\text{Im}(u - \text{Id}) \subset H$, (v). u a pour matrice $I_n + E_{n-1,n}$ dans une certaine base.

Proposition 14. Deux transvections sont conjuguées dans $GL(E)$, et dans $SL(E)$ si $\dim(E) \geq 3$.

Théorème 15. $SL(E)$ est engendré par les transvections, et $GL(E)$ par les transvections et les dilatations.

2 Exemples de sous-groupes

2.1 Centre et groupe dérivé

Théorème 16. Le centre de $GL_n(K)$ est l'ensemble des homothéties K^*I_n . Le centre de $SL_n(K)$ est $\{\lambda I_n, \lambda^n = 1\}$.

Définition 17. $GL_n(K)/Z(GL_n(K))$ (resp. $SL_n(K)/Z(SL_n(K))$) est appelé groupe projectif linéaire (resp. groupe projectif spécial linéaire), et noté $PGL_n(K)$ (resp. $PSL_n(K)$).

Proposition 18. $PGL_2(K)$ est isomorphe à $GL(K(X))$.

Théorème 19. On suppose $n \geq 3$ ou $\text{car}(K) > 3$. Alors $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$ admettent tous deux comme groupe dérivé $SL_n(K)$.

Application 20 (Frobenius-Zolotarev). Soit $p \geq 3$ premier, soit $u \in GL_n(\mathbb{F}_p)$.

Sa signature est donnée par $\varepsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$.

Proposition 21. Si $n \geq 3$, $PSL_n(K)$ est simple.

2.2 Groupe orthogonal

On suppose ici $\text{car}(K) \neq 2$.

Définition 22. Soit q forme quadratique non dégénérée. On définit son groupe orthogonal $\{u \in GL(E), q \circ u = q\}$.

Ainsi, si dans une certaine base, S est la matrice de q et U celle de u , $u \in O(q)$ ssi ${}^tUSU = S$.

Corollaire 23. Si $u \in O(q)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Théorème 24. Si q est la forme quadratique euclidienne, alors $O(q)$ est constitué des endomorphismes ayant une matrice de la forme $\text{diag}(I_r, -I_s, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_k})$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

2.3 Quelques sous-groupes finis

Théorème 25 (Burnside). Un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini ssi il est d'exposant fini.

Définition 26. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Proposition 27. $\{P_\sigma, \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ forme un sous-groupe de $GL_n(K)$ isomorphe à \mathcal{S}_n .

Proposition 28. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Remarque 29. Multiplier $A \in \mathcal{M}_n(K)$ par P_σ à gauche (resp. à droite) revient à permuter les lignes (resp. les colonnes) de A selon σ^{-1} (resp. σ).

Théorème 30 (Bruhat). Soit \mathcal{T}_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles à coefficients dans K . Alors $\mathcal{G} = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathcal{T}_s P_\sigma \mathcal{T}_s$.

3 Actions de $GL(E)$ et $GL_n(K)$

3.1 Actions sur les sous-espaces vectoriels de E

Proposition 31. $GL(E)$ agit transitivement sur E par $\varphi \cdot x = \varphi(x)$.

Définition 32. On appelle drapeau de E une famille de sous-espaces vectoriels (E_0, \dots, E_n) vérifiant $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_n = E$. On note \mathcal{D} l'ensemble des drapeaux.

Proposition 33. $GL(E)$ agit transitivement sur \mathcal{D} par $\varphi \cdot (E_0, \dots, E_n) = (\varphi(E_0), \dots, \varphi(E_n))$.

Corollaire 34. \mathcal{D} est en bijection avec $\mathcal{G}/\mathcal{T}_s$.

Proposition 35. \mathcal{G} agit sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et l'ensemble des orbites s'identifie à \mathcal{S}_n .

3.2 Actions sur des ensembles de matrices

Proposition 36. $GL_n(K)$ agit sur $\mathcal{M}_n(K)$ par $P \cdot A = PAP^{-1}$.

Définition 37. Cette action est appelée action de conjugaison. Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

Théorème 38. Soit E un K -espace vectoriel de dimension n , soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite F_1, \dots, F_r de sous-espaces de E , tous stables par u , tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$,
- Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, u_{F_i} est un endomorphisme cyclique de F_i ,
- Si on note P_i le polynôme minimal de u_{F_i} , on a pour tout $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $P_{i+1} | P_i$.

De plus, la suite des P_1, \dots, P_r ne dépend que de u et pas du choix de la décomposition. On a de plus $\pi_u = P_1$ et $\chi_u = P_1 \cdots P_r$.

Définition 39. Les P_1, \dots, P_r sont appelés invariants de similitude de u .

Corollaire 40. Il existe alors une base dans laquelle la matrice de u est (par blocs) $\text{diag}(C_{P_1}, \dots, C_{P_r})$ (où C_P est la matrice de Frobenius de P).

Exemple 41. La réduite de Frobenius de $\text{diag}(C_{X^2}, C_{X^2+1})$ est $C_{X^2(X^2+1)}$.

Application 42. Les réduites de Frobenius forment une transversale pour l'action de conjugaison.

On suppose $\text{car}(K) \neq 2$.

Proposition 43. $GL_n(K)$ agit sur $S_n(K)$ par $P \cdot S = {}^t P S P$.

Définition 44. Cette action est appelée action de congruence, deux matrices dans la même orbite sont dites congrues ou congruentes.

Remarque 45. Deux matrices sont congruentes si et seulement si elles représentent la même forme quadratique dans des bases différentes.

Théorème 46. Si $K = \mathbb{C}$, il y a $n+1$ orbites, représentées par les $J_r, r \in \{0, n-1\}$. Ainsi, deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même rang.

Théorème 47 (Sylvester). Si $K = \mathbb{R}$, il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ orbites, représentées par les matrices diagonales par blocs $\text{diag}(I_p, -I_q, 0_{n-p-q})$ avec $p+q \leq n$.

Définition 48. (p, q) est appelé signature de S .

Application 49 (Morse). Soit U ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On suppose $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ forme quadratique non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ entre deux voisinages U, V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in U, f(x) = f(0) + \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$.

4 Éléments de topologie

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la topologie normée.

4.1 Densité

Proposition 50. $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Application 51. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Application 52. \det est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $d(\det)(A)H = \text{tr}({}^t\text{Com}(A)H)$.

4.2 Connexité

Proposition 53. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Proposition 54. Le seul sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ ouvert est lui-même.

Application 55. $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Proposition 56. La composante connexe de I_n dans un sous-groupe H de $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de H .

Application 57. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

4.3 Compacité

Proposition 58. $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Théorème 59. Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est contenu dans le groupe orthogonal d'une forme quadratique définie positive.

Développements

- Théorème de Frobenius-Zolotarev.
- Décomposition de Bruhat et application aux drapeaux.
- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

Références

- [1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ALGÈBRE 1, 2, 3, Cassini.

- [2] X. Gourdon, LES MATHS EN TÊTE - ALGÈBRE, Ellipses.

- [3] I. Nourdin, AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES - ÉPREUVE ORALE, Dunod.

- [4] A. Szpirglas et al., ALGÈBRE L3, Pearson.