

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Nicolas Relun**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Approche multiparamétrique  
pour la conception robuste en fatigue**

Soutenue à Cachan le 12 décembre 2011 devant le jury composé de :

Pierre Villon	Professeur, UTC	Président du jury
Jean-Yves Cognard	Professeur, ENSTA Bretagne	Rapporteur
Francisco Chinesta	Professeur, École Centrale de Nantes	Rapporteur
Mansour Afzali	Ingénieur, Cetim	Examineur
Pierre-Alain Boucard	Professeur, Paris XI	Directeur de thèse
David Néron	Maître de conférences, ENS Cachan	Co-encadrant

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



Je voudrais remercier l'ensemble des personnes qui m'ont permis de réaliser ce travail dans d'excellentes conditions, notamment :

- les membres de mon jury : Pierre Villon qui a été un fantastique président du jury, Francisco Chinesta et Jean-yves Cognard qui ont été de consciencieux rapporteurs et Mansour Afzali en tant qu'examineur ;
- Pierre-alain Boucard qui a été un directeur de thèse toujours à l'écoute, disponible et attentif ;
- David Néron qui a été un encadrant parfait, n'hésitant pas à mettre les mains dans le cambouis des équations, toujours de bonne humeur ;
- Pierre Ladevèze pour ses conseils très avisés ;
- Hugo Leclerc et Raphael Pasquier pour leur aide indispensable dans le développement logiciel ;
- l'ensemble des responsables du centre de calcul qui nous permettent de geeker nuit et jour ;
- Vincent Roulet sans qui ce manuscrit ne respecterait pas les conventions de la langue de Molière.

Je remercie plus généralement l'ensemble des membres du LMT qui ont fait de ces trois années un moment inoubliable avec une mention spéciale pour : Camillou, Fricou, Bibou, Loulou pour les ou, OP, Manue, Renault, Flavoun... Merci à tous.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
<b>1 Méthodes pour la propagation des incertitudes</b>	<b>1</b>
1 Introduction . . . . .	2
2 Modélisation probabiliste des incertitudes . . . . .	3
2.1 Espace probabilisé . . . . .	3
2.2 Variable aléatoire . . . . .	4
2.3 Espace des variables aléatoires de carré sommable . . . . .	6
2.4 Approche paramétrique ou non paramétrique . . . . .	6
3 Probabilité de défaillance en fatigue . . . . .	7
3.1 Probabilité de défaillance . . . . .	7
3.2 Cas de la fatigue . . . . .	8
4 Calcul de la réponse stochastique . . . . .	9
4.1 Approches fréquentielles . . . . .	10
4.2 Méthodes d'intégration directes . . . . .	10
4.3 Méthodes fiabilistes . . . . .	11
4.4 Méthodes de perturbation . . . . .	13
4.5 Méthode spectrale . . . . .	14
5 Méta-modèle . . . . .	15
5.1 Détermination des coefficients . . . . .	15
5.2 Choix des points d'approximation . . . . .	16
5.3 Krigeage . . . . .	17
6 Bilan . . . . .	20
<b>2 Méthode LATIN et stratégie multiparamétrique</b>	<b>21</b>
1 Introduction . . . . .	22
2 Définition du problème de référence . . . . .	22
2.1 Loi de comportement matériau . . . . .	23

2.2	Conditions d'admissibilité et définitions des espaces . . . . .	26
3	Méthode LATIN . . . . .	26
4	Étape locale . . . . .	27
4.1	Direction de recherche simple . . . . .	27
4.2	Direction de recherche optimisée . . . . .	28
5	Étape linéaire . . . . .	29
5.1	Direction de recherche . . . . .	29
5.2	Mise à jour de la direction de recherche . . . . .	30
5.3	Résolution . . . . .	32
6	Stratégie multiparamétrique . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Réduction de modèle et stratégies multirésolutions</b>	<b>35</b>
1	Introduction . . . . .	36
2	POD . . . . .	36
2.1	Construction de la POD . . . . .	37
2.2	Exemple . . . . .	37
2.3	Bilan . . . . .	37
3	Réduction de modèle . . . . .	38
4	Réduction de modèle avec la PGD . . . . .	42
4.1	Méthode de Galerkin . . . . .	42
4.2	Minimisation de résidu . . . . .	43
5	Stratégies multirésolutions . . . . .	44
5.1	Solveurs de Krylov . . . . .	44
5.2	SLDLT . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Méthode LATIN, PGD, et stratégie multiparamétrique</b>	<b>47</b>
1	Introduction . . . . .	48
2	Technique de réduction de modèle PGD et méthode LATIN . . . . .	48
2.1	Minimisation d'une erreur en direction de recherche . . . . .	48
2.2	Fonction temps unique . . . . .	49
2.3	Enrichissement du modèle réduit . . . . .	50
2.4	Détails des itérations de la LATIN . . . . .	52
3	Qualité de la décomposition PGD . . . . .	56
3.1	Comparaison avec une décomposition effectuée à la dernière itération . . . . .	56
3.2	Influence du maillage et du nombre de pas de temps . . . . .	57
4	Réduction de modèle PGD et stratégie multiparamétrique . . . . .	58
4.1	Paramètres variables possibles . . . . .	58
4.2	Élimination de couples non pertinents . . . . .	58
4.3	Cas d'un plan d'expérience ordonné . . . . .	59
4.4	Cas d'un plan d'expérience aléatoire . . . . .	60

<b>5</b>	<b>Diminution du temps de calcul de la décomposition PGD</b>	<b>65</b>
1	Introduction . . . . .	66
2	Régularisation de la direction de recherche . . . . .	66
2.1	Influence sur le taux de convergence . . . . .	68
3	Détermination des fonctions temporelles . . . . .	69
3.1	Produit de dérivées aux sens de Galerkin discontinu . . . . .	69
3.2	Résolution . . . . .	70
3.3	Mise à jour individuelle . . . . .	71
4	Détermination des fonctions spatiales . . . . .	71
4.1	Version 1 (V1), issue du cas viscoélastique . . . . .	72
4.2	Version 2 (V2), développée pour les quantités déviatoriques . . . . .	75
4.3	Version 3 (V3), méthode itérative pour la détermination des fonctions spatiales . . . . .	78
4.4	Comparaison des trois méthodes . . . . .	81
5	Illustration des performances . . . . .	81
5.1	Répartition du temps de calcul pour le premier calcul . . . . .	82
5.2	Répartition du temps de calcul pour un deuxième calcul . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Application au cas test du projet APPROFI</b>	<b>87</b>
1	Présentation du logiciel 3D . . . . .	88
2	Définition du problème . . . . .	88
3	Comparaison avec ABAQUS . . . . .	89
4	Multiparamétrique, plan d'expérience complet . . . . .	90
5	Multiparamétrique, cas interactif . . . . .	90
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>93</b>
	<b>Résumé, algorithme LATIN</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>





# Table des figures

1.1	Limite de la vision paramétrique de l'aléa, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction qui associe des valeurs des variables d'entrée à une observation. . . . .	7
1.2	Schéma de définition de la probabilité de défaillance . . . . .	8
1.3	Définition géométrique du point de défaillance le plus probable . . . . .	12
1.4	Plan d'expérience complet et plan aléatoire pour deux variables isoprobabilistes dans $[0, 1]$ . . . . .	17
1.5	Plans d'expérience LHS simple et optimisé pour deux variables isoprobabilistes dans $[0, 1]$ . . . . .	18
1.6	Approximation par une méthode de Krigage simple . . . . .	18
1.7	Définition de l'indicateur $U$ pour trois points . . . . .	19
2.1	Problème de référence sur le domaine $\Omega$ . . . . .	22
2.2	Schématisation de l'action de la variable d'écrouissage . . . . .	24
2.3	Schématisation d'une itération de la méthode LATIN . . . . .	27
2.4	Indicateur d'erreur LATIN en fonction du nombre d'itérations pour différents seuils de l'indicateur de mise à jour de la direction de recherche . . . . .	31
2.5	Temps de calcul et nombre de mises à jour de la direction de recherche en fonction du seuil pour la mise à jour de la direction de recherche . . . . .	31
2.6	Illustration du choix de l'initialisation pour la méthode LATIN dans le cas des résolutions successives d'un problème paramétré pour deux jeux des valeurs des paramètres. . . . .	33
3.1	Fonction de référence et POD tronquées aux ordres 1, 2 et 3 . . . . .	38
3.2	Valeurs singulières . . . . .	39
3.3	Valeurs singulières pour la photo . . . . .	39
3.4	POD tronquées d'une image de $330 \times 297$ pixels . . . . .	40
3.5	Deux stratégies de sélection d'échantillons pour le cas d'un problème d'évolution . . . . .	41
4.1	Minimisation de l'erreur en direction de recherche pour la PGD . . . . .	49
4.2	Définition du problème de plaque trouée . . . . .	52

4.3	Comparaison de l'évolution de l'indicateur PGD en fonction du nombre de couples pour des fonctions d'espaces générées à la dernière itération de la LATIN ou au cours des itérations de la LATIN . . . . .	56
4.4	Temps CPU et nombre de couples en fonction du nombre de DDLs et de piquets de temps . . . . .	57
4.5	Exemple de parcours optimal du plan d'expérience pour 3 variables prenant 10 valeurs . . . . .	60
4.6	Gain en fonction du nombre de calculs pour le parcours optimal du plan d'expérience . . . . .	60
4.7	Nombres de couples total et utilisés au cours de l'étude paramétrique pour le parcours optimal . . . . .	61
4.8	Exemple de parcours aléatoire du plan d'expérience pour 3 variables prenant 10 valeurs . . . . .	61
4.9	Gain en fonction du nombre de calculs pour le parcours aléatoire du plan d'expérience . . . . .	63
4.10	Nombres de couples total et utilisés au cours de l'étude paramétrique dans le cas d'un parcours aléatoire . . . . .	63
5.1	Indicateurs LATIN obtenus au bout de 20 itérations en fonction du paramètre de régularisation de la direction de recherche . . . . .	68
5.2	Définition du problème du cube . . . . .	75
5.3	Ratio entre la partie pression et la partie déviatorique de la première fonction d'espace générée en fonction du paramètre de régularisation . . . . .	75
5.4	Exemple de réservoir sous pression, (a) définition des conditions aux limites, (b) champ de déformation plastique (norme Mises) au pas de temps 40 . . . . .	82
5.5	Répartition du temps de calcul pour le premier calcul . . . . .	83
5.6	Répartition du temps de calcul pour un calcul ne faisant intervenir que la mise à jour des fonctions du temps . . . . .	84
5.7	Répartition du temps de calcul pour un calcul demandant la mise à jour de la direction de recherche mais pas de nouveaux couples PGD . . . . .	84
5.8	Répartition du temps de calcul pour un calcul demandant la mise à jour de la direction de recherche et la génération de nouveaux couples PGD . . . . .	85
6.1	Définition du cas test . . . . .	88
6.2	Comparaison des champs de contrainte de Mises et de déformations plastiques obtenus avec ABAQUS et la LATIN . . . . .	89
6.3	Critère de SWT obtenu en fonction de la valeur des paramètres d'entrée . . . . .	91
6.4	Gain en fonction du nombre de calculs pour l'étude paramétrique sur l'ailette . . . . .	91
6.5	Flux de donnée et services utilisés en mode interactif . . . . .	92

# Liste des tableaux

1.1	Exemples de fonction de densité de probabilité . . . . .	5
2.1	Valeurs des coefficients matériaux en élastoplastique [Lemaitre et Cha- boche, 1994] et en élastoviscoplastique pour un TA 6 V . . . . .	25
4.1	Conséquences de la variation des paramètres . . . . .	58
4.2	Définition du plan d'expérience pour la plaque trouée . . . . .	59
5.1	Comparaison des trois méthodes de détermination des fonctions spatiales	81
5.2	Comparaison du temps de calcul entre ABAQUS et la LATIN . . . . .	82
6.1	Définition du plan d'expérience complet pour le cas test . . . . .	90



# Introduction

LE PROJET ANR APPROFI, dans lequel s'est déroulée cette thèse, a pour objectif de fournir une méthodologie pour le calcul de la probabilité de défaillance d'une pièce ou d'un assemblage de l'industrie aéronautique ou spatiale. L'enjeu par rapport aux approches existantes est de pouvoir traiter le cas où la modélisation du matériau conduit à des problèmes non linéaires. Ce cas engendre la difficulté d'un effet d'histoire du chargement, de la localisation des déformations et un traitement numérique plus complexe du modèle physique.

La probabilité de défaillance est calculée en comparant la probabilité de résistance du matériau et la probabilité d'une sollicitation. Cette sollicitation est issue de la propagation dans un modèle mécano-probabiliste de modèles probabilistes des variables d'entrée telles que le chargement, la géométrie et les propriétés du matériau. Le calcul du modèle mécano-probabiliste, tel qu'il est effectué dans le projet, demande la résolution d'un problème déterministe pour de nombreux jeux de valeurs des paramètres d'entrée, *i.e.* de réalisations du modèle physique. L'objectif majeur de ce travail de thèse est de diminuer les temps de calcul associés aux calculs répétés de réalisations à l'aide d'une stratégie dite « multiparamétrique ».

Le projet APPROFI est découpé en sous projets gérés par des spécialistes de chaque discipline. La modélisation stochastique des variables d'entrée est effectuée par la société PHIMECA, celle des variables de résistance par le CETIM, coordinateur du projet. Le laboratoire LaMI est en charge de l'analyse stochastique et du calcul de la probabilité de défaillance. La société SNECMA fournit des cas tests et est en charge de l'industrialisation de la méthode. Enfin, le laboratoire Roberval, la société MODARTT et le LMT-Cachan fournissent des méthodes performantes pour la résolution des problèmes déterministes.

Le laboratoire LaMI a choisi d'utiliser une méthode de Monte-Carlo [Caflisch, 1998], qui s'appuie sur la simulation d'un grand nombre de réalisations pour différents jeux des paramètres, pour le calcul de la probabilité de défaillance. Suivant cette probabilité, entre une dizaine et des milliards de réalisations sont nécessaires. Le calcul d'une réalisation pour des cas industriels peut prendre plusieurs heures avec les techniques de résolutions classiques. Un méta-modèle du modèle physique [Keane et Prasanth, 2005] est donc utilisé en remplacement du modèle physique complet. Une approximation de la loi entrée/sortie du modèle physique est recherchée à partir d'une

collection de réalisations existantes. La méthode de Monte-Carlo peut alors s'appliquer sur le méta-modèle, sur lequel les temps de calcul sont très faibles.

Le méta-modèle de Krigeage [Sacks *et al.*, 1989, Cressie, 1993, Davis et Ierapetritou, 2009], qui a été utilisé, repose sur une approximation par processus gaussien. Une erreur au sens probabiliste peut être définie entre le méta-modèle et le modèle physique, et un lien direct peut être fait entre cette erreur et la probabilité de défaillance [Echard *et al.*, 2010, Echard *et al.*, 2011]. Si nécessaire, le méta-modèle est enrichi pour les entrées conduisant à la plus grande erreur pour le calcul de la probabilité de défaillance. L'enrichissement du méta-modèle consiste à considérer une plus grande collection de réalisations. Le problème déterministe doit être calculé pour un ensemble de nouveaux jeux de valeurs des paramètres d'entrée. Le calcul pour cet ensemble de jeux de valeurs est accéléré par la stratégie multiparamétrique.

[Boucard et Ladevèze, 1999, Allix et Vidal, 2002] ont introduit la terminologie de stratégie multirésolution ou multiparamétrique pour désigner les stratégies permettant la détermination de la réponse du modèle physique pour une entrée donnée avec une erreur d'approximation contrôlée, connaissant déjà un certain nombre de réalisations pour d'autres valeurs des paramètres. La méthode non-incrémentale en temps LATIN [Ladevèze, 1985a, Ladevèze, 1996, Ladevèze, 1999] est utilisée dans ces stratégies. L'idée est d'initialiser cette méthode itérative avec la solution d'un problème supposé proche. Le temps de calcul d'une nouvelle réalisation est alors d'autant plus faible que l'initialisation en est réellement proche. Un exemple est le cas d'assemblages avec contact frottant et pièces à comportement élastique traité dans [Boucard et Champaigne, 2003]. L'information issue d'un calcul est réutilisée en conservant les grandeurs aux interfaces entre les pièces.

La solution d'un problème avec un matériau à comportement non linéaire est donnée par des champs définis sur l'ensemble de la structure et de l'intervalle de temps considéré. Le stockage de l'ensemble des solutions pour les différentes réalisations demanderait trop de capacité de mémoire. Des travaux effectués au LMT-Cachan, [Cognard et Ladevèze, 1993, Cognard *et al.*, 1999, Ladevèze *et al.*, 2002] ont montré qu'il est possible d'utiliser dans la méthode LATIN une approximation, sous la terminologie de « décomposition radiale », pour diminuer le volume de données à stocker et les temps de calcul. Les champs de la solution sont approximés par des sommes de produits de fonctions du temps par des fonctions d'espace. Un modèle réduit de la solution est ainsi construit, qui rend possible la conservation de l'ensemble des réalisations. La particularité de ce modèle réduit est qu'aucune fonction n'est choisie *a priori*, avant le début du calcul. Cette idée a été reprise et étendue par [Chinesta *et al.*, 2010] sous le nom de *Proper Generalized Decomposition* (PGD).

[Ladevèze et Nouy, 2003] puis [Ladevèze *et al.*, 2010] ont proposé une nouvelle manière d'utiliser la PGD dans la LATIN, et ont montré sur des exemples visco-élastiques que le nombre de fonctions nécessaires pour atteindre la même erreur est plus faible. Cette nouvelle manière de construire la PGD a été adaptée dans cette thèse aux problèmes visco-plastiques.

Dans la stratégie multiparamétrique, les fonctions d'espace de la décomposition peuvent être conservées d'un jeu de paramètres à l'autre sous certaines hypothèses. La majeure partie du temps de calcul dans la résolution pour un nouveau jeu de paramètres consistant en la génération des fonctions d'espace, conserver les fonctions pertinentes est très intéressant. Cette idée a été testée par [Passieux, 2008] en visco-élasticité, mais la visco-plasticité apporte des difficultés supplémentaires traitées dans cette thèse.

La nouveauté de ce travail est ainsi la réutilisation d'un modèle réduit de type PGD dans la méthode LATIN pour la résolution de problèmes visco-plastiques d'évolution dans une stratégie multiparamétrique, ainsi que l'amélioration des algorithmes de résolution pour pouvoir traiter des problèmes à grand nombre de degrés de liberté. Ces améliorations ont été intégrées dans un logiciel basé sur la plateforme C++ du LMT-Cachan afin de montrer la pertinence de la stratégie proposée sur des exemples à géométrie complexe.

Pour comprendre les apports de cette thèse, il est nécessaire de préciser les fondamentaux de la méthode LATIN. Dans cette méthode non incrémentale en temps, les difficultés de résoudre un problème non linéaire et global sont séparées. La solution, qui vérifie l'ensemble des équations, est recherchée de manière approchée sur tout l'espace et le temps dans une stratégie itérative. Chaque itération est composée :

- d'une étape dite *locale* où, connaissant une approximation de la solution vérifiant les équations linéaires (éventuellement globales), une approximation de la solution vérifiant les équations locales est recherchée, selon une direction de recherche locale qui est un paramètre de la méthode ;
- d'une étape dite *linéaire* où, connaissant une approximation de la solution vérifiant les équations locales, une approximation de la solution vérifiant les équations linéaires (éventuellement globales) est recherchée, selon une direction de recherche linéaire qui est un paramètre de la méthode.

La détermination de la solution vérifiant les équations linéaire est l'étape la plus coûteuse, car globale en espace pour assurer l'équilibre. Une approximation en variables séparées temps-espace (PGD) en est recherchée.

Un premier apport du travail de thèse a consisté dans le choix des directions de recherches afin d'obtenir le meilleur taux de convergence possible en limitant la difficulté d'implémentation, en s'appuyant sur les travaux de [Artz, 1994, Boisse, 1987, Cognard, 1989]. L'algorithme de détermination de la décomposition PGD développé par [Ladevèze et Nouy, 2003, Ladevèze *et al.*, 2010] a ensuite dû être adapté au cas visco-plastique. La principale difficulté vient du fait que dans ce cas, l'opérateur sur lequel est construit la PGD devient dépendant du temps et n'est pas toujours défini. Les performances en termes de temps de calcul n'étant pas suffisantes, un nouvel algorithme itératif a été mis en place pour la détermination des fonctions d'espace de la décomposition PGD. Contrairement aux précédents algorithmes, celui-ci ne demande plus d'assemblages de matrices éléments finis au cours des ces itérations. Cette étape était

la plus coûteuse précédemment.

Un deuxième apport est le développement de la stratégie multiparamétrique dans le cas visco-plastique. Le choix de la solution la plus proche et des fonctions spatiales à conserver est une question difficile à laquelle ce travail essaie de répondre.

Ce document est composé de six chapitres. Le premier chapitre est consacré à la modélisation des variabilités et aux méthodes de résolution associées. La stratégie de calcul LATIN et la stratégie multiparamétrique, permettant l'accélération de la résolution d'ensemble de problèmes visco-plastiques complexes, sont détaillées dans le deuxième chapitre. Le modèle matériau utilisé et le choix des directions de recherche de la méthode LATIN y sont présentés. Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de réduction de modèle, permettant d'accélérer les calculs et de diminuer la quantités de données à stocker. Le quatrième chapitre présente comment le modèle réduit PGD est introduit dans la méthode LATIN avant de fournir un exemple détaillé. La qualité de l'approximation PGD est évaluée, notamment l'influence de la discrétisation spatiale et temporelle. Dans le cinquième chapitre, le détail du calcul des fonctions de la décomposition PGD est donné. Trois algorithmes de détermination des fonctions spatiales sont présentés et comparés. Il s'agit d'un point critique pour le temps de calcul. Enfin, le dernier chapitre présente l'application de la stratégie développée sur le cas test du projet APPROFI ainsi qu'une comparaison avec le logiciel ABAQUS.



# Chapitre 1

## Méthodes pour la propagation des incertitudes

*Dans ce premier chapitre, le cadre dans lequel s'est effectuée la thèse est précisé. Un bref rappel de la modélisation probabiliste des incertitudes est tout d'abord présenté. On donne ensuite la définition de la probabilité de défaillance en fatigue. Une brève revue des méthodes pour le calcul stochastique est effectuée dans un cadre plus général que celui de la détermination de la probabilité de défaillance. Un méta-modèle de Krigeage étant employé dans le projet AP-PROFI, le dernier paragraphe précise la définition de ce méta-modèle et son utilisation pour le calcul de la probabilité de défaillance en fatigue.*

### Table des matières

1	Introduction . . . . .	2
2	Modélisation probabiliste des incertitudes . . . . .	3
3	Probabilité de défaillance en fatigue . . . . .	7
4	Calcul de la réponse stochastique . . . . .	9
5	Méta-modèle . . . . .	15
6	Bilan . . . . .	20

# 1 Introduction

Le but de ce premier chapitre est d'introduire le contexte dans lequel s'est déroulée la thèse.

La description réaliste d'un système mécanique contient nécessairement des incertitudes. Celles-ci peuvent provenir de la modélisation incomplète qui est faite du système (incertitudes de modélisation) ou bien du caractère aléatoire intrinsèque des variables, lié aux phénomènes étudiés (incertitudes de données).

Suivant le degré de confiance accordé à la modélisation et des descriptions disponibles des variables, différentes théories peuvent être appliquées afin de décrire l'incertain :

- la théorie des intervalles [Moore, 1966] ;
- la théorie des ensembles flous [Zadeh, 1978] ;
- la théorie des ensembles convexes [Ben-Haim, 1994] ;
- la théorie des méconnaissances [Puel, 2004, Ladevèze *et al.*, 2006, Enjalbert, 2009] ;
- la théorie probabiliste.

La première théorie décrit l'incertain par des intervalles dans lesquels les valeurs des variables évoluent, sans information de probabilité d'occurrence. Le résultat du calcul est aussi exprimé sous forme d'intervalles. Cette théorie a l'avantage de ne nécessiter que très peu d'informations sur les variables d'entrées. Elle a par contre l'inconvénient de donner une solution de plus en plus pessimiste, à mesure que le nombre de paramètres augmente. L'intervalle solution peut alors devenir très grand, voire infini.

La théorie des ensembles flous décrit l'incertain par un degré d'appartenance des variables à des intervalles. [Drakopoulos, 1995] présente une comparaison des méthodes probabilistes et par ensembles flous. Ces conclusions semblent indiquer que, pour des domaines finis, le pouvoir de représentation des méthodes probabilistes est supérieur à celui des approches par ensembles flous ; la contrepartie est une complexité de calcul plus importante et une moindre efficacité numérique.

La théorie des méconnaissances se présente comme une alternative aux coefficients de sécurité. L'incertain est décrit par des intervalles dont les bornes sont probabilisées. La propagation s'effectue sur ces bornes et donne un résultat sous la forme d'un intervalle probable. Peu d'informations sont nécessaires sur les variables et elles peuvent être obtenues facilement par recalage du modèle avec méconnaissances. La description de l'incertain est moins fine avec cette technique qu'avec la théorie des probabilités, ce qui peut être un avantage ou un inconvénient suivant la connaissance disponible au moment de la modélisation.

Enfin, la théorie des probabilités est la plus utilisée pour décrire l'incertain. Elle permet une description de la probabilité d'occurrence d'événements.

C'est cette théorie qui est utilisée dans le projet APPROFI dans le but de prévoir la défaillance de pièce en fatigue. Celle-ci est calculée en comparant une sollicitation à une capacité de résistance du matériau. Le calcul de la sollicitation est le plus coûteux car il fait intervenir des effets de structure et non pas uniquement des effets locaux.

Une technique de méta-modèle de Krigeage est donc employée pour en réduire le coût tout en garantissant la bonne valeur de la probabilité de défaillance en fatigue calculée.

## 2 Modélisation probabiliste des incertitudes

On présente tout d'abord de manière très générale la théorie des probabilités. L'ensemble des définitions présentes dans cette section sont issues de [Saporta, 1990] et [Radix, 1991].

### 2.1 Espace probabilisé

L'ensemble des réalisations d'un phénomène aléatoire forme un espace noté  $\Theta$ . Un événement est défini comme une partie de  $\Theta$  contenant l'ensemble des réalisations  $\theta \in \Theta$ . La théorie des probabilités consiste en l'association de nombre aux événements, *i.e.* leurs probabilités d'occurrence. À l'espace des événements élémentaires  $\Theta$  est associée une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{F}$  de parties de  $\Theta$ , et une mesure  $p$  appelée loi de probabilité est définie sur  $(\Theta, \mathcal{F})$ .

**$\sigma$ -algèbre** Une classe  $\mathcal{F}$  de parties de  $\Theta$  est une  $\sigma$ -algèbre (ou *tribu*) si :

1.  $\Theta \in \mathcal{F}$  ;
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$  (« stabilité par passage au complémentaire ») ;
3.  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} A_n \in \mathcal{F}$  (« stabilité par union dénombrable »).

Un espace  $(\Theta, \mathcal{F})$  est dit *mesurable* si  $\mathcal{F}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Theta$ .

**Mesure de probabilité** Une mesure de probabilité  $p$  sur  $(\Theta, \mathcal{F})$  est une fonction  $p : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  telle que :

1.  $p(\emptyset) = 0, \quad p(\Theta) = 1$  ;
2. si  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  est un ensemble dénombrable d'événements disjoints ( $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ) alors :

$$p\left(\bigcup A_i\right) = \sum p(A_i)$$

Le triplet  $(\Theta, \mathcal{F}, p)$  définit un *espace probabilisé*.

**Application mesurable** Soit  $(\Theta, \mathcal{F})$  et  $(\Theta', \mathcal{F}')$  deux espaces mesurables, une application  $f : \Theta \rightarrow \Theta'$  est dite  $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$  mesurable si :

$$f^{-1}(\mathcal{F}') := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}'\} \subset \mathcal{F}$$

## 2.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle  $X$  est une application mesurable de  $(\Theta, \mathcal{F})$  sur l'espace mesurable des réels  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ <sup>1</sup>.

Les éléments images de  $\Theta$  par  $X$  sont appelés *réalisations* de la variable aléatoire  $X$ ; à une cause  $\theta \in \Theta$ ,  $X$  associe une conséquence  $X(\theta) \in \mathbb{R}$ .

**Remarque** Par définition d'une application mesurable, pour tout borélien  $A$ , l'ensemble  $\{\theta : X(\theta) \in A\}$  est un événement.

**Probabilité d'une variable aléatoire** La définition d'une variable aléatoire permet d'attribuer une probabilité à tout intervalle  $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  identifié à l'événement dont il est l'image :

$$P_X(I) = \int_I dP_X(x) = p(\{\theta \in \Theta : X(\theta) \in I\})$$

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est la description de sa répartition de probabilité.

**Fonction de répartition** On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow [0, 1] \\ t & \mapsto F_X(t) = P_X(-\infty, t] = p(\{\theta \in \Theta : X(\theta) \leq t\}) \end{cases}$$

La loi d'une variable aléatoire est, en pratique, complètement déterminée par la donnée de sa fonction de répartition  $F_X$ . Celle-ci possède les propriétés suivantes :

- $F_X$  caractérise la loi. En particulier,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, P_X(a, b] = F_X(b) - F_X(a)$$

- $F_X$  est une fonction croissante, continue à droite et avec une limite à gauche en tout point ;
- $F_X$  est à limites finies

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$$

**Densité de probabilité** Une variable aléatoire  $X$  est continue s'il existe une fonction densité  $f_X(x)$  (*pdf: probability density function*) telle que  $\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  :

$$P_X(I) = \int_I f_X(x) dx$$

On dit aussi alors que la loi  $P_X$  de  $X$  « possède une densité », ou bien « est à densité ». De manière équivalente, on dit que  $P_X$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx$ . La fonction densité de probabilité possède les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des boréliens de  $\mathbb{R}$ .

- $f_X \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X dx = 1$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité est donnée par :

$$F_X(a) = P_X([-\infty, a]) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx$$

Des exemples classiques de densité de probabilité sont présentés dans le tableau 1.1.

loi de $X$	support $\Theta$	densité $f_X(x)$
Uniforme	$[-1, 1]$	$\frac{1}{2}$
Gaussienne	$\mathbb{R}$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
Normale	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
Gamma	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x)$
Beta	$[0, 1]$	$\frac{(1+x)^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta) 2^{\alpha+\beta-1}}$
Weibull	$\mathbb{R}^+$	$\left(\frac{k}{\lambda}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{(k-1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)$

**Tableau 1.1 :** Exemples de fonction de densité de probabilité

### Mesures d'une variable aléatoire continue

- espérance :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$$

ou pour une variable aléatoire à densité,

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

- moment d'ordre  $k$  :

$$\mu_k(X) = E(X^k)$$

- moment centré d'ordre  $k$  :

$$m_k(X) = E((X - E(X))^k)$$

Les principales valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire  $X$  sont :

- la *moyenne* ou *espérance*  $E(X)$  ;
- la *variance*  $V(X)$  qui est le moment centré d'ordre 2 :  $V(X) = m_2 = E((X - E(X))^2)$  ;

- l'écart-type  $\sigma(X)$  qui est la racine carrée de la variance ;
- la covariance  $\text{Cov}(X_1, X_2) = E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$  ;
- le coefficient de variation  $\delta(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$ .

La dépendance stochastique d'une variable aléatoire pourra être rappelée en notant  $X(\theta)$ .

## 2.3 Espace des variables aléatoires de carré sommable

Les variables aléatoires telles que  $E(X^k) < \infty$  sont appelées variables aléatoires d'ordre  $k$ . L'ensemble des variables aléatoires d'ordre  $k$  définies sur l'espace probabilisé  $(\Theta, \mathcal{F}, p)$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  constitue un espace vectoriel noté  $\mathcal{L}^k(\Theta, dP_X, \mathbb{R})$ . Dans le cas  $k = 2$ , l'espace  $\mathcal{L}^2$  est appelé espace des variables aléatoires du second ordre ou de carré sommable. Il s'agit d'un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire suivant :

$$\langle X, Y \rangle = E(XY)$$

La norme déduite de ce produit scalaire étant :

$$\|X\|_2^2 = \langle X, X \rangle = E(X^2)$$

Sur un espace de Hilbert, il est possible d'utiliser les outils classiques d'analyse numérique. [Sudret et Der Kiureghian, 2000] présente une revue des bases Hilbertiennes possibles de l'espace  $\mathcal{L}^2$ .

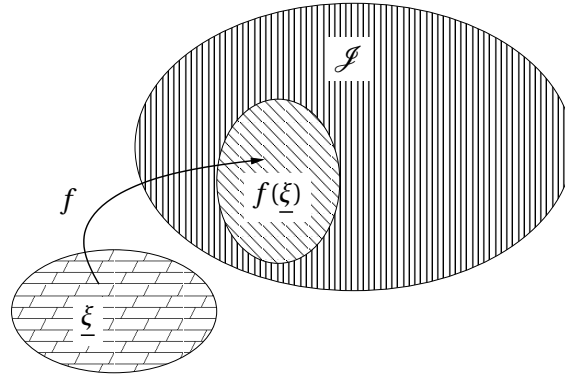
## 2.4 Approche paramétrique ou non paramétrique

Suivant le degré de confiance apporté au modèle déterministe du système étudié, deux approches sont envisageables :

**Approche paramétrique** L'approche paramétrique est la voie privilégiée pour les problèmes dont le modèle mécanique déterministe  $f$  existe et est robuste. On considère alors que l'aléa ne porte que sur les variables d'entrées  $\underline{\xi}$ . Pour n'importe quelle réalisation  $\mathcal{J}$  observée, on peut associer des valeurs des variables d'entrée qui, injectées dans le modèle, conduisent à cette réalisation ( $\forall \mathcal{J} \quad \exists \underline{\xi} : f(\underline{\xi}) = \mathcal{J}$ , voir FIG. 1.1).

L'effort de modélisation probabiliste porte dans ce cas sur les paramètres du système mécanique. Des mesures d'échantillons et des jugements d'experts (permettant d'introduire la physique supposée des phénomènes) permettent de leur associer des lois de probabilité adaptées. Nous nous placerons dans la suite dans une vision paramétrique de l'aléa.

**Approche non-paramétrique** L'approche non-paramétrique permet de modéliser l'aléa dans les cas où il n'est pas possible de trouver un modèle déterministe qui permette l'association de paramètres d'entrée à une réalisation. Les opérateurs du système mécanique sont alors directement probabilisés. Dans le cas du calcul de structures par éléments finis, on cherche à construire une modélisation probabiliste de la



**FIGURE 1.1 :** Limite de la vision paramétrique de l'aléa, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction qui associe des valeurs des variables d'entrée à une observation.

matrice de rigidité sous certaines contraintes (matrice symétrique, définie positive, caractère bande) [Soize, 2000] avec la condition de maximum d'entropie. Cette approche permet d'augmenter la prédictibilité du modèle, l'ensemble des observations  $\mathcal{J}$  pouvant être atteintes. En prenant des assertions plus faibles sur le modèle et en le probabilisant, on prend en compte l'incertitude de modélisation en plus de l'incertitude des causes. On note cependant qu'il est alors impossible de faire une étude de sensibilité sur les causes de l'aléa.

### 3 Probabilité de défaillance en fatigue

La quantité d'intérêt dans le projet APPROFI est la probabilité de défaillance dans le cas d'une rupture en fatigue.

#### 3.1 Probabilité de défaillance

La probabilité de défaillance  $P_f$  est définie par une fonction de performance  $G(\underline{\xi})$  qui associe à un événement  $\underline{\xi}$  une performance. Le système est sain si la fonction de performance retourne une valeur supérieure à zéro pour un événement  $\underline{\xi}$ , défaillant si elle est inférieure ou égale à zéro. Les valeurs de  $\underline{\xi}$  satisfaisant  $G(\underline{\xi}) = 0$  définissent la surface d'état limite. La probabilité de défaillance peut être calculée par une méthode de Monte-Carlo comme le rapport entre le nombre de réalisations défaillantes  $n_{G \leq 0}$  et le nombre  $n_{MC}$  de réalisations totales,

$$P_f = \frac{n_{G \leq 0}}{n_{MC}} \quad (1.1)$$

Le nombre de réalisations nécessaires peut être très important puisqu'il est directement lié à la probabilité de défaillance attendue. Pour quantifier l'incertitude sur la

probabilité de défaillance, on peut calculer son coefficient de variation,

$$\text{C.O.V}_{P_f} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{P_f n_{MC}}} \quad (1.2)$$

Dans un cadre plus général, la probabilité de défaillance est définie par

$$P_f = \int_{\{\theta \in \Theta : G(\underline{\xi}) \leq 0\}} f_{\underline{\xi}}(x) dx \quad (1.3)$$

avec  $f_{\underline{\xi}}(x)$  la fonction de densité de probabilité jointe de l'ensemble des variables d'entrée.

### 3.2 Cas de la fatigue

Dans le cas de la défaillance en fatigue, une manière de procéder est de considérer que la fonction de performance est issue de la comparaison entre une sollicitation  $S$  et une capacité de résistance  $R$ .

$$G(\underline{\xi}) = R(\underline{\xi}) - S(\underline{\xi}) \quad (1.4)$$

Si l'on considère que l'on connaît les fonctions de densité de probabilité de la résistance et de sollicitation, le calcul de la probabilité de défaillance revient à calculer l'aire à l'intersection des courbes de probabilité de résistance et de sollicitation (FIG. 1.2).

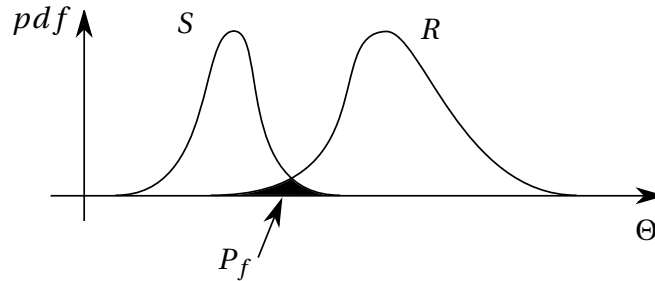


FIGURE 1.2 : Schéma de définition de la probabilité de défaillance

La sollicitation correspond à l'endommagement de la pièce qui dépend naturellement de l'histoire du chargement. Calculer l'endommagement pour l'ensemble des évolutions du chargement possible est hors de portée. Le concept de chargement équivalent pour la fatigue est donc introduit. Il s'agit de transformer une évolution temporelle quelconque du chargement en un chargement sinusoïdal d'amplitude  $F_{eq}$  constante sur un nombre  $N_{eq} = 10^n$  cycles (en général  $n = 6$ ), qui conduit à un endommagement équivalent. Ceci est effectué par une étude statistique des chargements possibles, transformés en chargements élémentaires, que nous ne détaillerons pas ici.

La fonction de performance consiste alors à comparer l'endommagement issu d'un chargement équivalent de fatigue à  $10^n$  cycles avec la résistance du matériau à cette endommagement.



L'endommagement issu d'un chargement équivalent de fatigue à  $10^n$  cycles est par exemple calculé en pratique à l'aide du critère de Smith Topper Watson (SWT). Celui-ci prend en compte l'amplitude de déformation principale totale sur un cycle stabilisé  $\Delta\epsilon_I$  et la contrainte principale maximale sur ce cycle  $\sigma_I$ .

$$S = \sqrt{E\sigma_I\Delta\epsilon_I} \quad (1.5)$$

avec  $E$  le module d'Young.

Le problème qui consiste à savoir si une structure soumise à un chargement complexe va être défaillante est ainsi simplifié en une comparaison entre :

- d'une part, une sollicitation donnée par le calcul sur un cycle stabilisé du critère SWT pour une entrée définie par un ensemble de fonctions de densité de probabilité;
- d'autre part, une résistance dont on connaît la fonction de densité de probabilité.

Dans le projet APPROFI, la résistance selon le critère SWT a été qualifiée à partir d'essais sur des éprouvettes en traction et suit une loi normale à coefficient de variation constant (10,35%) de moyenne  $\mu_R$  dépendant du nombre de cycles équivalents considéré :

$$\mu_R = 680,154 \times 6,252 N_{eq}^{-0,1994} \quad (1.6)$$

Les entrées considérées comme aléatoires sont les paramètres matériaux et le chargement donné par l'amplitude équivalente en fatigue.

Dans le cas d'un problème mécanique linéaire, une relation linéaire peut être établie entre le critère SWT et les entrées du modèle. Cette relation est simple à caractériser à l'aide d'un unique calcul mécanique, avec un coût de calcul assez faible.

Dans un cas non linéaire, la dépendance entre les variables d'entrée et le critère SWT est non linéaire. La caractériser pour l'ensemble du domaine de variation des variables d'entrée est peut être faisable comme nous le verrons mais présente un coût de calcul élevé. Une technique de méta-modèle est donc plutôt utilisée.

## 4 Calcul de la réponse stochastique

Dans un cadre plus général que celui du projet APPROFI, le calcul de la réponse stochastique peut s'effectuer de nombreuses manières. On note  $\mathcal{J}(\underline{U})$  une quantité d'intérêt cible, qui peut par exemple être le déplacement d'un point particulier ou la contrainte maximale dans une certaine direction. Différentes informations au sens probabiliste peuvent être recherchées :

- les moments statistiques comme la moyenne  $\mu_{\mathcal{J}} = E(\mathcal{J}(\underline{U}))$  ;
- la probabilité d'événements particuliers :  $P_{\mathcal{J}} = P(\{\mathcal{J}(\underline{U}) \leq \mathcal{J}_0\})$  ;
- la représentation complète de  $\mathcal{J}(\underline{U})$  (distribution de probabilité).

Les approches fréquentielles du type Monte-Carlo/Quasi Monte-Carlo [Caflisch, 1998] pourront être employées dans tous les cas, avec comme limitation le grand nombre de tirages nécessaires à leur convergence. Des méthodes d'intégration directe peuvent permettre de calculer les moments statistiques de  $\mathcal{J}(\underline{U})$ , par exemple les méthodes

de Gauss, Clenshaw-Curtis, etc. Elles seront plus ou moins efficaces selon la forme de la fonction à intégrer. Les méthodes fiabilistes sont dédiées aux calculs de probabilité d'événements particuliers.

Il est aussi possible de représenter complètement la solution  $\underline{U}(\underline{M}, \theta)$  sur une base de fonctions et de chercher à résoudre le problème stochastique complet sur cette base [Ghanem et Spanos, 1991a]. On construit alors un méta-modèle du problème sur lequel les méthodes d'intégration directe ou fiabilistes pourront être appliquées avec un très faible coût de calcul. Des méthodes de développement en série, telles que le développement de Taylor ou la décomposition de Neumann [Yamazaki *et al.*, 1988], permettent également la construction d'un méta-modèle, particulièrement pour de faibles variations des paramètres du modèle.

#### 4.1 Approches fréquentielles

Les approches fréquentielles reposant sur le théorie des grands nombres peuvent être employées pour évaluer les moments statistiques d'une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\underline{U})$ , des probabilités d'événements particuliers, ou sa fonction de répartition. Cette méthode est classique pour traiter des problèmes probabilistes. Elle consiste à générer numériquement un grand nombre  $M$  de réalisations caractéristiques des paramètres variables, puis à calculer de manière déterministe les  $M$  réponses correspondantes pour la quantité d'intérêt  $\mathcal{J}$ . Une étude statistique de ces  $M$  résultats permet enfin de caractériser la distribution de  $\mathcal{J}$  et d'estimer sa fonction densité de probabilité. La convergence de la méthode est au pire en  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ , il est donc nécessaire de procéder à un grand nombre de tirages quand la précision souhaitée est grande.

#### 4.2 Méthodes d'intégration directes

Les méthodes d'intégration directe peuvent être utilisées pour évaluer les moments statistiques d'une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\underline{U})$  ou des probabilités d'événements particuliers. Par exemple, la moyenne de cette quantité  $\mu_{\mathcal{J}} = E(\mathcal{J}(\underline{U}))$  est par définition :

$$\mu_{\mathcal{J}} = E(\mathcal{J}(\underline{U})) = \int_{\Theta} \mathcal{J}(\underline{U}(x)) dP_{\xi}(x)$$

avec  $\xi$  l'ensemble des données aléatoires du problème. Ce problème d'intégration peut être résolu en utilisant des méthodes d'intégration numérique. Le calcul de  $\mu_{\mathcal{J}}$  est ainsi approché par :

$$\mu_{\mathcal{J}} \approx \sum_{k=1}^M \mathcal{J}(x_k) \omega_k$$

où les  $x_k$  sont les points d'intégration et les  $\omega_k$  sont les poids associés. La résolution du problème demande le calcul de  $M$  problèmes déterministes pour la détermination des  $\underline{U}(x_k)$ . Différents choix sont possibles pour les points et les poids d'intégration. En prenant des points d'intégration aléatoires vérifiant les distributions de probabilité et

un poids constant  $\omega_k = \frac{1}{M}$ , avec  $M$  le nombre de points, on retrouve une méthode de Monte-Carlo.

Dans la méthode de Quasi Monte-Carlo, les points d'intégration sont choisis de manière déterministe. Cette méthode permet d'obtenir de meilleurs taux de convergence que la méthode de Monte-Carlo pour des petites dimensions stochastiques.

Des méthodes de quadrature peuvent aussi être utilisées. Dans la quadrature de Gauss, dans un cas unidimensionnel, les  $x_k$  sont définis comme les  $n$  racines du  $n^e$  polynôme orthogonal associé à la mesure de probabilité  $dP_\xi$ . Les poids  $\omega_k$  sont obtenus par intégration des interpolants de Lagrange aux points  $x_k$ . On peut alors intégrer exactement des fonctions polynomiales de degré  $(2n - 1)$ . Dans le cas d'une dimension  $m > 1$ , les points d'intégration sont obtenus par tensorisation des quadratures unidimensionnelles associées aux mesures  $dP_{\xi_i}$  :

$$\mu_{\mathcal{J}} \approx \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_m=1}^n \omega_{1,k_1} \cdots \omega_{m,k_m} \mathcal{J}(\underline{U}(x_{1,k_1}, \dots, x_{m,k_m}))$$

Le nombre de points d'intégration  $M$  est donné par  $M = n^m$ . L'inconvénient de cette méthode est la croissance exponentielle du nombre de points d'intégrations  $M$  avec l'augmentation de la dimension stochastique  $m$ .

En grande dimension stochastique, on peut utiliser des quadratures dites « creuses » [Matthies et Keese, 2005] qui permettent de limiter le nombre de points d'intégration. Avec ces méthodes, on obtient une croissance polynomiale de  $M$  avec la dimension stochastique  $m$ . Afin de réduire le nombre de points d'intégration, il sera préférable d'utiliser des quadratures dites « imbriquées » (Clenshaw-Curtis, Gauss-Patterson, etc.).

### 4.3 Méthodes fiabilistes

Les méthodes fiabilistes [Lemaire, 1997] s'attachent aux calculs de probabilité d'événements. Elles sont particulièrement performantes dans le cas de probabilités faibles ( $10^{-3}$ ). Elles sont ainsi utilisées pour le calcul de la probabilité de défaillance, mais d'autres applications seraient envisageables.

#### 4.3.1 Surface d'état limite

La probabilité de défaillance est définie par :

$$P_f = \int_{\{\theta \in \Theta : G(\underline{\xi}) \leq 0\}} f_{\underline{\xi}}(x) dx$$

Le calcul de cette intégrale pose deux difficultés majeures :

- la densité de probabilité jointe  $f_{\underline{\xi}}(x)$  est le plus souvent inconnue, l'information connue étant les lois de probabilité des paramètres du problème ;
- la détermination du domaine de défaillance  $\{\theta \in \Theta : G(\underline{\xi}) \leq 0\}$  est coûteuse.

### 4.3.2 FORM, SORM

La première difficulté peut être résolue en opérant une transformation (par exemple de Rosenblatt ou de Nataf) permettant de se ramener à des variables aléatoires de base, gaussiennes centrées réduites indépendantes. On a alors :

$$P_f = \int_{\{\theta \in \Theta : G(y) \leq 0\}} f_{\xi}(y) dy$$

avec  $f_{\xi}(y)$  la densité de répartition d'une loi gaussienne centrée d'un vecteur aléatoire de taille  $m$ .

Cette densité de répartition est fortement décroissante. Les points qui contribuent le plus dans l'intégrale de la probabilité de défaillance sont donc ceux qui sont les plus proches de l'origine de l'espace normal.

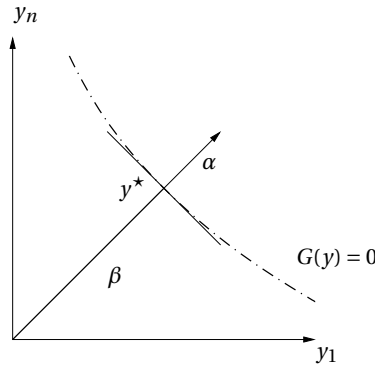
Le point de défaillance le plus probable est le point le plus proche de l'origine. Il est calculé en résolvant un problème de minimisation et est noté  $P^*$  de coordonnées  $y^*$ . L'indice de fiabilité  $\beta$  de la structure est défini géométriquement comme la distance entre l'origine et la surface d'état limite (figure 1.3) :

$$\beta = \|y^*\| \quad \text{où} \quad y^* = \underset{\{y \in \Theta : G(y) \leq 0\}}{\operatorname{argmin}} \|y\|^2$$

On peut montrer que si  $G(y)$  est linéaire :

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

avec  $\Phi(\cdot)$  la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire centré gaussien à variables indépendantes.



**FIGURE 1.3 :** Définition géométrique du point de défaillance le plus probable

La deuxième difficulté est contournée en approximant la surface d'état limite :

- soit par son hyper-plan tangent au point de défaillance dans la méthode FORM (*First Order Approximation Method*). Dans ce cas, le domaine de défaillance est approché par un demi-espace  $\tilde{D}$  dont la probabilité s'exprime :

$$P_{\tilde{D}} = \Phi(-\beta) \approx P_f$$

- soit par une paraboloïde dont les courbures principales sont notées  $(\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1})$  dans la méthode SORM (*Second Order, Approximation Method*). La probabilité du domaine de défaillance approché  $\tilde{D}$  est alors estimée par :

$$P_{\tilde{D}} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \kappa_i}} \approx P_f$$

Une étude de sensibilité aux paramètres du problème est possible en calculant le gradient de la probabilité de défaillance en fonction des paramètres du problème.

#### 4.4 Méthodes de perturbation

Les méthodes de perturbation donnent une approximation du champ de déplacement autour de sa valeur moyenne. En appliquant les méthodes d'intégration directe ou fiabiliste sur cette décomposition, les premiers moments statistiques d'une quantité d'intérêt ou la probabilité d'événement peuvent être déterminés. La précision obtenue est bonne pour des variations en faible largeur de bandes des paramètres.

On suppose que le problème à résoudre s'écrit sous forme discrétisée :

$$\mathbf{A}(\theta) \underline{U}(\theta) = \mathbf{b}(\theta) \quad (1.7)$$

Avec  $\mathbf{A}(\theta)$  une matrice aléatoire,  $\mathbf{b}(\theta)$  un vecteur aléatoire et  $\underline{U}(\theta)$  le vecteur aléatoire d'inconnues à déterminer.

##### 4.4.1 Développement en série de Taylor

L'idée est de décomposer les quantités du problème stochastique autour de la valeur moyenne des paramètres du problème. Supposons, par exemple, que les paramètres aléatoires puissent être représentés par un vecteur aléatoire  $\underline{\xi}$  de dimension  $m$ . La décomposition de  $\underline{U}(\theta)$  autour de sa valeur moyenne s'écrit alors :

$$\underline{U}(\theta) = \underline{U}_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i}) \underline{U}_{,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i})(\alpha_j - \mu_{\alpha_j}) \underline{U}_{,ij} + o(\|\theta\|^2)$$

où  $\underline{U}_0 = \underline{U}(\mu_\alpha)$ ,  $\underline{U}_{,i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \underline{U}(\alpha(\theta))$ ,  $\underline{U}_{,ij} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} \underline{U}(\alpha(\theta))$ .

De même, la matrice  $\mathbf{A}$  et le second membre  $\mathbf{b}$  issus du problème discrétisé s'écrivent :

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i}) \mathbf{A}_{,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i})(\alpha_j - \mu_{\alpha_j}) \mathbf{A}_{,ij} + o(\|\theta\|^2)$$

$$\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{b}_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i}) \mathbf{b}_{,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i})(\alpha_j - \mu_{\alpha_j}) \mathbf{b}_{,ij} + o(\|\theta\|^2)$$

On injecte alors les développements de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  dans l'équation à résoudre  $\mathbf{A}\underline{U} = \mathbf{b}$  :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}_0 \underline{U}_0 - \mathbf{b}_0) + \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i}) (\mathbf{A}_0 \underline{U}_{,i} + \mathbf{A}_{,i} \underline{U}_0 - \mathbf{b}_{,i}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha_i - \mu_{\alpha_i}) (\alpha_j - \mu_{\alpha_j}) (\mathbf{A}_0 \underline{U}_{,ij} + \mathbf{A}_{,j} \underline{U}_{,i} + \mathbf{A}_{,i} \underline{U}_{,j} + \mathbf{A}_{,ij} \underline{U}_0 - \mathbf{b}_{,ij}) + o(\|\theta\|^2) = 0 \end{aligned}$$

On obtient l'écriture du développement de Taylor du second ordre en  $\theta$  d'un vecteur qui doit être nul. Les différents termes du développement doivent être nul, et donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \underline{U}_0 &= \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{A}_0 \underline{U}_{,i} &= \mathbf{b}_{,i} - \mathbf{A}_{,i} \underline{U}_0 & \forall i \in [0, m], \forall j \in [0, m] \\ \mathbf{A}_0 \underline{U}_{,ij} &= \mathbf{b}_{,ij} - \mathbf{A}_{,j} \underline{U}_{,i} - \mathbf{A}_{,i} \underline{U}_{,j} - \mathbf{A}_{,ij} \underline{U}_0 \end{aligned}$$

Les termes du développement de  $\underline{U}$  peuvent être obtenus en résolvant successivement ces systèmes linéaires. On notera que dans toutes les équations c'est la matrice  $\mathbf{A}_0$  qui intervient dans le premier membre. On pourra éventuellement la factoriser une seule fois afin de minimiser les coûts de calcul.  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont des quantités connues, et les termes de leurs développements peuvent être estimés soit analytiquement soit numériquement par un code de calcul. Toutefois les gradients d'ordre élevé de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont difficiles à obtenir. La méthode est souvent limitée à l'ordre 2.

Cette méthode a été appliquée avec succès pour des variations des paramètres aléatoires du problème contenues dans des bandes étroites, pour des problèmes linéaires et non linéaires, en statique et en dynamique [Hisada et Nakagiri, 1985, Liu *et al.*, 1988].

## 4.5 Méthode spectrale

L'association d'une méthode spectrale à la méthode des éléments finis à été introduite dans [Ghanem et Spanos, 1991b]. Les champs aléatoires connus (coefficients matériaux...) sont approximés sur les modes propres du noyau de leur matrice de covariance selon la méthode spectrale de Karhunen-Loève.

Les déplacements nodaux aléatoires éléments finis sont recherchés sur le chaos polynomial [Wiener, 1938],

$$\underline{U}(\underline{M}, \theta) = \sum_{k=0}^P \underline{U}_k \varphi(\underline{M}) \Psi_k(\theta)$$

ce qui permet d'obtenir une approximation de la solution même pour de grandes variations des paramètres. Une décomposition stochastique de la solution complète est recherchée. Un post-traitement par intégration analytique ou numérique de cette solution est nécessaire pour obtenir les moments statistiques, la fonction de répartition d'une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\underline{U})$  ou la probabilité d'événements particuliers. Cette méthode s'apparente à une méthode de surface de réponse (ou méta-modèle). La résolution s'effectue avec une méthode de Galerkin.

## 5 Méta-modèle

Les méta-modèles ont pour but de fournir une décomposition sur une base de fonctions  $\Psi_j(\theta)$ , connue et adaptée au calcul stochastique, des quantités d'intérêts. Le calcul des moments statistiques, la probabilité d'événements particuliers, ou la distribution de probabilité des quantités d'intérêt sont alors faciles à obtenir par les méthodes d'intégration directe (Monte-Carlo, quadrature, etc.) ou fiabiliste, sur le méta-modèle. La quantité d'intérêt  $\mathcal{J}_p(\underline{U})$  décomposée s'écrit :

$$\mathcal{J}_p(\underline{U}) = \sum_{j \in J_p} \alpha_j \Psi_j(\theta)$$

La construction du méta-modèle consiste à calculer les coefficients  $\alpha_j$ . Ce calcul peut être effectué par différentes méthodes, par exemple : régression, projection, réseau de neurones [Lagaros *et al.*, 2005], Krigeage, machine à vecteurs de support [Vapnik, 1995], etc. Ces méthodes sont qualifiées de non intrusives, faisant appel à un code déterministe existant en des points d'évaluation, en opposition aux méthodes de Galerkin ou de perturbations, qui demandent le développement de codes adaptés. Une revue des méthodes de construction de méta-modèles est disponible dans [Keane et Prasanth, 2005].

La détermination des points d'approximation et le choix des bases d'approximation sont des problématiques communes à l'ensemble des méthodes de construction de méta-modèles. Certaines méthodes reposent sur des points d'approximation prédéterminés (par exemple un plan d'expérience complet) et s'attachent soit à minimiser l'erreur commise entre la quantité d'intérêt approximée et celle qui a été calculée (régression, projection), soit à minimiser l'erreur qui serait commise si un nouveau point de calcul était fourni (réseau de neurones, machine à vecteur de support). D'autres méthodes permettent d'ajouter des points d'approximation et d'enrichir l'espace d'approximation, soit en s'appuyant sur une erreur statistique comme dans le Krigeage [Jones, 2001], soit sur une erreur stochastique en relation de comportement [Bellec, 2007], soit sur les méthodes sparse grids [Bungartz et Griebel, 2004].

### 5.1 Détermination des coefficients

**Méthode de régression** On suppose que la solution  $\underline{U}$  a été calculée pour un ensemble de  $M$  réalisations  $\underline{\xi}_k$  en résolvant l'ensemble des problèmes

$$\mathbf{A}(\underline{\xi}_k) \underline{U}(\underline{\xi}_k) = \mathbf{b}(\underline{\xi}_k) \quad k = 1, \dots, M$$

On peut ainsi déduire l'ensemble des quantités d'intérêt associées  $\mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}_k))$ . Les coefficients sont alors calculés de manière à minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart entre les valeurs mesurées et l'approximation :

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\} = \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_M}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^M \omega_k \left\| \mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}_k)) - \sum_{j \in J_p} \alpha_j \Psi_j(\underline{\xi}_k) \right\|^2$$

On considère le cas où la quantité d'intérêt est un scalaire et on note  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)^T$  le vecteur de composantes. Le problème de minimisation est alors équivalent à résoudre le système linéaire

$$\mathbf{G}\underline{\alpha} = \underline{g}$$

avec

$$(\mathbf{G})_{ij} = \sum_{k=1}^M \omega_k \Psi_i(\underline{\xi}_k) \Psi_j(\underline{\xi}_k) \quad \text{et} \quad (\underline{g})_j = \sum_{k=1}^M \omega_k \Psi_j(\underline{\xi}_k) \mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}_k))$$

L'utilisation de la méthode de régression nécessite  $M$  calculs déterministes indépendants, donc facilement parallélisables, pour évaluer les quantités  $\{\mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}_k))\}_{k=1}^M$ . Le point délicat de cette méthode réside dans le choix des points d'évaluation  $\{\underline{\xi}_k\}_{k=1}^M$  ainsi que des poids  $\{\omega_k\}_{k=1}^M$ .

Les points d'évaluation peuvent être optimisés par une étude de la matrice  $\mathbf{G}$  qui ne dépend que de l'approximation choisie.

**Méthode de projection** La méthode de projection consiste à projeter la quantité d'intérêt sur la base  $\{\Psi_j(\theta)\}_{j \in J_p}$ .

$$\langle \mathcal{J}_p(\underline{U}), v \rangle = \langle \mathcal{J}(\underline{U}), v \rangle \quad \forall v \in \text{span}\{\Psi_j(\theta), j \in J_p\}$$

les coefficients  $\alpha_j$  sont alors calculés de la manière suivante pour une base orthonormale :

$$\alpha_j = E(\Psi_j \mathcal{J}(\underline{U})) = \int_{\Theta} \Psi_j(x) \mathcal{J}(\underline{U}(x)) dP_{\underline{\xi}}(x)$$

Cette intégrale peut être évaluée par intégration numérique :

$$\alpha_j \approx \sum_{k=1}^M \omega_k \Psi_j(\underline{\xi}_k) \mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}_k))$$

où les  $\underline{\xi}_k$  sont les points d'intégration et les  $\omega_k$  sont les poids d'intégration associés. Un nombre de points, et donc de calculs déterministes, importants peut être nécessaire.

## 5.2 Choix des points d'approximation

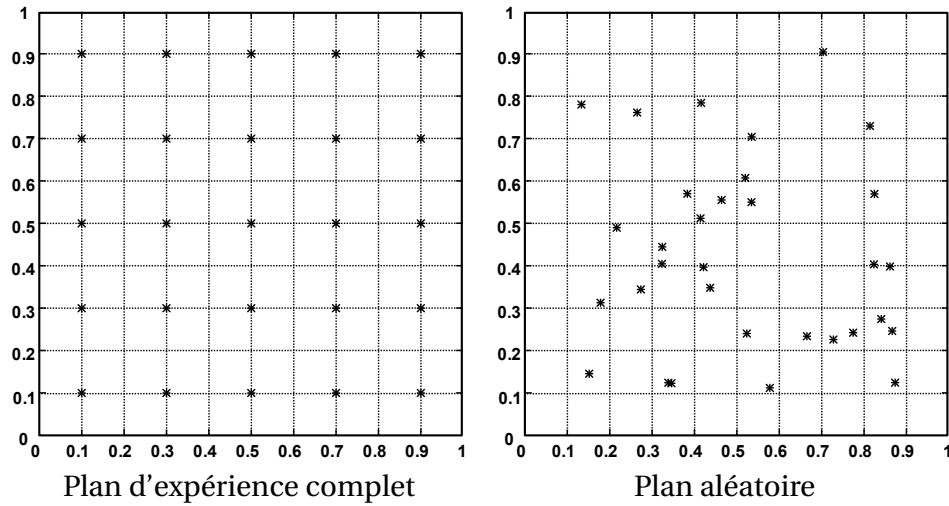
Dans le cas de méta-modèles non adaptatifs (qui ne permettent pas d'enrichissement automatique), le choix des points d'évaluation aura une forte influence sur la qualité de l'approximation. [Santner *et al.*, 2003] présente différents plans d'expérience possibles pour le choix de ces points.

Le plan d'expérience complet est le plus basique. Le nombre de points d'évaluation en  $k^p$ , avec  $p$  le nombre de variables et  $k$  le nombre d'états possibles, le rend inabordable dans la plupart des cas. Il a pourtant l'avantage de parcourir l'ensemble de l'espace de conception.

L'utilisation d'un plan aléatoire (technique de Monte-Carlo) est une alternative. L'idée de base consiste à choisir un générateur de nombres aléatoires de manière à



parcourir l'espace de conception. Cet espace ne sera pas forcément bien couvert suivant le nombre de tirages exécutés. Des méthodes permettent d'assurer une meilleure couverture en forçant la présence de points dans des bandes d'isoprobabilité (quasi Monte-Carlo).



**FIGURE 1.4 :** Plan d'expérience complet et plan aléatoire pour deux variables isoprobabilistes dans  $[0, 1]$

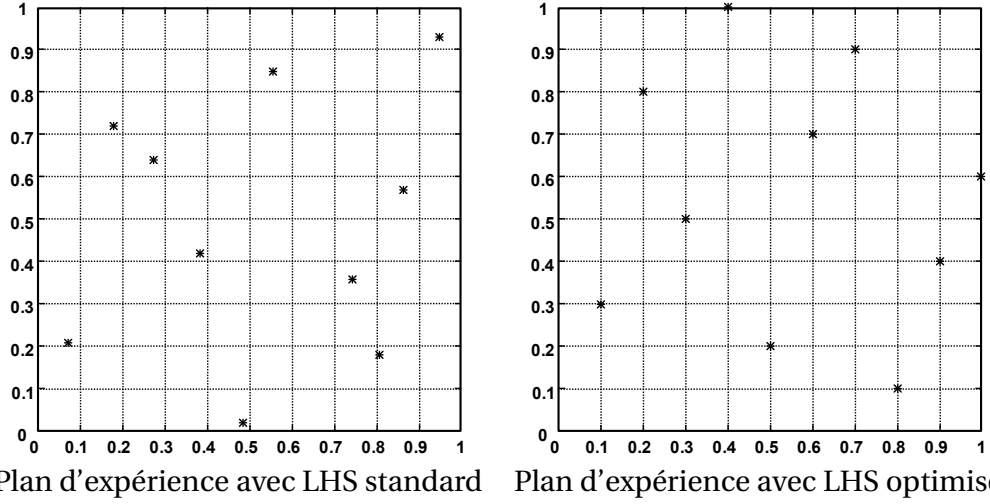
La technique de Latin hypercube (*Latin Hypercube Sampling* (LHS)) a été proposée par [Mckay *et al.*, 1979]. Chaque variable aléatoire est divisée en  $n$  bandes d'isoprobabilité; il y a alors  $n^p$  sous-intervalles dans l'espace de conception.  $n$  tirages sont réalisés de manière à ce que, pour chaque variable, il n'y ait qu'un tirage dans chaque bande. Une contrainte d'isodistance entre les tirages peut être imposée afin de garantir une bonne couverture de l'espace de conception. Des caractéristiques similaires sont obtenues en utilisant des plans d'expériences orthogonaux.

### 5.3 Krigeage

L'interpolation par processus Gaussien a été développée originellement dans le secteur de la géostatistique où cette méthode est appelée Krigeage (*Kriging*) [Cressie, 1993]. L'utilisation de cette méthode pour l'analyse de données issues de calcul à été introduite dans [Sacks *et al.*, 1989].

La quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}))$  est vue comme un processus aléatoire Gaussien stationnaire  $F(\underline{\xi})$  :

- $E(F(\underline{\xi})) = \mu_F$ ,
- $\text{Cov}(F(\underline{\xi}), F(\underline{\xi}')) = \sigma_F^2 R(\underline{\xi}, \underline{\xi}')$ ,



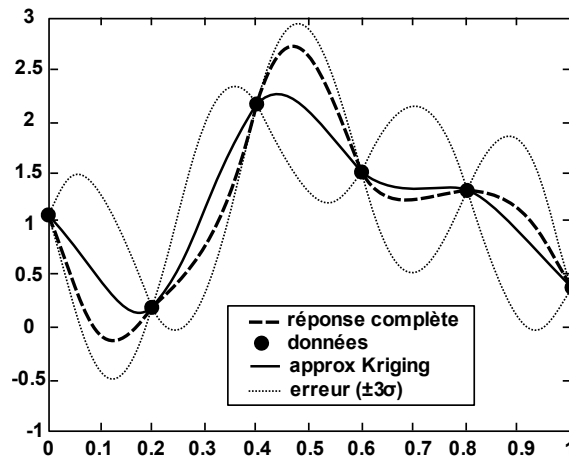
**FIGURE 1.5 :** Plans d'expérience LHS simple et optimisé pour deux variables isoprobabilistes dans  $[0, 1]$

avec  $R(\underline{\xi}, \underline{\xi}')$  une fonction de corrélation stationnaire, par exemple

$$R(\underline{\xi}, \underline{\xi}') = e^{-\sum_{i=1}^n \theta_i \|\underline{\xi} - \underline{\xi}'\|^{\pi}} \quad (1.8)$$

Les caractéristiques  $\theta_i$ ,  $\mu_F$  et  $\sigma_F^2$  de ce processus aléatoire sont identifiées à partir des points d'évaluation  $\mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}_k))$ . On dispose alors d'un modèle interpolant de  $\mathcal{J}(\underline{U}(\underline{\xi}))$ .

Une erreur d'approximation au sens statistique est disponible avec le Krigage (voir figure 1.6). La variance  $\sigma$  entre la valeur réelle et la valeur approximée peut être calculée en tous points et servir d'indicateur d'erreur. De nouveaux points d'évaluation peuvent être introduits afin de réduire cette erreur [Jones, 2001].



**FIGURE 1.6 :** Approximation par une méthode de Krigage simple

### 5.3.1 Krigeage et fiabilité

Pour le calcul de la probabilité de défaillance, [Echard *et al.*, 2010] propose d'approximer la fonction de performance  $G(\underline{\xi})$  par un méta-modèle de Krigeage dans une méthode appelée AK-MCS (pour *Active Kriging Monte-Carlo Sampling*). En partant du constat qu'en fiabilité, seul le signe de la fonction de performance joue un rôle, ils introduisent un indicateur pour estimer la probabilité que le signe de la fonction de performance approximée soit faux. Cet indicateur est noté  $U$  et a pour expression,

$$|\hat{G}(\underline{\xi})| + U(\underline{\xi})\sigma_{\hat{G}}(\underline{\xi}) = 0 \quad (1.9)$$

avec  $\hat{G}$  l'approximation par le Krigeage de  $G$  et  $\sigma_{\hat{G}}$  l'erreur de Krigeage au point considéré.  $U$  correspond au nombre d'écarts types d'erreur de Krigeage  $\sigma_{\hat{G}}$  nécessaire pour que le signe de la fonction de performance approximée soit opposé au signe de la fonction de performance exacte. Plus cet indicateur est faible, plus il est probable que le signe de la fonction de performance approximé soit faux, et donc qu'une erreur soit commise sur le calcul de la probabilité de défaillance (FIG. 1.7).

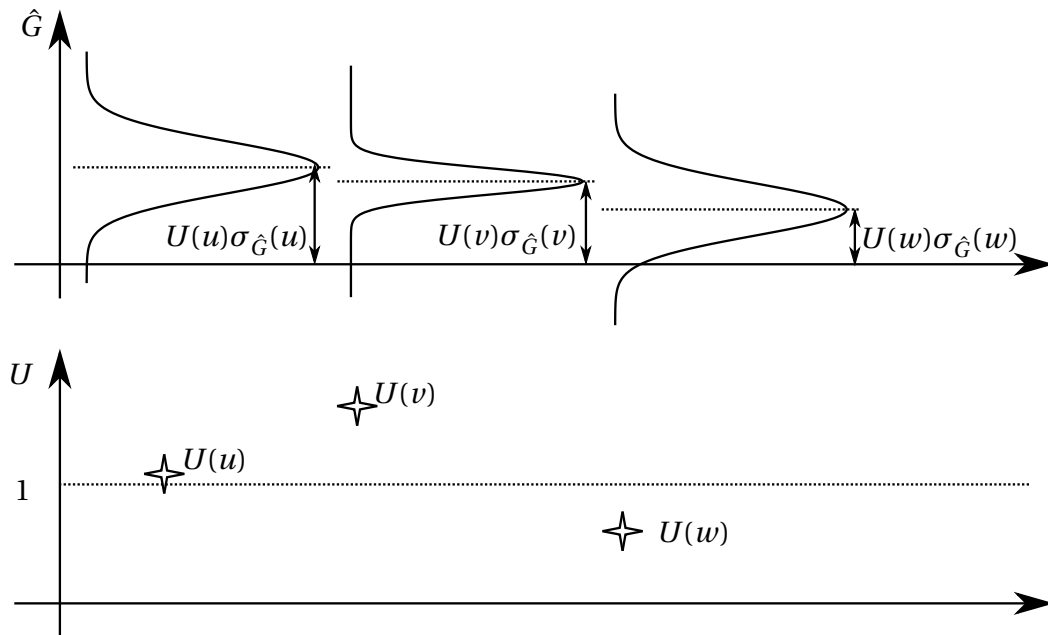


FIGURE 1.7 : Définition de l'indicateur  $U$  pour trois points

Une méthode avec apprentissage est construite autour de cet indicateur. Avec un enrichissement du méta-modèle de Krigeage aux points où l'indicateur  $U$  est plus petit que 2. L'enrichissement est stoppé et la bonne probabilité de défaillance est trouvée quand l'indicateur est plus grand que 2 sur l'ensemble du domaine de variation des variables d'entrée.

L'enrichissement demande le calcul du modèle mécanique de manière à déduire le critère SWT et donc la fonction de performance réelle  $G(\underline{\xi})$  pour la valeur des paramètres considérés.

Le nombre d'appels au modèle mécanique constaté sur des exemples à 5 variables est d'environ 30 [Echard *et al.*, 2011]. La stratégie multiparamétrique développée durant cette thèse permet de diminuer le coût de l'ensemble de ces calculs.

## 6 Bilan

Parmi les différentes techniques vues dans ce chapitre, deux semblent se dégager pour le calcul de la probabilité de défaillance. Il s'agit des méthodes FORM/SORM et de la méthode AK-MCS.

Les méthodes de Monte-Carlo ou d'intégration directe ne sont pas adaptées car elles demandent trop d'appels au modèle physique, ce qui est très coûteux en temps de calcul dans le cas d'un modèle complexe. Les méthodes de perturbation sont précises sur une trop faible plage de variation des paramètres pour pouvoir calculer une probabilité de défaillance, qui met en jeu les queues de distributions des paramètres d'entrée. La méthode spectrale est prometteuse mais demande un ordre élevé dans sa décomposition pour être précise dans les queues de distribution. L'information fournie par cette méthode est trop « riche » pour le calcul de la probabilité de défaillance où il n'est nécessaire de commettre peu d'erreur qu'à proximité de l'état limite et sur la fonction de performance. Il en résulte soit des temps de calcul importants soit une faible précision dans la probabilité de défaillance.

En revanche, les méthodes FORM/SORM permettent d'obtenir une bonne approximation de la probabilité de défaillance avec peu d'appel au modèle physique. Elles conviennent parfaitement quand la surface d'état limite est proche d'un plan (ou hyper-plan en dimension supérieure à 3). Pour des surfaces d'état limite moins régulières, la méthode AK-MCS présente l'avantage de garantir la probabilité de défaillance prédite grâce à l'introduction d'un indicateur d'erreur.

# Chapitre 2

## Méthode LATIN et stratégie multiparamétrique

*Dans ce chapitre, la méthode LATIN utilisée pour résoudre le problème non linéaire est présentée. Le problème de référence à résoudre est défini, la loi de comportement matériau est précisée. On présente ensuite la méthode LATIN de manière générale. Les paramètres de la méthode sont explicités, notamment les directions de recherche. Enfin on décrit la stratégie multiparamétrique construite sur la méthode LATIN qui permet de réduire le coût des études paramétriques.*

### Table des matières

1	Introduction . . . . .	22
2	Définition du problème de référence . . . . .	22
3	Méthode LATIN . . . . .	26
4	Étape locale . . . . .	27
5	Étape linéaire . . . . .	29
6	Stratégie multiparamétrique . . . . .	33

## 1 Introduction

L'enrichissement du méta-modèle se fait par une succession de problèmes déterministes dont les paramètres d'entrée sont fixés. Dans le projet APPROFI, le modèle matériau considéré est non linéaire. Une méthode de Newton aurait pu être utilisée pour résoudre le problème non linéaire d'évolution qui en découle. La méthode non incrémentale en temps LATIN est utilisée à la place car elle a déjà montré de bonnes performances dans le traitement de tel type de problème [Cognard et Ladevèze, 1993], mais surtout car elle permet de manière simple de diminuer les temps de calculs quand plusieurs problèmes similaires doivent être résolus [Boucard et Ladevèze, 1999, Allix et Vidal, 2002], ce qui est le cas dans le cadre d'un enrichissement d'un méta-modèle. Le gain en temps de calcul provient du fait qu'il est possible d'utiliser une solution déjà calculée comme initialisation de la méthode de part son caractère non incrémental en temps. [Boucard et Ladevèze, 1999, Allix et Vidal, 2002] ont introduit le terme de stratégie « multiparamétrique », elle est décrite dans le dernier paragraphe.

## 2 Définition du problème de référence

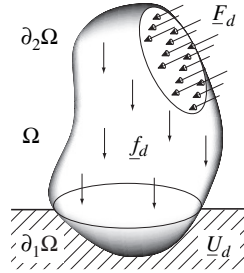


FIGURE 2.1 : Problème de référence sur le domaine  $\Omega$

Le problème référence est un problème d'évolution quasi-statique isotherme défini sur  $[0, T] \times \Omega$ , s'inscrivant dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. La structure est soumise aux efforts volumiques  $f_d$ , aux efforts  $F_d$  sur la partie  $\partial_2 \Omega$  du bord, et aux déplacements  $U_d$  sur la partie complémentaire  $\partial_1 \Omega$  (voir FIG. 2.1).

L'état de la structure est défini par l'ensemble des champs  $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\sigma}, A_k, \dot{\varepsilon}_p, \dot{V}_k)$  (où  $\dot{\phantom{x}}$  est la dérivé temporelle), avec :

- $\varepsilon_p$  la partie inélastique de la déformation  $\varepsilon$  associée au champ de déplacement  $U$ , séparée entre la partie élastique  $\varepsilon_e$  et la partie inélastique  $\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e$  ;
- $\boldsymbol{\sigma}$  le champ de contrainte de Cauchy,
- $A_k$  et  $V_k$  les champs primaux et duaux des  $k$  variables internes définissant l'état de la structure.

Ces champs sont définis sur  $[0, T] \times \Omega$  et supposés suffisamment réguliers.

## 2.1 Loi de comportement matériau

### 2.1.1 Modèle à variable internes, méthode de l'état local

La méthode de l'état local postule que l'état d'un milieu matériel en un point et à un instant donné est complètement défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré [Lemaitre et Chaboche, 1994, Chaboche *et al.*, 2009].

Les variables sont liées par des équations d'état qui découlent du premier principe de la thermodynamique. Une énergie libre  $\rho\psi(\sigma, A_k)$  est introduite qui est une première caractéristique du matériau. C'est une fonction de  $\sigma$  et  $A_k$ , et l'on a :

$$\varepsilon_e = \rho \frac{d\psi}{d\sigma} \quad (2.1a)$$

$$V_k = \rho \frac{d\psi}{dA_k} \quad (2.1b)$$

En élasticité linéaire, l'opérateur de Hooke  $\mathbf{K}$  est introduit,

$$\varepsilon_e = \mathbf{K}^{-1} \sigma \quad (2.2)$$

La propriété de découplage est présente dans de nombreux modèles avec,

$$V_k = \rho \frac{d\psi}{dA_k} = G(A_k) \quad (2.3)$$

où  $G$  est un opérateur dépendant du matériau ne dépendant pas de la contrainte.

Le second principe de la thermodynamique est assuré par l'introduction d'une équation d'évolution, qui est la deuxième caractéristique du matériau,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ -V_k \end{bmatrix} = \mathbb{B} \left( \begin{bmatrix} \sigma \\ A_k \end{bmatrix} \right) \quad \varepsilon_p = V_k = 0 \quad \text{pour } t = 0 \quad (2.4)$$

avec  $\mathbb{B}$  un opérateur positif caractéristique du matériau. Cet opérateur peut être défini par un potentiel.

### 2.1.2 Formulation normale de la relation de comportement

Dans l'équation 2.4, l'opérateur  $G$  peut être non linéaire. [Ladevèze, 1996] propose un changement de variables permettant de rendre les équations d'état linéaires, la non linéarité portant uniquement sur l'équation d'évolution. Les équations d'état s'écrivent alors,

$$\varepsilon_e = \mathbf{K}^{-1} \sigma \quad (2.5a)$$

$$\tilde{A}_k = \Lambda \tilde{V}_k \quad (2.5b)$$

avec  $\Lambda$  un opérateur linéaire. L'équation d'évolution s'écrit,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ -\tilde{V}_k \end{bmatrix} = \tilde{\mathbb{B}} \left( \begin{bmatrix} \sigma \\ \tilde{A}_k \end{bmatrix} \right) \quad \varepsilon_p = V_k = 0 \quad \text{pour } t = 0 \quad (2.6)$$

avec  $\tilde{\mathbb{B}}$  un opérateur positif caractéristique du matériau. Une formulation de ce type est dite normale. Dans la suite on supposera que le changement de variable a été effectué, et les  $\tilde{\square}$  seront omis. On pourra se référer à [Ladevèze, 1996] pour un exemple de changement de variables.

### 2.1.3 Exemple de formulation avec écrouissage cinématique de type Armstrong-Frederick

Une seule variable interne est introduite, décrivant l'écrouissage cinématique. Le champ primal est noté  $\alpha$  et le champ dual  $X$ . De manière schématisée, cette variable décrit la position du centre des surfaces équipotentielles de l'écoulement (FIG. 2.2). Un terme de rappel est introduit, qui limite la valeur que peut atteindre l'écrouissage.

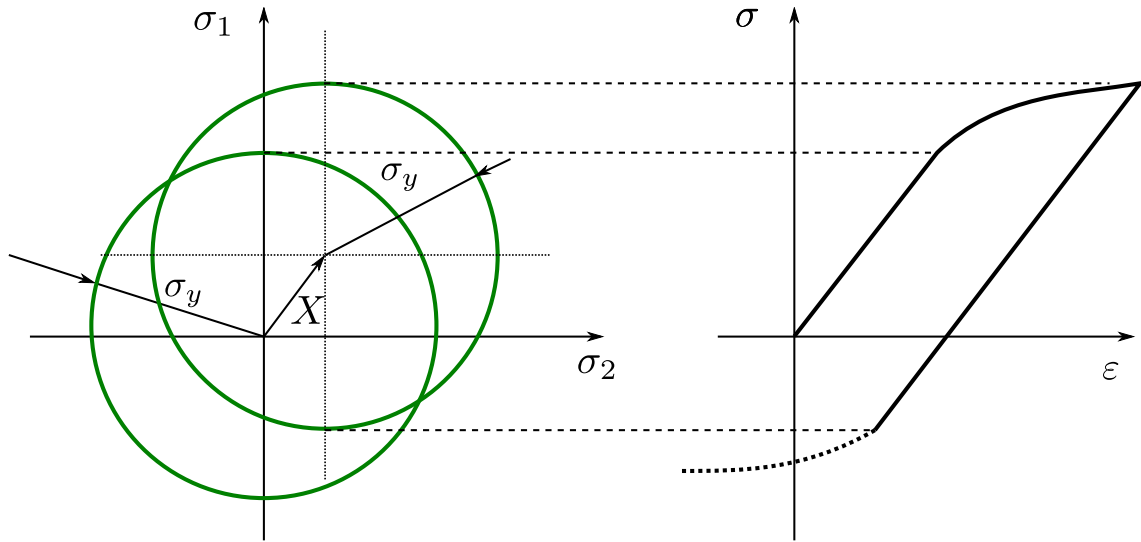


FIGURE 2.2 : Schématisation de l'action de la variable d'écrouissage

Les équations d'état sont

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{K} \varepsilon_e \\ X &= \frac{2}{3} C \alpha \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec  $\mathbf{K}$  l'opérateur de Hooke (module d'Young  $E$  et coefficient de poisson  $\nu$ ),  $C$  un paramètre matériau scalaire. Dans sa formulation usuelle, cette formulation est standard, aucun changement de variable n'est donc nécessaire.

Un seuil élastique est introduit pour définir l'équation d'évolution,

$$f = J_2(\sigma - X) - \sigma_y \quad (2.8)$$



avec  $J_2(\boldsymbol{\sigma} - X)^{1/2}$  la contrainte équivalente de Von Mises et  $\sigma_y$  un paramètre matériau scalaire. On introduit le potentiel de dissipation non associé  $F$  qui intègre le terme de rappel de l'écrouissage,

$$F = f + \frac{3\gamma}{4C} X : X - \frac{2\gamma C}{3} \alpha : \alpha \quad (2.9)$$

avec  $\gamma$  un paramètre matériau scalaire. L'équation d'évolution dérive de  $F$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= \dot{p} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{p} \frac{3/2(\boldsymbol{\sigma}^D - X)}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - X)} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= -\dot{p} \frac{\partial F}{\partial X} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \dot{p} \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} X \end{aligned} \quad (2.10)$$

où  $\dot{p}$  est le multiplicateur plastique, et  $\square^D$  dénote la partie déviatorique du champ. L'opérateur  $\mathbb{B}$  tel que  $[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad -\dot{\boldsymbol{\alpha}}]^T = \mathbb{B} \left( [\boldsymbol{\sigma} \quad X]^T \right)$  est alors défini. On peut remarquer qu'il n'agit que sur la partie déviatorique des champs.

Dans le cas d'un matériau élastoplastique, le multiplicateur plastique est déterminé par les conditions

$$f \leq 0, \quad \dot{f} = 0 \quad (2.11)$$

Dans un modèle élastoviscoplastique, l'intensité du multiplicateur plastique dépend du dépassement du seuil, nous avons choisit une loi de Norton,

$$\dot{p} = \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle_+^N \quad (2.12)$$

avec  $K, N$ , des paramètres matériau scalaires, et  $\langle \square \rangle_+$  la partie positive. Les valeurs des paramètres matériaux sont données dans le tableau 2.1.

	E (MPa)	$\nu$	$\sigma_y$ (MPa)	C	$\gamma$	$K$ (MPa.s <sup>1/N</sup> )	N
élastoplastique	191500	0,3	310	131 000	570		
élastoviscoplastique	"	"	25	"	"	600	10

**Tableau 2.1** : Valeurs des coefficients matériaux en élastoplastique [Lemaitre et Chaboche, 1994] et en élastoviscoplastique pour un TA 6 V

**Remarque** Les valeurs données dans le tableau 2.1 correspondent aux valeurs moyennes (nominale). Pour l'évaluation de la probabilité de défaillance, un modèle probabiliste est considéré et les valeurs sont données par leurs répartition de probabilité. Dans l'approche du projet APPROFI, le calcul de la probabilité de défaillance conduit à résoudre le problème déterministe avec différents jeux de ces valeurs à l'aide de la stratégie multiparamétrique.

1.  $J_2(\square) = \sqrt{\frac{3}{2} \square^D : \square^D}$

## 2.2 Conditions d'admissibilité et définitions des espaces

On introduit les espaces suivants et les espaces vectoriels correspondant (notés  $\square^\star$ ) :

- l'espace  $\mathcal{U}$  des champs de déplacement  $\underline{U}$  admissibles tels que

$$\underline{U}|_{t=0} = \underline{U}_0 \text{ et } \underline{U} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega \quad (2.13)$$

- l'espace  $\mathcal{F}$  des champs statiquement admissibles  $\sigma$  tels que  $\forall \underline{U}^\star \in \mathcal{U}^\star$

$$-\int_{[0,T] \times \Omega} \sigma : \varepsilon(\underline{U}^\star) d\Omega dt + \int_{[0,T] \times \Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^\star d\Omega dt + \int_{[0,T] \times \partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^\star dS dt = 0 \quad (2.14)$$

- l'espace  $\mathcal{E}$  des champs cinématiquement admissibles  $\varepsilon$  tels que  $\exists \underline{U} \in \mathcal{U}$ ,  $\varepsilon = \nabla_{sym} \underline{U}$ , qui s'écrit sous forme faible,

$$\forall \sigma \in \mathcal{F}^\star, \quad -\int_{[0,T] \times \Omega} \sigma^\star : \varepsilon d\Omega dt + \int_{[0,T] \times \partial_1 \Omega} \sigma^\star \underline{n} \cdot \underline{U}_d = 0 \quad (2.15)$$

- l'espace  $\mathbf{A}_d$  des champs admissibles  $\mathbf{s}$  tel que  $(\mathbf{K}^{-1} \sigma + \varepsilon_p) \in \mathcal{E}$ ,  $\sigma \in \mathcal{F}$  et que l'équation d'état 2.1 est vérifiée.

- l'espace  $\Gamma$  des champs  $\mathbf{s}$  tel que l'équation d'évolution 2.4 est vérifiée.

La solution du problème vérifie les conditions d'admissibilité ainsi que les lois d'évolution. Elle est à l'intersection des espaces  $\mathbf{A}_d$  et  $\Gamma$ ,

$$\mathbf{s} \in \mathbf{A}_d \cap \Gamma \quad (2.16)$$

## 3 Méthode LATIN

La résolution d'un problème non linéaire pose la double difficulté de trouver l'équilibre global de la structure ( $\mathbf{s} \in \mathbf{A}_d$ ) et de vérifier les lois non-linéaires matériau ( $\mathbf{s} \in \Gamma$ ). Les solveurs non linéaires classiques de type Newton sont incrémentaux en temps. La méthode LATIN est une méthode non incrémentale en temps. Il s'agit d'une procédure itérative qui consiste à trouver alternativement une approximation de la solution  $\mathbf{s}$  sur tout l'intervalle de temps, dans  $\mathbf{A}_d$  (équilibre global) et dans  $\Gamma$  (loi d'évolution non linéaire). Plus de détails sont disponibles dans [Ladevèze, 1996, Ladevèze, 1999].

Une itération  $n$  de la méthode LATIN est ainsi constituée d'une étape locale et d'une étape linéaire définies de la manière suivante :

- connaissant une solution  $\mathbf{s}_{n-1}$  dans  $\mathbf{A}_d$ , l'étape locale consiste à trouver une solution locale  $\hat{\mathbf{s}}$  dans  $\Gamma$  suivant une direction de recherche locale  $\mathbf{E}^+$ , paramètre de la méthode,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{s}} \in \Gamma \\ \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_{n-1} \in \mathbf{E}^+ \end{cases} \quad (2.17)$$

- connaissant une solution  $\hat{\mathbf{s}}$  dans  $\Gamma$ , l'étape linéaire consiste à trouver une solution linéaire  $\mathbf{s}_n$  dans  $\mathbf{A}_d$  suivant une direction de recherche linéaire  $\mathbf{E}^-$ , paramètre de la méthode,

$$\begin{cases} \mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d \\ \mathbf{s}_n - \hat{\mathbf{s}} \in \mathbf{E}^- \end{cases} \quad (2.18)$$

Une initialisation simple de l'algorithme est la solution élastique, qui est dans  $\mathbf{A}_d$ . Une schématisation d'une itération de la LATIN est proposée FIG. 2.3.

Afin de garantir la convergence de la méthode, une régularisation est introduite.

$$\mathbf{s}_n \leftarrow \mu \mathbf{s}_n + (1 - \mu) \mathbf{s}_{n-1} \quad (2.19)$$

le paramètre de régularisation  $\mu$  prend usuellement une valeur comprise entre 0,5 et 0,8.

Un indicateur d'erreur peut être construit à chaque itération de la LATIN sur la distance entre la solution issue de l'étape locale et celle issue de l'étape linéaire,

$$\eta_{LATIN} = \frac{\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_n\|}{\|\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{s}_n\|} \quad (2.20)$$

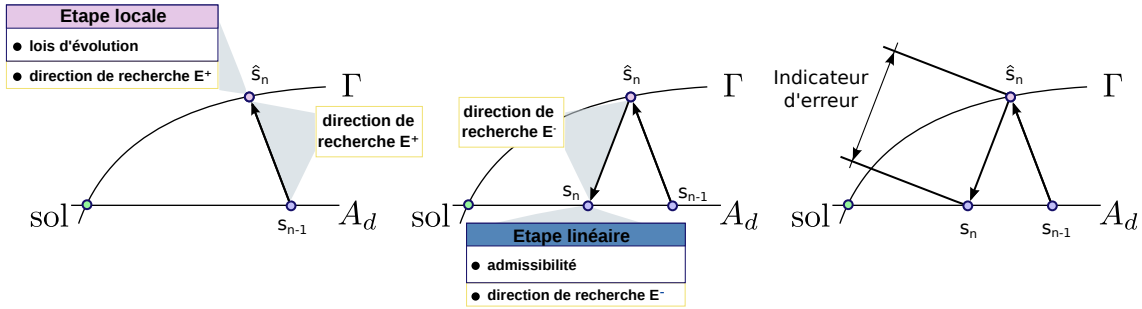


FIGURE 2.3 : Schématisation d'une itération de la méthode LATIN

## 4 Étape locale

Connaissant une solution  $\mathbf{s}_{n-1}$  dans  $\mathbf{A}_d$ , l'étape locale consiste à trouver une solution locale  $\hat{\mathbf{s}}$  dans  $\Gamma$  suivant une direction de recherche locale. Deux directions de recherche sont présentées ici.

### 4.1 Direction de recherche simple

La direction de recherche locale la plus simple en terme d'implémentation conserve les quantités duales, par exemple pour la formulation avec un écrouissage cinématique,

$$\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_{n-1} \in \mathbf{E}^+ \Rightarrow \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_{n-1} \\ \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_{n-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

L'étape locale consiste alors dans un premier temps à calculer la valeur de la fonction seuil (EQ. 2.8) connaissant  $\hat{\sigma} = \sigma_{n-1}$  et  $\hat{X} = X_{n-1}$  ; puis de calculer le multiplicateur plastique à l'aide de l'équation 2.12 ; et enfin d'appliquer les lois d'évolution (EQ. 2.10). Toutes ces opérations sont locales en espace et en temps et traitées aux points de Gauss et piquets de temps de manière parallèle.

Avec cette direction de recherche locale, la méthode LATIN s'apparente à une méthode de Newton sur les processus-champs.

## 4.2 Direction de recherche optimisée

Afin d'obtenir un meilleur taux de convergence, il est possible de choisir une direction de recherche prenant en compte les quantités primales et duales issues de l'étape linéaire. La méthode LATIN dans le cas stationnaire est alors similaire à un algorithme le Lagrangien augmenté avec projection proposé par [Ladevèze, 1981]. Ceci apparaît dans [Cognard, 1989], puis dans [Artz, 1994] dans une version simplifiée. La version simplifiée est ici brièvement décrite pour la formulation avec un écrouissage cinématique.

Les lois d'évolution sont inversées pour exprimer les quantités duales  $(\hat{\sigma}_c, \hat{X}_c)$  en fonction des quantités primales  $(\dot{\epsilon}_p, \dot{\alpha}_{n-1})$  issues de l'étape linéaire. Pour simplifier les notations, les indices  $n-1$  sont omis. Le multiplicateur plastique a pour expression

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p} \quad (2.22)$$

La fonction seuil dépend du multiplicateur,

$$f(\hat{\sigma}_c, \hat{X}_c) = K \dot{p}^{1/N} \quad (2.23)$$

qui permet de déterminer la contrainte de Mises

$$J_2(\hat{\sigma}_c - \hat{X}_c) = f(\hat{\sigma}_c, \hat{X}_c) + \sigma_y \quad (2.24)$$

ainsi que la valeur de l'écrouissage cinématique,

$$\hat{X}_c = -\frac{2}{3} \frac{1}{\dot{p}} \gamma^{-1} C(\dot{\alpha} - \dot{\epsilon}_p) \quad (2.25)$$

La contrainte peut alors être calculée,

$$\hat{\sigma}_c = \frac{2}{3} \frac{1}{\dot{p}} J_2(\hat{\sigma}_c - \hat{X}_c) \dot{\epsilon}_p + \hat{X}_c \quad (2.26)$$

Ces quantités duales sont combinées avec les quantités duales issues de l'étape linéaire. Une pondération  $\nu$  dépendant du potentiel dual de dissipation est utilisée.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= (1 - \nu^3) \sigma + \nu^3 \hat{\sigma}_c \\ \hat{X} &= (1 - \nu) X + \nu \hat{X}_c \end{aligned} \quad (2.27)$$

où

$$v = \frac{\phi^\star}{1 + \phi^\star} \quad (2.28)$$

avec

$$\phi^\star = \frac{K}{N+1} \dot{p} \dot{p}^{1/N} \quad (2.29)$$

Avec ces valeurs pour les quantités duales  $(\hat{\sigma}, \hat{X})$ , les quantités primales vérifiant la loi d'évolution sont calculées de la même manière que dans le paragraphe 4.1.

## 5 Étape linéaire

Connaissant une solution  $\hat{\mathbf{s}}$  dans  $\Gamma$ , l'étape linéaire consiste à trouver une solution linéaire  $\mathbf{s}_n$  dans  $\mathbf{A}_d$  suivant une direction de recherche, comme dans un algorithme de Newton. Le choix de la direction de recherche détermine le taux de convergence. La facilité d'implémentation doit cependant être prise en compte.

### 5.1 Direction de recherche

La direction de recherche linéaire choisie est une pseudo tangente à l'espace  $\Gamma$ . On fait le choix d'une séparation de l'étape linéaire en une partie concernant la déformation plastique et la contrainte et une autre concernant l'écroutissage cinématique, par exemple pour la formulation avec un écroutissage cinématique,

$$\mathbf{s}_n - \hat{\mathbf{s}} \in \mathbf{E}^- \Rightarrow \begin{cases} \Theta_{\sigma}^-(\sigma - \hat{\sigma}) - (\dot{\epsilon}_p - \hat{\dot{\epsilon}}_p) = 0 \\ \Theta_X^-(X - \hat{X}) - (\dot{\alpha} - \hat{\dot{\alpha}}) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

avec,

$$\Theta_{\sigma}^-(M, t) = \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\hat{\sigma}} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \dot{p} * \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} \quad (2.31a)$$

$$\Theta_X^-(M, t) = \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial X} \Big|_{X=\hat{X}} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial X} \otimes \frac{\partial F}{\partial X} + \dot{p} * \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \quad (2.31b)$$

où  $\otimes$  dénote le produit tensoriel. Pour la formulation d'Amstrong-Frederic, les dérivées premières du pseudo potentiel ont été explicitées dans l'expression des lois d'évolution (Eq. 2.10), les dérivées secondes ont pour expression,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = \frac{3}{2} \frac{\left( J_2(\sigma - X) \mathbb{1}^D - \frac{3}{2} \frac{(\sigma^D - X) \otimes (\sigma^D - X)}{J_2(\sigma - X)} \right)}{J_2(\sigma - X)^2} \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} + \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \mathbb{1} \quad (2.32b)$$

avec  $\mathbb{1}$  l'opérateur identité et  $\mathbb{1}^D$  l'opérateur identité sur les déviateurs. En notation vectorielle,  $\mathbb{1}^D$  a pour expression,

$$\mathbb{1}^D = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Dans le cas élastoviscoplastique, le multiplicateur plastique est continûment différentiable avec,

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial \sigma} = N \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle_+^{(N-1)} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = N \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle_+^{(N-1)} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (2.34a)$$

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial X} = N \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle_+^{(N-1)} \frac{\partial f}{\partial X} = - \frac{\partial \dot{p}}{\partial \sigma} \quad (2.34b)$$

Ce qui n'est pas le cas élastoplastique. Dans ce cas, la direction de recherche de la formulation élastoviscoplastique peut être utilisée. On peut remarquer que l'opérateur de direction de recherche  $\Theta_\sigma^-$  n'agit que sur la partie déviatorique des champs, comme l'opérateur  $\mathbb{B}$ .

## 5.2 Mise à jour de la direction de recherche

De même qu'il existe des variantes de la méthode de Newton, il est possible de définir des variantes de la LATIN. Pour cela, il suffit de modifier la direction de recherche associée à l'étape linéaire en choisissant, par exemple, une direction de recherche fixe pour plusieurs itérations et définir ainsi la méthode de Newton modifiée, appliquée aux processus-champs. Pour cette variante l'opérateur de l'étape globale est alors défini par :

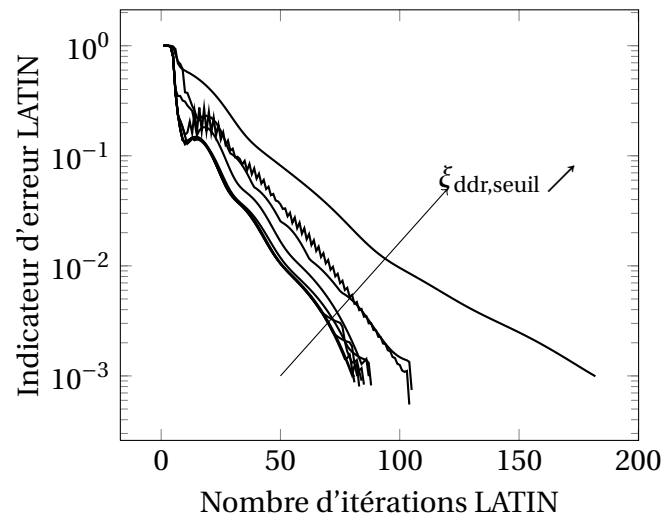
$$\Theta^-(M, t) = \Theta_0^-(M, t) \quad (2.35)$$

où  $\Theta_0^-(M, t)$  dépend de l'espace et du temps, et est fixé pour plusieurs itérations. Ceci permet de réduire le coût des étapes linéaires, comme nous le verrons dans la suite.

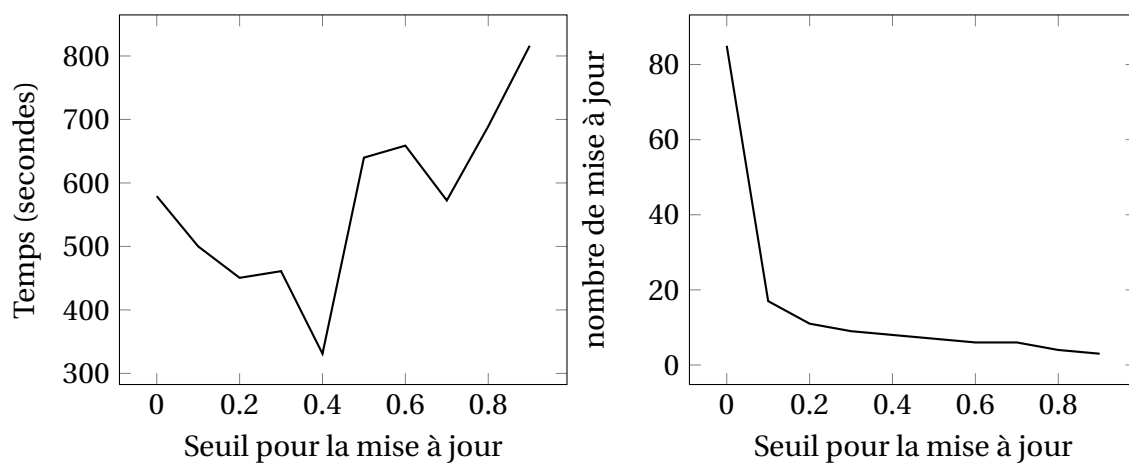
Un critère sur le taux de déformation plastique à l'issue de l'étape locale peut être utilisé pour déterminer si la direction de recherche doit être mise à jour. En notant  $\hat{\varepsilon}_{p_0}(M, t)$  le taux de déformation plastique pour laquelle la direction de recherche a été calculée, l'indicateur  $\xi_{\text{ddr}}$  est défini par,

$$\xi_{\text{ddr}} = \frac{\|\hat{\varepsilon}_p(M, t) - \hat{\varepsilon}_{p_0}(M, t)\|}{\|\hat{\varepsilon}_{p_0}(M, t)\|} \quad (2.36)$$

En pratique la valeur seuil  $\xi_{\text{ddr,seuil}}$  de 40% est utilisée pour mettre à jour la direction de recherche. Cette valeur est choisi comme meilleur compromis entre le nombre d'itérations et le temps de calcul. Cette valeur est choisie après un test sur un problème de point de Gauss (FIG. 2.4, FIG. 2.5).



**FIGURE 2.4 :** Indicateur d'erreur LATIN en fonction du nombre d'itérations pour différents seuils de l'indicateur de mise à jour de la direction de recherche



**FIGURE 2.5 :** Temps de calcul et nombre de mises à jour de la direction de recherche en fonction du seuil pour la mise à jour de la direction de recherche

### 5.3 Résolution

Le choix d'une direction de recherche séparant la relation entre les variables internes et la relation entre la contrainte et la déformation permet de séparer la résolution de l'étape linéaire de la même manière. En effet, tant que la propriété de découplage 2.3 est admise, comme par exemple pour le cas de la formulation d'Armstrong-Frederick, on peut écrire l'étape linéaire en deux blocs,

$$\begin{cases} \mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d \\ \mathbf{s}_n - \hat{\mathbf{s}} \in \mathbf{E}^- \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma \in \mathcal{F} \\ (\mathbf{K}^{-1}\sigma + \varepsilon_p) \in \mathcal{E} \\ \sigma = \mathbf{K}\varepsilon_e \\ \Theta_{\sigma}^-(\sigma - \hat{\sigma}) - (\dot{\varepsilon}_p - \hat{\dot{\varepsilon}}_p) = 0 \\ X = \frac{2}{3}C\alpha \\ \Theta_X^-(X - \hat{X}) - (\dot{\alpha} - \hat{\dot{\alpha}}) = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Chaque bloc peut être résolu séparément, avec un problème sur la contrainte et les déformations qui consiste à trouver  $\sigma$ ,  $\varepsilon_e$ , et  $\varepsilon_p$  tels que

$$\begin{cases} \sigma \in \mathcal{F} \\ (\mathbf{K}^{-1}\sigma + \varepsilon_p) \in \mathcal{E} \\ \sigma = \mathbf{K}\varepsilon_e \\ \Theta_{\sigma}^-(\sigma - \hat{\sigma}) - (\dot{\varepsilon}_p - \hat{\dot{\varepsilon}}_p) = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

et un problème sur les variables internes, qui consiste à trouver  $X$  et  $\alpha$  tels que,

$$\begin{cases} X = \frac{2}{3}C\alpha \\ \Theta_X^-(X - \hat{X}) - (\dot{\alpha} - \hat{\dot{\alpha}}) = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Le problème sur les variables internes est une équation différentielle à résoudre en tous points. En effet en remplaçant  $X$  dans la deuxième équation, on a,

$$\begin{cases} X = \frac{2}{3}C\alpha \\ \Theta_X^-(\frac{2}{3}C\alpha - \hat{X}) - (\dot{\alpha} - \hat{\dot{\alpha}}) = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

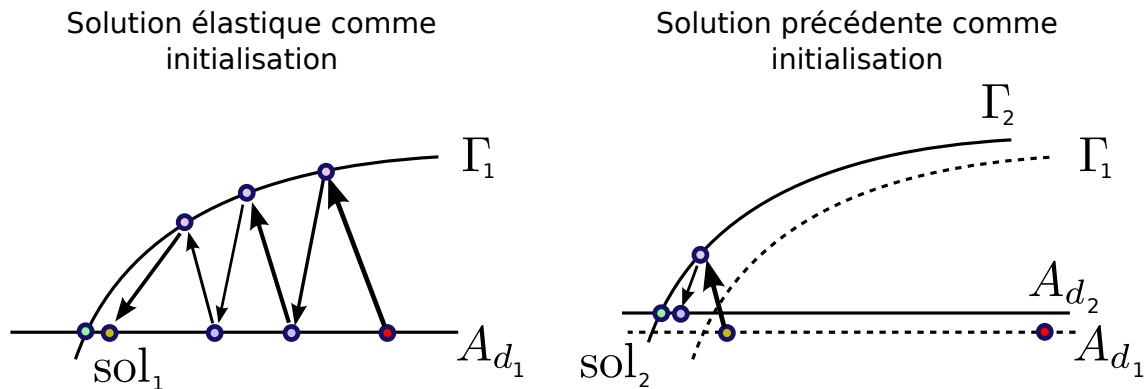
Cette résolution ne pose pas de difficultés particulières une fois le schéma en temps choisi.

Le problème sur la contrainte et les déformations est un problème global sur la structure. Il est possible de le résoudre de manière incrémentale mais le coût de calcul est important. Une méthode introduisant une approximation dite radiale ou PGD est donc préférée. Cette méthode est décrite dans les chapitres suivants.



## 6 Stratégie multiparamétrique

La stratégie multiparamétrique [Boucard et Ladevèze, 1999, Vidal, 2001, Allix et Vidal, 2002, Boucard et Champaney, 2003] a pour objectif de fournir la solution d'un problème non linéaire d'évolution pour certaines valeurs des paramètres de ce problème de manière rapide, en utilisant la solution déjà calculée de ce même problème avec des valeurs de paramètres « proches ». Cette stratégie est très liée à la méthode LATIN. Elle repose sur le caractère non incrémental en temps de cette méthode, qui permet de choisir comme initialisation n'importe quelle solution déjà calculée. Le schéma 2.6 permet de saisir cette idée d'un coup d'œil. Le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est souvent plus faible avec comme initialisation la solution du problème avec des valeurs des paramètres proches plutôt qu'avec la solution élastique.



**FIGURE 2.6 :** Illustration du choix de l'initialisation pour la méthode LATIN dans le cas des résolutions successives d'un problème paramétré pour deux jeux des valeurs des paramètres.

Cette idée n'est pas nouvelle, puisqu'elle est présente dans toutes les méthodes itératives de résolution. La particularité de la stratégie multiparamétrique est qu'elle s'applique aux problèmes non linéaires d'évolution paramétrés.

Le choix des valeurs des paramètres proches, permettant de minimiser le nombre d'itérations, n'est pas forcément trivial et fait parti de la stratégie. [Boucard *et al.*, 2010] proposent d'utiliser un critère de distance dans l'espace des paramètres et dans l'espace des solutions pour déterminer la meilleure initialisation.

Dans [Boucard et Champaney, 2003, Champaney *et al.*, 2008, Boucard *et al.*, 2011], la stratégie multiparamétrique est appliquée à la résolution de problème d'assemblage de pièces élastiques avec contact frottant avec comme paramètres variables du problème les coefficients de frottement. La solution est alors décrite entièrement par la donnée du champ de déplacement et d'effort aux niveaux des interfaces, la solution dans les pièces se déduisant à faible coût de ces quantités.

Dans le cas de cette thèse, on s'intéresse à des problèmes dont la solution est décrite par la donnée de l'évolution en temps des champs de contrainte, de déformation plastique, et des variables internes. La quantité de données à stocker est donc consi-

dérable. Ce constat est valable tant pour la stratégie multiparamétrique que pour une résolution unique pour un jeu de paramètres avec la LATIN. Pour diminuer le coût de calcul et de stockage, un modèle réduit de la solution est recherché. L'ensemble des quantités sont recherchées et stockées sous forme décomposée comme somme de produits de fonctions du temps et de l'espace. Cette décomposition a été introduite la première fois dans [Ladevèze, 1985a] sous la dénomination de « décomposition radiale ». Suite aux travaux de [Chinesta *et al.*, 2010] qui s'en sont inspiré, le nom plus général de ce type de décomposition est *Proper Generalized Decomposition* (PGD).

La stratégie multiparamétrique gagne en efficacité avec le modèle réduit pour ce type de problème par rapport au simple transfert de la solution à l'initialisation. En effet en plus d'une initialisation pertinente, un modèle réduit où les calculs sont rapides est transmis d'une résolution à une autre. De plus une latitude supplémentaire est ajoutée à la méthode, puisqu'il est possible de conserver si on le souhaite seulement une partie des fonctions de la décomposition d'une résolution à une autre. Ces points sont détaillés dans la partie 4 du chapitre 4.

# Chapitre 3

## Réduction de modèle et stratégies multirésolutions

*Dans ce troisième chapitre, on présente des méthodes de réduction de modèle fondées sur la recherche de la solution dans un espace adapté au modèle et de petite dimension. La méthode POD de décomposition d'une fonction est tout d'abord décrite. On remarque que cette décomposition permet d'accéder à une bonne approximation d'une fonction sur peu de « modes ». Ceci justifie le fait que la solution d'un problème peut être recherchée dans un espace de petite dimension. On présente ensuite une brève bibliographie de méthodes de réduction de modèle. La méthode de réduction de modèle PGD est décrite avec différents algorithmes pour sa construction. Une ouverture est faite sur les stratégies multirésolutions.*

### Table des matières

1	Introduction . . . . .	36
2	POD . . . . .	36
3	Réduction de modèle . . . . .	38
4	Réduction de modèle avec la PGD . . . . .	42
5	Stratégies multirésolutions . . . . .	44

## 1 Introduction

Le stockage de l'ensemble des solutions pose problème dans la stratégie multiparamétrique. Le calcul dans la méthode LATIN des étapes linéaires qui mettent en jeu des problèmes sur tout l'intervalle de temps et sont globaux en espace sont trop coûteux si l'on n'utilise pas une méthode de réduction de modèle.

La réduction de modèle repose sur l'idée que comme une fonction quelconque peut être représentée sous forme décomposée en peu de « modes » (par exemple avec la *Proper Orthogonal Decomposition* (POD)), la solution d'un problème, même complexe, si elle est recherchée dans un espace engendré par ces « modes » conduit à la résolution d'un petit système. Le problème est ainsi réduit. Il est évidemment difficile de connaître les modes avant d'avoir résolu. La plupart des méthodes de réduction de modèle procèdent donc avec des algorithmes gloutons. Un indicateur d'erreur est introduit et permet d'évaluer l'écart entre la solution du problème complet (qui est cher à résoudre et dont on ne connaît pas la solution) et la solution du modèle réduit. Le modèle réduit est enrichi de manière itérative par des « modes » pour réduire cette erreur.

La réduction d'un problème linéaire est plus simple que celle d'un problème non linéaire car le principe de superposition est alors valable. La méthode LATIN est donc un outil intéressant pour la construction d'un modèle réduit d'un problème non linéaire car, à chaque itération de la LATIN, une approximation linéaire du problème est construite (étape linéaire de la LATIN).

Dans ce qui suit, la *Proper Orthogonal Decomposition* est tout d'abord présentée, on montre sur deux exemples qu'une fonction connue peut être représentée sur peu de « modes ». Une bibliographie de différentes méthodes de réduction de modèle est ensuite effectuée. La méthode de réduction de modèle *Proper Generalized Decomposition* est décrite brièvement. Une ouverture est finalement faite sur les stratégies multirésolutions.

## 2 POD

La *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) [Pearson, 1901] consiste à trouver la décomposition d'une fonction de deux variables sous la forme d'une somme de produits de fonctions de ces variables.

$$u(\underline{M}, t) \approx \check{u}_m(\underline{M}, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{M}) \quad (3.1)$$

Elle est construite de manière à minimiser l'erreur entre la décomposition tronquée et la fonction originale selon la norme  $\|\square\|$  donnée.

$$\|u - \check{u}_m\| = \min_{\substack{\{\lambda_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{L}_2^m \\ \{\Lambda_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{L}_2^m}} \left\| u - \sum_{i=1}^m \lambda_i \Lambda_i \right\| \quad (3.2)$$

## 2.1 Construction de la POD

L'article [Liang *et al.*, 2002] montre l'équivalence, dans le cas discret et pour la norme  $\mathcal{L}^2$ , des trois façons de construire la POD : la *Décomposition de Karhunen-Loeve* (KLD), l'*analyse en composantes principales* (PCA) et la *décomposition en valeurs singulières* (SVD).

Par exemple dans le cas discret, les valeurs de la fonction  $f$  pour  $n$  valeurs connues en  $p$  instants sont mises sous la forme d'une matrice  $A$  de  $p \times n$ . Pour la KLD et la PCA, la décomposition est trouvée en recherchant les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de covariance  $C = AA^T$ . Les vecteurs propres de cette matrice sont les fonctions  $\Lambda_i(\underline{M})$ . Les fonctions  $\lambda_i(t)$  sont calculées de la manière suivante :

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^p \Lambda_j A \quad (3.3)$$

## 2.2 Exemple

On reprend l'exemple traité dans [Chatterjee, 2000]. La fonction considérée a pour expression analytique,

$$u(x, t) = \exp(-|(x - 0.5)(x - 1)|) + \sin(xt) \quad (3.4)$$

On effectue sa décomposition avec la POD et on tronque la décomposition à l'ordre 1, 2, ou 3. On remarque que la décomposition à l'ordre 1 présente déjà une très bonne approximation de la fonction (FIG. 3.1), ce qui peut être mis en relation avec la répartition des valeurs singulières (FIG. 3.2).

Si l'on considère maintenant une image en niveau de gris, on remarque que les valeurs singulières diminuent moins vite (FIG. 3.3) et qu'une approximation à un ordre élevé est nécessaire pour que l'image soit proche de la référence (FIG. 3.4). La POD est construite de manière à ce que l'erreur entre l'approximation et la fonction de départ soit les plus proches possibles au sens de la norme, et a tendance à capturer en premier les caractéristiques globales. La POD n'est donc pas adaptée si la quantité d'intérêt est une expression du visage caractérisée par la position des sourcils, d'autres algorithmes de réduction de données sont utilisés dans ce cas.

## 2.3 Bilan

On remarque qu'il est possible de tronquer la décomposition POD à un ordre faible tout en conservant une erreur faible entre la fonction initiale et sa décomposition. Autrement dit, il est possible de réduire une fonction donnée en la projetant sur un espace de fonctions adapté.

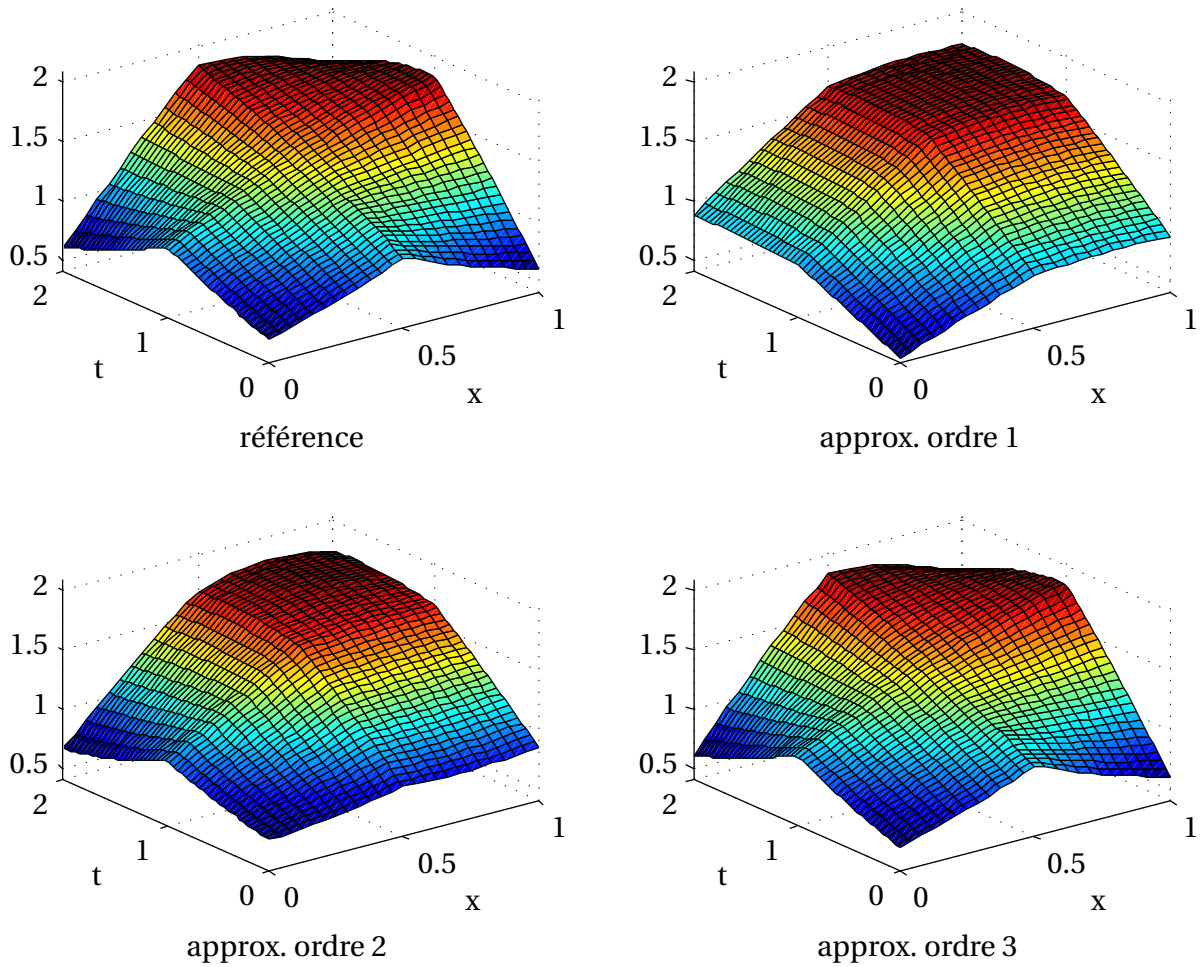


FIGURE 3.1 : Fonction de référence et POD tronquées aux ordres 1, 2 et 3

### 3 Réduction de modèle

La POD permet d'approximer une fonction avec une erreur faible sur peu de fonctions. Si l'on considère maintenant que l'on cherche la solution d'un problème, une idée est de la rechercher dans une base engendrée par ces fonctions. En recherchant la solution dans un espace de petite dimension, on réduit la taille du problème, d'où la terminologie de réduction de modèle. La difficulté tient à ce qu'avant d'avoir résolu le problème complet, on ne connaît pas la solution et donc la base adaptée. Cependant, des méthodes comme la ROM-POD, les *reduced basis*, permettent à partir de résolutions partielles du problème d'obtenir une solution proche de la solution complète et donc d'en déduire une base. La méthode *Proper Generalized Decomposition* (PGD) propose quant à elle de fixer la forme de la décomposition en variables séparées et de construire la base pendant le calcul.

La réduction de modèle est proche des méta-modèles décrits dans le paragraphe 5 du chapitre 1, la différence tient plus à des usages dans des communautés différentes

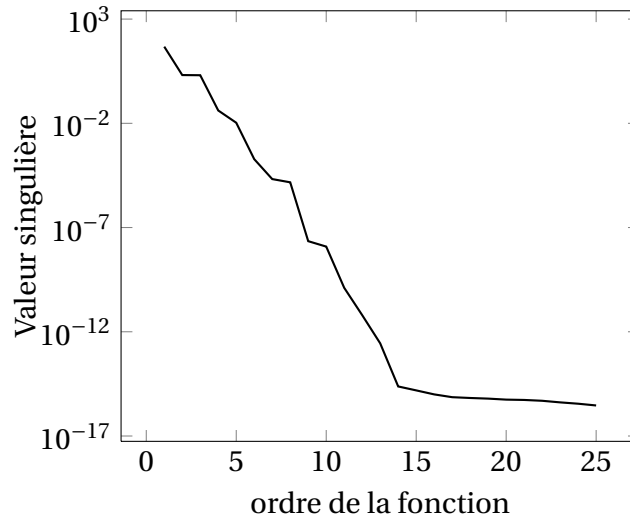


FIGURE 3.2 : Valeurs singulières

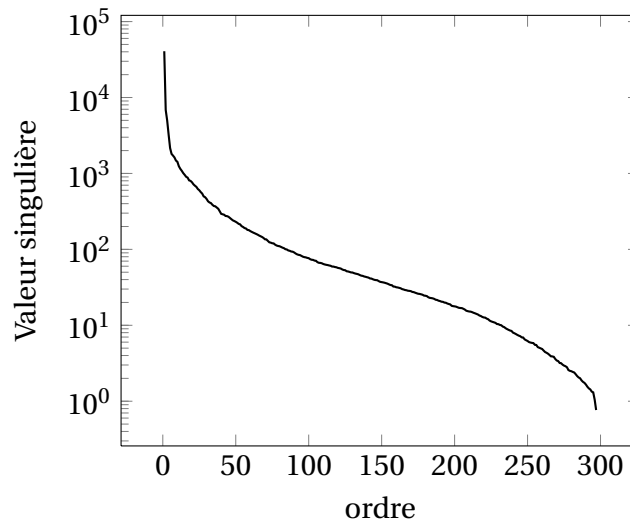


FIGURE 3.3 : Valeurs singulières pour la photo

(stochastique ou déterministe) qu'à une différence de fond. On retrouve la nécessité de la définition d'un indicateur d'erreur qui permet d'évaluer la qualité de la solution obtenue et de techniques d'enrichissement pour contrôler cette erreur. Le terme de méta-modèle se réfère cependant plus à la modélisation d'un quantité d'intérêt scalaire, la réduction de modèle ayant lieu sur des champs.

Une manière de réduire le modèle est de considérer un espace de recherche de la solution  $u(x, t)$  de petite dimension  $m$ .

$$u(x, t) \approx \check{u}_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{M}) \quad (3.5)$$



**FIGURE 3.4 :** POD tronquées d'une image de  $330 \times 297$  pixels

avec  $\{\Lambda_i(\underline{M})\}_{i=1}^m$  les fonctions connues formant une base engendrant l'espace de recherche et  $\{\lambda(t)_i\}_{i=1}^m$  les inconnues à déterminer.

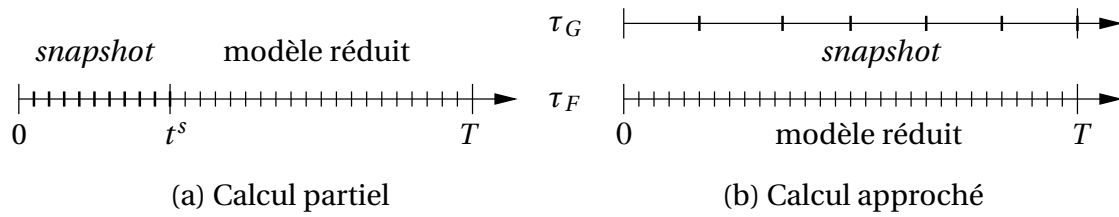
L'erreur d'approximation de la solution est d'autant plus faible que l'espace de recherche est pertinent. Un exemple de base pertinente est la base modale pour les vibrations, issue d'un calcul préalable en considérant la structure sans sollicitation. Quand aucune base pertinente ne peut être déduite du problème à résoudre, il est possible d'utiliser la POD pour extraire une base de taille minimum à partir d'un échantillon de solutions. Le choix d'un échantillon représentatif de valeurs des paramètres est un point critique. Un mauvais échantillon conduisant à commettre une grande erreur.

Dans le cas d'un problème d'évolution, avec une solution dépendant de la position et de l'instant considéré, il est possible d'imaginer plusieurs stratégies. Par exemple, une stratégie est de sélectionner comme échantillon représentatif les premiers pas de temps. Le problème est résolu de manière exacte sur cet échantillon et la base des fonctions d'espace de la POD de la solution est prise comme base de projection pour la



résolution sur les autres pas de temps (FIG. 3.5 (a)). Une autre stratégie est de sélectionner des pas de temps d'une grille grossière et de résoudre sur cette grille grossière de manière exacte. Le problème fin est résolu en projection sur les fonctions d'espace de la décomposition POD de cette solution (FIG. 3.5 (b)).

De telles techniques ont été appliquées avec succès à la dynamique [Krysl *et al.*, 2001] ou à la thermique transitoire [Bialecki *et al.*, 2005].



**FIGURE 3.5 :** Deux stratégies de sélection d'échantillons pour le cas d'un problème d'évolution

La projection et la résolution sur la base peuvent devenir coûteuses en temps de calcul. L'APHR (pour *A Priori HyperReduction Method* [Ryckelynck, 2005]) propose de ne sélectionner que certains points du problème pour la résolution. Des résultats sur des problèmes de propagation de fissure ont été obtenus avec ce type de méthode et l'utilisation de *mesh morphing* [Galland *et al.*, 2011]. Le cas de matériaux élastoplastiques a aussi pu être traité [Ryckelynck et Benziane, 2010].

L'ajout d'un critère d'erreur au cours de la résolution permet un enrichissement de la base de projection et donc de contourner le point critique du choix d'un échantillon pertinent [Kunisch et Volkwein, 2001, Kunisch et Volkwein, 2002]. Dans le cas d'un problème non linéaire d'évolution, [Kerfriden *et al.*, 2011] propose de prendre comme critère la norme du résidu dans un algorithme de Newton-Raphson. La base est enrichie par le résidu, après avoir effectué une décomposition POD avec l'ensemble des échantillons déjà existants. La POD permet de garantir une sélection de l'information pertinente.

La méthode des *Reduced Basis* [Fink et Rheinboldt, 1983, Machiels *et al.*, 2000] repose sur la même idée, avec la définition d'une erreur qui permet d'enrichir la base pour les valeurs des paramètres où l'erreur est la plus grande. La manière dont est définie cette erreur permet de garantir la qualité de la solution trouvée sur le modèle réduit. Ce type de méthode est employé dans une approche *offline-online* où la base d'approximation ainsi que l'ensemble des opérateurs sont construits dans une phase préalable *offline*, les temps de calcul sont alors très faibles durant la phase d'utilisation *online*. Des applications temps réels avec la méthode des *Reduced Basis* sont présentées dans [Prud'homme *et al.*, 2002, Huynh *et al.*, 2011].

## 4 Réduction de modèle avec la PGD

La *Proper Generalized Decomposition* (PGD) [Ladevèze, 1985b, Beylkin et Mohlenkamp, 2005, Ammar *et al.*, 2006, Ammar *et al.*, 2007] consiste à trouver la décomposition de la **solution d'un problème**

$$A(u(\underline{\mu}), u^*; \underline{\mu}) = f(u^*; \underline{\mu}), \quad \forall u^* \quad (3.6)$$

dépendant de  $\underline{\mu} = [\mu_1 \dots \mu_n]$  paramètres, sous la forme d'une somme de  $m$  produits de  $n$  fonctions des  $n$  paramètres dont dépend la solution.

$$u(\underline{\mu}) \approx u_m(\underline{\mu}) = \sum_{i=1}^m \prod_{k=1}^n \Lambda_{i,k}(\mu_k) \quad (3.7)$$

Des exemples d'application de la PGD en haptique sont disponibles dans [Niroomandi *et al.*, 2010b, Niroomandi *et al.*, 2010a, Bordeu *et al.*, 2011]. Une application au calcul des plaques est présenté dans [Bognet *et al.*, 2011]. Le cas de la décomposition dans le domaine stochastique est traité dans [Nouy, 2007, Nouy *et al.*, 2008, Nouy, 2008, Nouy et Le Maitre, 2009, Nouy, 2010b].

Ce type de décomposition est présente dans la LATIN [Ladevèze, 1985c, Cognard et Ladevèze, 1993, Ladevèze et Nouy, 2003, Nouy et Ladevèze, 2004a, Ladevèze *et al.*, 2008] sous la dénomination de **décomposition radiale**. La décomposition y est effectuée entre fonctions du temps et fonctions d'espace :

$$u(\underline{M}, t) \approx u_m(\underline{M}, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Lambda_i(\underline{M}) \quad (3.8)$$

[Nouy, 2010a] propose une revue des différents algorithmes pour la détermination de la décomposition PGD dans le cas d'un opérateur dépendant du temps et de l'espace. Les principaux algorithmes sont décrits ici brièvement. Pour alléger la présentation les espaces associés à  $\lambda(t)$  et  $\Lambda(\underline{M})$  sont omis.

### 4.1 Méthode de Galerkin

Cette manière de construire la PGD se retrouve dans [Cognard et Ladevèze, 1993, Cognard *et al.*, 1999, Ladevèze, 1999, Dureisseix *et al.*, 2003, Nouy, 2003]. Le champ test est exprimé sous forme décomposée,

$$u^* = \sum_{i=1}^m \lambda_i^*(t) \Lambda_i(\underline{M}) + \lambda_i(t) \Lambda_i^*(\underline{M}) \quad (3.9)$$

Dans le cas d'un seul couple, *i.e.*  $m = 1$ , le problème consiste à trouver

$$\begin{aligned} & A(\lambda(t) \Lambda(\underline{M}), \lambda^*(t) \Lambda(\underline{M}) + \lambda(t) \Lambda^*(\underline{M}); \underline{M}, t) \\ & = f(\lambda^*(t) \Lambda(\underline{M}) + \lambda(t) \Lambda^*(\underline{M}); \underline{M}, t), \quad \forall \lambda^*(t), \forall \Lambda^*(\underline{M}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

S'il est possible de séparer les domaines temporel et spatial, ce problème se sépare en deux problèmes couplés,

$$A(\lambda(t)\Lambda(\underline{M}), \lambda^*(t)\Lambda(\underline{M}); \underline{M}, t) = f(\lambda^*(t)\Lambda(\underline{M}); \underline{M}, t), \quad \forall \lambda^*(t) \quad (3.11a)$$

$$A(\lambda(t)\Lambda(\underline{M}), \lambda(t)\Lambda^*(\underline{M}); \underline{M}, t) = f(\lambda(t)\Lambda^*(\underline{M}); \underline{M}, t), \quad \forall \Lambda^*(\underline{M}) \quad (3.11b)$$

Une technique de résolution par point fixe peut être utilisée pour résoudre [Ladevèze, 1999].

Il est possible de chercher plusieurs couples de fonctions simultanément, la taille des systèmes à résoudre augmentant proportionnellement au nombre de couples. [Cognard, 1989] propose une technique similaire à un gradient conjugué pour rendre le coût de calcul raisonnable dans ce cas.

Une détermination progressive des couples peut cependant s'avérer moins coûteuse. On considère qu'une décomposition  $u_{m-1}$  d'ordre  $m-1$  est déjà connue. La détermination de la meilleure décomposition d'ordre  $m$  s'effectue alors en appliquant l'algorithme de point fixe décrit précédemment pour résoudre le problème suivant,

$$A(u_{m-1} + \lambda\Lambda, \lambda^*\Lambda + \lambda\Lambda^*; \underline{M}, t) = f(\lambda^*\Lambda + \lambda\Lambda^*; \underline{M}, t), \quad \forall \lambda^*, \forall \Lambda^* \quad (3.12)$$

## 4.2 Minimisation de résidu

Cette manière de construire la PGD se retrouve dans [Nouy et Ladevèze, 2004a, Passieux, 2008, Ladevèze *et al.*, 2010]. Le résidu est introduit comme,

$$\langle R(u), u^* \rangle = f(u^*) - A(u, u^*; \underline{M}, t), \quad \forall u^* \quad (3.13)$$

L'ajout d'un nouveau couple s'écrit comme la minimisation de la norme du résidu,

$$(\lambda_m(t), \Lambda_m(\underline{M})) = \arg \min_{(\lambda_m(t), \Lambda_m(\underline{M}))} \|R(u_{m-1} + \lambda_m(t)\Lambda_m(\underline{M}))\| \quad (3.14)$$

Cette minimisation est effectuée en pratique avec une méthode itérative :

- connaissant la fonction du temps  $\lambda_m(t)$ , la fonction d'espace est recherchée telle que :

$$\Lambda_m(\underline{M}) = \arg \min_{\Lambda_m(\underline{M})} \|R(u_{m-1} + \lambda_m(t)\Lambda_m(\underline{M}))\| \quad (3.15)$$

- connaissant la fonction d'espace  $\Lambda_m(\underline{M})$ , la fonction du temps est recherchée telle que :

$$\lambda_m(t) = \arg \min_{\lambda_m(t)} \|R(u_{m-1} + \lambda_m(t)\Lambda_m(\underline{M}))\| \quad (3.16)$$

L'avantage d'une recherche en minimisation est qu'un indicateur d'erreur peut être simplement introduit comme

$$\eta_{PGD} = \frac{\|R(u_{m-1} + \lambda_m(t)\Lambda_m(\underline{M}))\|}{\|R(u_{m-1})\|} \quad (3.17)$$

Cette manière de construire la PGD est utilisée dans la thèse.

## 5 Stratégies multirésolutions

Dans le cadre plus large des stratégies multirésolutions, une vision plus numérique est possible. En considérant que la résolution d'un problème passe par la résolution de systèmes linéaires, le gain en temps de calcul peut venir de la manière de tirer parti des systèmes déjà résolus.

### 5.1 Solveurs de Krylov

Une famille de méthodes sachant tirer parti de l'ensemble des résolutions antérieures est celle des solveurs à mémoire (ou *learning methods*) basés sur la réutilisation des sous-espaces de Krylov. Ces méthodes reposent sur des algorithmes de Krylov (cf. [Saad, 2000]) tels que le Gradient Conjugué (CG) ou GMRES (pour *Generalized Minimal Residual*). La résolution d'un système linéaire  $Ax = b$  par ces algorithmes repose sur la génération d'une certaine base d'un sous-espace de Krylov associé à  $A$ . Lorsque l'on dispose d'une succession de systèmes linéaires  $(A_i, b_i)_1^m$  proches les uns des autres à résoudre, l'idée consiste à réutiliser les sous-espaces de Krylov des systèmes précédents pour accélérer la convergence du nouveau système. Les méthodes d'accélération [Rey et Léné, 1998, Saad, 2000, Risler et Rey, 2000, Gosselet *et al.*, 2002] mettent l'information liée aux espaces de Krylov des systèmes précédents au profit de l'initialisation, du préconditionneur, et de l'espace d'augmentation, qui sont les trois paramètres connus pour piloter la vitesse de convergence des solveurs de Krylov.

En particulier, l'approche SRKS (pour *Selective Reuse of Krylov Subspaces*) consiste à injecter un ensemble de vecteurs de Ritz liés aux systèmes précédents dans la matrice d'augmentation d'un Gradient Conjugué projeté [Chapman et Saad, 1997]. Cette méthode comprend, à la fin de la résolution de chaque système, une étape de sélection des seuls vecteurs de Ritz qui ont convergé vers les vecteurs propres de l'opérateur. En conséquence, seule l'information la plus représentative du comportement spectral de ce système est conservé pour accélérer les systèmes suivants. [Kerfriden *et al.*, 2011] propose une approche qui combine les avantages de la réduction de modèle avec la POD et du gain de temps numérique apportés par les solveurs de Krylov.

### 5.2 SLDLT

La méthode SLDLT [Notin *et al.*, 2011] proposée par l'UTC dans le projet APPROFI s'appuie sur l'algorithme de résolution de systèmes linéaires LDL [Golub et Loan, 1996] pour accélérer la résolution dans le cas où de nombreux systèmes sont à résoudre.

La résolution avec l'algorithme LDL consiste à décomposer la matrice symétrique définie positive  $A$  en une matrice triangulaire inférieure  $L$  et une matrice diagonale  $D$ ,

$$A = LDL^T \quad (3.18)$$

La résolution d'un problème  $Ax = b$ , s'écrit alors,

$$x = L^{-T} D^{-1} L^{-1} b \quad (3.19)$$

La partie coûteuse dans cet algorithme est la détermination de la matrice  $L$

Quand un ensemble  $A_i x_i = b_i$  de systèmes sont à résoudre, l'idée de la décomposition SLDLT est d'approximer  $A_i$  par :

$$A_i \sim A_i^{\text{ap}} = L_0 \tilde{D}_i L_0^T \quad (3.20)$$

avec  $L_0$  calculée pour un  $A_0$  particulier. Par exemple, dans un cadre stochastique, la matrice  $A_0$  considérée est celle pour la valeur moyenne des paramètres. Le calcul des matrices  $L_i$  est alors épargné. La matrice diagonale  $D_i$  est par contre à déterminer. Son calcul est effectué *via* un problème d'optimisation pour minimiser l'erreur entre la matrice  $A_i$  et son approximation  $A_i^{\text{ap}}$ .

Une partie des opérateurs du problème d'optimisation ne dépend que de  $L_0$ . Quand de nombreux systèmes sont à résoudre, le coût du problème d'optimisation devient négligeable par rapport à des résolutions complètes, d'où le gain en temps de calcul.

Un point critique est le contrôle de l'erreur commise sur la solution  $x_i$ . Dans le cadre de module d'Young aléatoire en élasticité, des indicateurs d'erreur *a priori* peuvent être calculés. L'introduction de la méthode SLDLT comme préconditionneur d'un algorithme de résolution itératif de type gradient conjugué est aussi envisagé. L'erreur est alors contrôlée par l'algorithme itératif et le gain en temps de calcul est apporté par la méthode SLDLT.



# Chapitre 4

## Méthode LATIN, PGD, et stratégie multiparamétrique

*Dans ce chapitre, l'introduction de l'approximation PGD dans la méthode LATIN est détaillée. Un exemple précise les opérations réalisées à chaque itération de la méthode. On montre l'influence du maillage sur la décomposition PGD et on évalue la qualité de la décomposition obtenue. On explique comment sont gérés les couples PGD dans la stratégie multiparamétrique et pour quelles variations des paramètres ils peuvent être conservés. La stratégie multiparamétrique est appliquée à un exemple simple, qui permet de mettre en évidence les problèmes rencontrés et les solutions proposées.*

### Table des matières

1	Introduction . . . . .	48
2	Technique de réduction de modèle PGD et méthode LATIN . . . . .	48
3	Qualité de la décomposition PGD . . . . .	56
4	Réduction de modèle PGD et stratégie multiparamétrique . . . . .	58

## 1 Introduction

L'étape linéaire de la méthode LATIN est la plus coûteuse en temps de calcul car elle fait intervenir des problèmes globaux en espace sur l'ensemble de l'intervalle de temps pour la détermination des champs de contrainte et de déformation. Un point clé de la méthode est l'utilisation d'un modèle réduit afin de réduire ce coût. Les inconnues, corrections de l'initialisation élastique, sont recherchées comme sommes de produits de fonctions du temps et de fonctions d'espace. Le modèle réduit se construit simplement car le problème à résoudre est linéaire. L'introduction de la technique de réduction de modèle dans la LATIN est présentée dans le premier paragraphe.

La qualité du modèle réduit ainsi construit doit être évaluée, notamment sa dépendance à la discrétisation. Ce point fait l'objet du deuxième paragraphe.

Enfin, au cours d'une analyse paramétrique, il faut préciser quand le modèle réduit reste valable. Un tri des fonctions dans le modèle réduit est nécessaire pour optimiser le temps de calcul. Ces points sont précisés dans le dernier paragraphe, ainsi qu'une application de la stratégie multiparamétrique à un exemple simple.

## 2 Technique de réduction de modèle PGD et méthode LATIN

On rappelle que le problème à l'étape linéaire se sépare entre une partie concernant les variables internes traitée au point de Gauss (EQ. 2.40) et une partie sur la contrainte et les déformations qui consiste à trouver  $\sigma$ ,  $\varepsilon_e$ , et  $\varepsilon_p$  connaissant  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\varepsilon}_p$  et  $\Theta_\sigma^-$ , tels que,

$$\begin{cases} \sigma \in \mathcal{F} \\ (\mathbf{K}^{-1}\sigma + \varepsilon_p) \in \mathcal{E} \\ \sigma = \mathbf{K}\varepsilon_e \\ \Theta_\sigma^-(\sigma - \hat{\sigma}) - (\dot{\varepsilon}_p - \hat{\varepsilon}_p) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

C'est ce dernier problème qui est résolu avec la PGD.

### 2.1 Minimisation d'une erreur en direction de recherche

Une erreur en direction de recherche, qui correspond à une erreur en relation de comportement, est introduite [Nouy, 2003, Nouy et Ladevèze, 2004a],

$$e_{ddr} = \|\Theta_\sigma^-(\sigma - \hat{\sigma}) - (\dot{\varepsilon}_p - \hat{\varepsilon}_p)\|_{\mathbf{M}} \quad (4.2)$$

La norme est définie, par

$$\|\square\|_{\mathbf{M}} = \int_{[0,T] \times \Omega} \square : \mathbf{M} \square \, d\Omega \, dt \quad (4.3)$$



avec  $\mathbf{M} = (\Theta_{\sigma}^-)^{-1}$  pour éviter les problèmes de conditionnement (plus de détails dans le paragraphe 2 du chapitre 5). Dans la suite du document, l'opérateur  $\Theta_{\sigma}^-$  est noté  $\Theta$  pour alléger les notations.

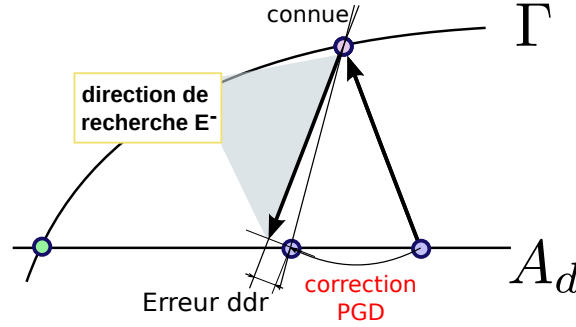


FIGURE 4.1 : Minimisation de l'erreur en direction de recherche pour la PGD

Le problème à résoudre consiste à minimiser l'erreur en direction de recherche en conservant les propriétés d'admissibilité  $(\mathbf{K}^{-1}\sigma + \varepsilon_p) \in \mathcal{E}$  et  $\sigma \in \mathcal{F}$  (FIG. 4.1).

Le modèle réduit PGD est construit suivant un algorithme progressif avec mise à jour, avec la particularité par rapport à ce qui est présenté dans [Ladevèze *et al.*, 2010] que l'opérateur  $\Theta$  évolue au cours des itérations de la LATIN.

## 2.2 Fonction temps unique

[Passieux, 2008, Relun *et al.*, 2011] ont montré que les champs de contrainte, déformation et déformation plastique peuvent avoir les mêmes fonctions du temps. On rappelle ici brièvement la démonstration. L'idée principale est que l'ensemble de ces quantités sont liées par l'équation d'équilibre.

Considérons les décompositions suivantes pour les différentes quantités avec des fonctions du temps différentes, dans le cas d'une correction avec un seul couple,

$$\begin{aligned}\underline{U}(\underline{M}, t) &= \underline{U}_0(\underline{M}, t) + \alpha^u(t)U(\underline{M}) \\ \sigma(\underline{M}, t) &= \sigma_0(\underline{M}, t) + \alpha^C(t)C(\underline{M}) \\ \varepsilon(\underline{M}, t) &= \varepsilon_0(\underline{M}, t) + \alpha^E(t)E(\underline{M}) \\ \varepsilon_p(\underline{M}, t) &= \alpha^P(t)E_p(\underline{M})\end{aligned}\tag{4.4}$$

où  $\underline{U}_0(\underline{M}, t)$ ,  $\sigma_0(\underline{M}, t)$  et  $\varepsilon_0(\underline{M}, t)$  sont respectivement les champs de déplacement, de contrainte et de déformation obtenus en considérant un problème élastique.

Les couples viennent en correction de la solution élastique et sont donc admissibles à zéro. L'équation d'équilibre au sens faible consiste à chercher  $\alpha^E(t)E(\underline{M}) \in \mathcal{E}^*$  et  $\alpha^P(t)E_p(\underline{M})$  quelconque tels que  $\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^*$ ,

$$\int_{[0,T] \times \Omega} \mathbf{K}(\alpha^E(t)E(\underline{M}) - \alpha^P(t)E_p(\underline{M})) : \varepsilon(\underline{U}^*) \, d\Omega \, dt = 0\tag{4.5}$$

en introduisant la décomposition PGD dans le champ test *i.e.*  $\underline{U}^\star = \alpha^{u^\star}(t)U(\underline{M}) + \alpha^u(t)U^\star(\underline{M})$  avec  $\alpha^{u^\star}(t)$  quelconque et  $U^\star(\underline{M}) \in \mathcal{U}^\star$ , on obtient deux équations dé-couplées :

$$\begin{aligned} \forall \alpha^{u^\star}(t), \quad & \int_{[0,T]} \alpha^E(t) \alpha^{u^\star}(t) dt \int_{\Omega} \mathbf{K}E(\underline{M}) : \varepsilon(U(\underline{M})) d\Omega \\ & = \int_{[0,T]} \alpha^P(t) \alpha^{u^\star}(t) dt \int_{\Omega} \mathbf{K}E_p(\underline{M}) : \varepsilon(U(\underline{M})) d\Omega \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \text{et, } \forall U^\star(\underline{M}) \in \mathcal{U}^\star, \quad & \int_{[0,T]} \alpha^E(t) \alpha^u(t) dt \int_{\Omega} \mathbf{K}E(\underline{M}) : \varepsilon(U^\star(\underline{M})) d\Omega \\ & = \int_{[0,T]} \alpha^P(t) \alpha^u(t) dt \int_{\Omega} \mathbf{K}E_p(\underline{M}) : \varepsilon(U^\star(\underline{M})) d\Omega \end{aligned} \quad (4.6b)$$

La première équation (4.6a) permet de conclure que les fonctions  $\alpha^E(t)$  et  $\alpha^P(t)$  sont proportionnelles. Cependant, dans la décomposition (4.4), les fonctions  $E(\underline{M})$ , et  $\alpha^E(t)$  sont définies à une constante multiplicative près. Fixer l'une revient à fixer l'autre. En particulier, il est possible de choisir de prendre  $\alpha^E(t) = \alpha^P(t)$ . La contrainte est reliée par une relation linéaire (équation d'état) aux déformations, sa fonction temps est donc proportionnelle elle aussi. On la choisit égale, ainsi que celle associée aux déplacements. On a donc

$$\alpha^u(t) = \alpha^C(t) = \alpha^E(t) = \alpha^P(t) = \alpha(t) \quad (4.7)$$

Dans ces conditions, l'expression du problème annexe (4.6b) qui permet de calculer  $E$  à partir de  $E_p$ , ne porte que sur les fonctions spatiales et s'écrit :

$$\forall U^\star(\underline{M}) \in \mathcal{U}^\star, \quad \int_{\Omega} \mathbf{K}E(\underline{M}) : \varepsilon(U^\star(\underline{M})) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{K}E_p(\underline{M}) : \varepsilon(U^\star(\underline{M})) d\Omega \quad (4.8)$$

On remarque que la décomposition n'est pas unique malgré ces relations. Pour la rendre unique, on choisit de normaliser la fonction d'espace associée à la déformation plastique,

$$E_p \leftarrow \frac{E_p}{\|E_p\|} \quad (4.9)$$

La norme  $\mathcal{L}^2$  est utilisée en pratique.

## 2.3 Enrichissement du modèle réduit

À chaque étape linéaire, une approximation de la solution est tout d'abord recherchée sur les fonctions d'espace existantes. Cette étape est appelée mise à jour des fonctions du temps, elle correspond au calcul sur le modèle réduit,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \Delta\alpha_i) C_i, \quad \dot{\varepsilon}_p = \sum_{i=1}^{m-1} (\dot{\alpha}_i + \Delta\dot{\alpha}_i) E_{p,i} \quad (4.10)$$

Les corrections sont recherchées de manière à minimiser l'erreur en direction de recherche,

$$\{\Delta\alpha_i\}_{i=1}^{m-1} = \arg \min_{\{\Delta\alpha_i\}_{i=1}^{m-1} \in \mathcal{H}_1^{m-1}} \left\| \Theta \sum_{i=1}^{m-1} \Delta\alpha_i C_i - \sum_{i=1}^{m-1} \Delta\dot{\alpha}_i E_{p,i} - \Delta_1 \right\|_{\mathbf{M}} \quad (4.11)$$

avec  $\mathcal{H}_1$  l'espace des fonctions continues et à dérivées continues, et  $\Delta_1$  regroupant les quantités connues à cette étape,

$$\Delta_1 = \Theta \left( \hat{\sigma} - \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i C_i \right) - \left( \hat{\varepsilon}_p - \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\alpha}_i E_{p,i} \right)$$

Ce problème conduit à la résolution d'un système d'équations différentielles entraînant un faible coût de calcul. Les détails de sa résolution sont présentés dans le chapitre 5.

Un indicateur d'erreur sur le modèle réduit est introduit :

$$\eta_{PGD} = \frac{\left\| \Theta \sum_{i=1}^{m-1} \Delta\alpha_i C_i - \sum_{i=1}^{m-1} \Delta\dot{\alpha}_i E_{p,i} - \Delta_1 \right\|_{\mathbf{M}}}{\|\Delta_1\|_{\mathbf{M}}} \quad (4.12)$$

Si cet indicateur dépasse une valeur seuil après la mise à jour des fonctions du temps, un nouveau couple est ajouté en correction, avec la fonction temps  $\alpha_m$  et les fonctions d'espace  $(C_m, E_{p,m})$ . Cette étape correspond à un enrichissement du modèle réduit PGD,

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \Delta\alpha_i) C_i + \alpha_m C_m, \quad \dot{\varepsilon}_p = \sum_{i=1}^{m-1} (\dot{\alpha}_i + \Delta\dot{\alpha}_i) E_{p,i} + \dot{\alpha}_m E_{p,m} \quad (4.13)$$

Le nouveau couple est recherché comme,

$$(\alpha_m, C_m, E_{p,m}) = \arg \min_{\substack{\alpha_m \in \mathcal{H}_1 \\ C_m \in \mathcal{F}^* \\ (\mathbf{K}^{-1} C_m + E_{p,m}) \in \mathcal{E}^*}} \left\| \Theta \alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2 \right\|_{\mathbf{M}} \quad (4.14)$$

avec

$$\Delta_2 = \Theta \left( \hat{\sigma} - \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \Delta\alpha_i) C_i \right) - \left( \hat{\varepsilon}_p - \sum_{i=1}^{m-1} (\dot{\alpha}_i + \Delta\dot{\alpha}_i) E_{p,i} \right)$$

Un algorithme de point fixe (ou des puissances) est utilisé pour résoudre le problème de minimisation 4.14. Cet algorithme est initialisé avec une fonction temps aléatoire, puis,

- connaissant la fonction temps  $\alpha_m$ , les fonctions d'espace sont recherchées comme,

$$(C_m, E_{p,m}) = \arg \min_{\substack{C_m \in \mathcal{F}^* \\ (\mathbf{K}^{-1} C_m + E_{p,m}) \in \mathcal{E}^*}} \left\| \Theta \alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2 \right\|_{\mathbf{M}} \quad (4.15)$$

- connaissant les fonctions d'espace  $(C_m, E_{p,m})$ , la fonction du temps est recherchée comme,

$$\alpha_m = \arg \min_{\alpha_m \in \mathcal{H}_1} \|\Theta \alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (4.16)$$

Cet algorithme converge rapidement et, en pratique, de 3 à 10 itérations sont nécessaires pour obtenir une stagnation des fonctions.

Après l'ajout de ce nouveau couple, l'erreur d'approximation PGD diminue et l'indicateur a pour expression,

$$\eta_{PGD} = \frac{\|\Theta \alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2\|_{\mathbf{M}}}{\|\Delta_1\|_{\mathbf{M}}} \quad (4.17)$$

On conserve au dénominateur  $\|\Delta_1\|_{\mathbf{M}}$ , pour pouvoir comparer la diminution de l'erreur à l'issue de la mise à jour des fonctions du temps et à l'issue de l'ajout d'un nouveau couple.

## 2.4 Détails des itérations de la LATIN

Afin d'illustrer la manière dont la PGD est utilisée dans la méthode LATIN, on prend comme exemple une plaque trouée. Les symétries du problème permettent de ne considérer qu'un huitième de la plaque. Le déplacement normal d'une face opposée au trou est imposé (FIG. 4.2).

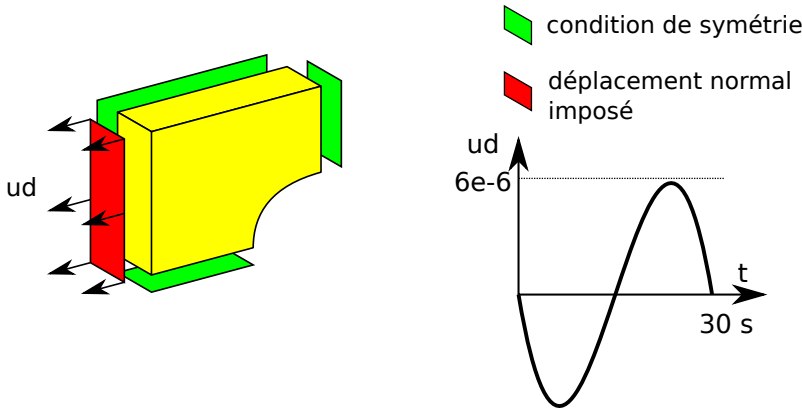


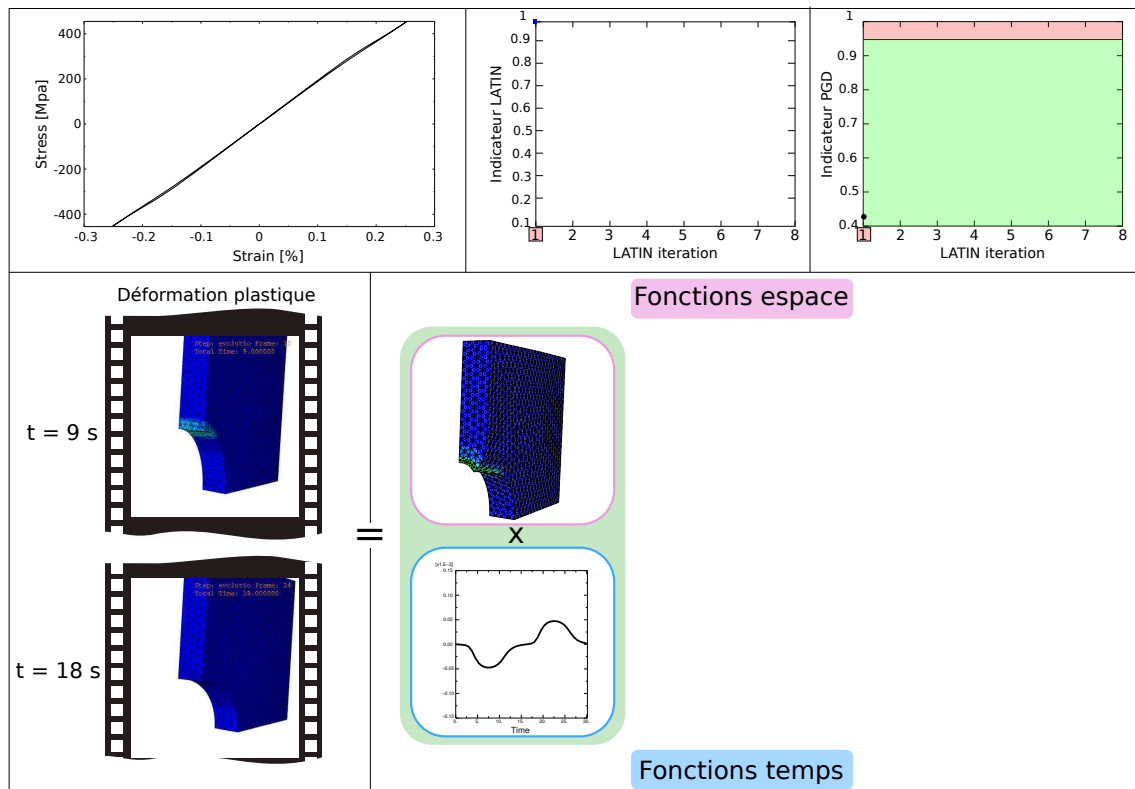
FIGURE 4.2 : Définition du problème de plaque trouée

Les premières itérations de la LATIN sont détaillées. Pour chaque itération :

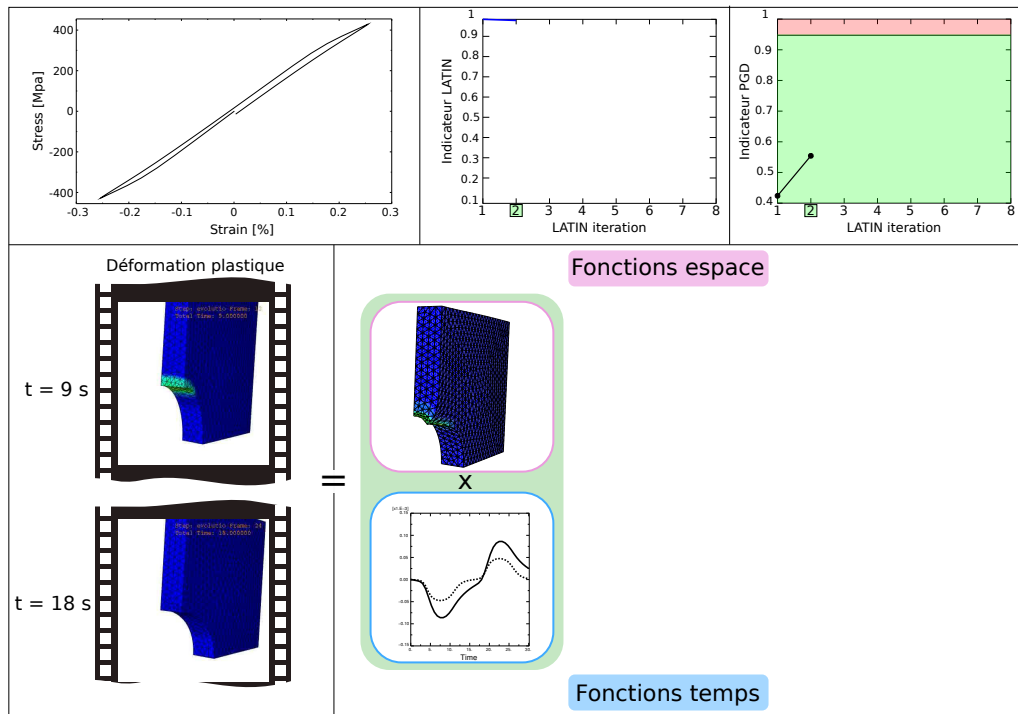
- une fenêtre en haut à droite montre l'indicateur d'erreur PGD, qui permet de contrôler le modèle réduit ;
- en haut au milieu l'indicateur d'erreur LATIN, qui permet de contrôler la vérification des lois d'évolution ;
- en haut à gauche la courbe contrainte déformation après reconstruction au point le plus sollicité en termes de contrainte de Mises ;

- en bas à gauche l'évolution temporelle du champ de déformation après reconstruction, et en bas à droite la décomposition PGD.

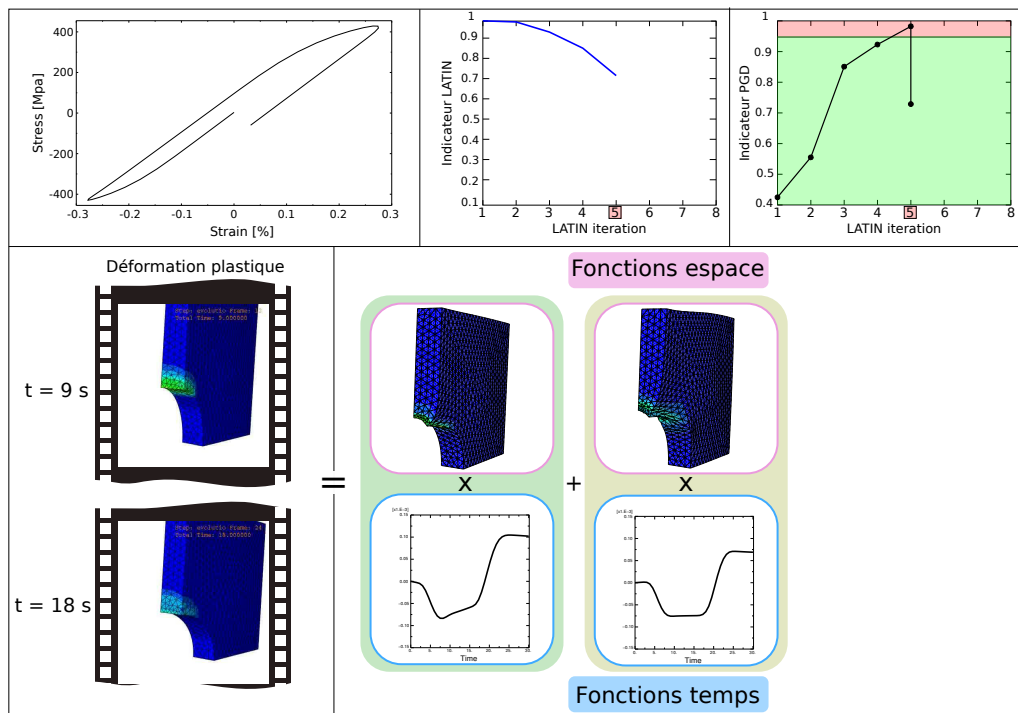
À la première itération, un nouveau couple PGD est généré. L'indicateur d'erreur LATIN est de 100%, et l'erreur PGD de 40%.



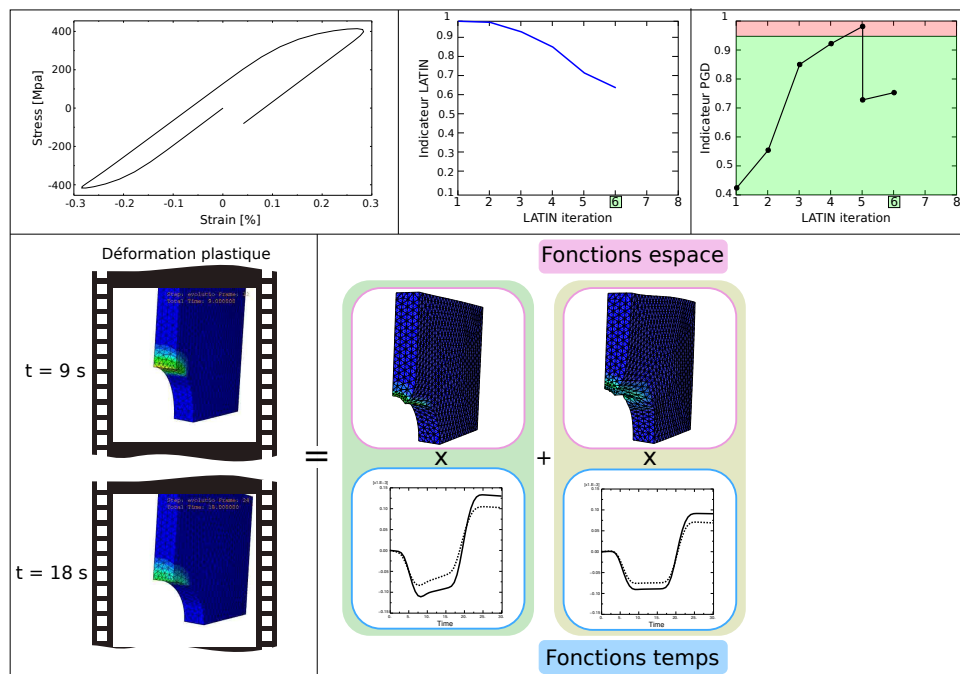
Après la mise à jour de la fonction du temps à la deuxième itération, l'indicateur d'erreur PGD reste inférieur au seuil de 90% et aucun couple n'est ajouté à la décomposition PGD.



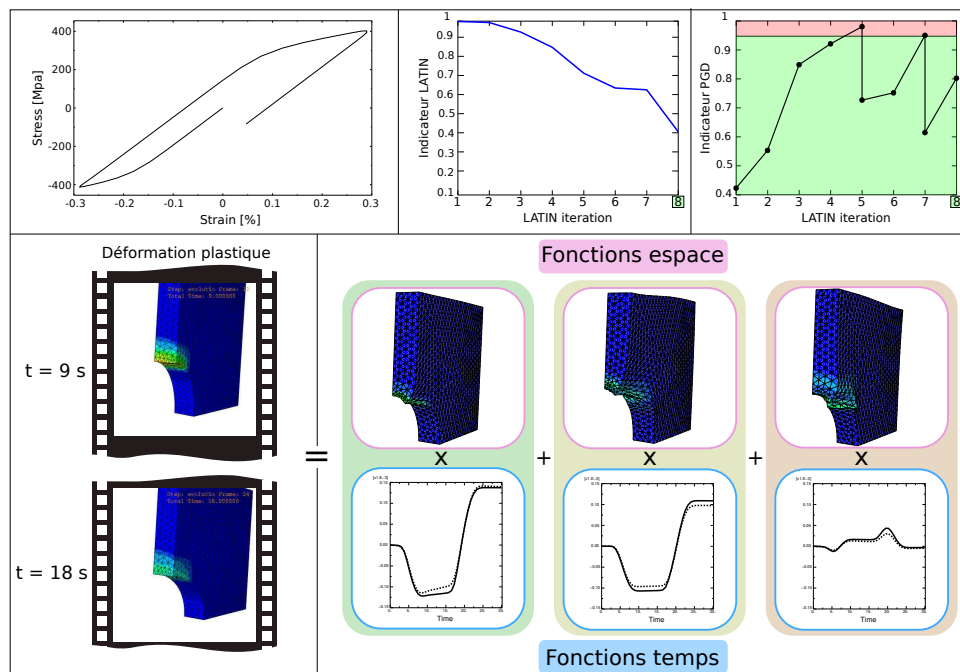
Jusqu'à l'itération 5, seule la mise à jour de la fonction temps est effectuée et l'indicateur d'erreur LATIN diminue. On a donc une amélioration de la solution à très faible coût. À l'itération 5, l'indicateur d'erreur PGD dépasse le seuil après la mise à jour des fonctions du temps et un deuxième couple est ajouté.



À l'itération 6, les deux fonctions du temps sont mises à jour, l'indicateur LATIN diminue et l'indicateur PGD reste inférieur au seuil.



À l'itération 7, un nouveau couple est ajouté. Les trois fonctions du temps sont mises à jour à l'itération 8, avec une forte diminution de l'erreur LATIN.



Le processus se poursuit jusqu'à convergence.

### 3 Qualité de la décomposition PGD

Dans le cadre de la stratégie multiparamétrique, il est intéressant d'avoir une décomposition PGD avec le moins de couples possibles, car le coût de calcul lors de la mise à jour des fonctions du temps dépend du nombre de couples.

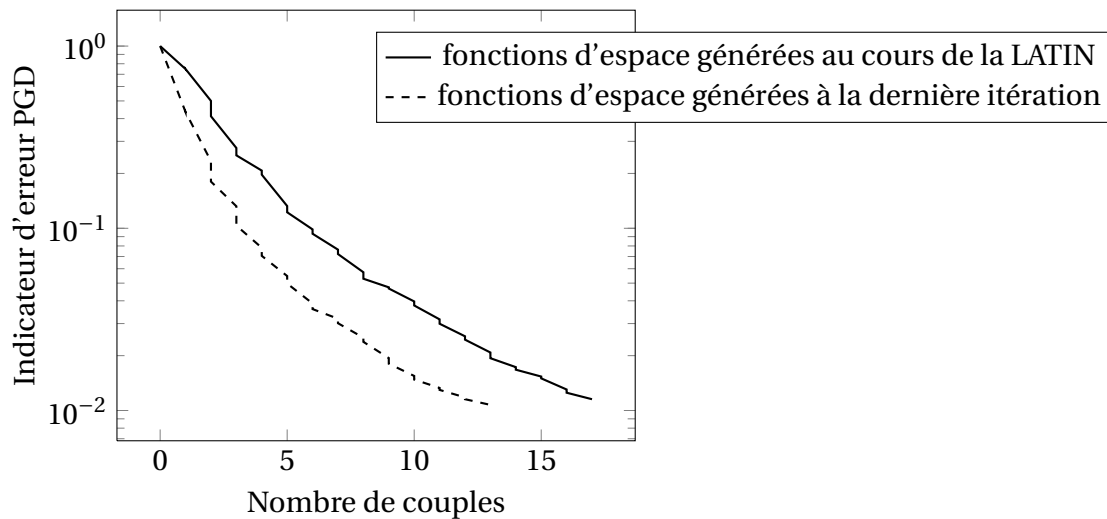
#### 3.1 Comparaison avec une décomposition effectuée à la dernière itération

Les couples PGD sont générés au cours des étapes linéaires des itérations de la LATIN, et donc sur une approximation linéaire du problème qui s'affine au cours de ces itérations. La décomposition n'est donc pas forcément optimale pour la dernière itération, qui est la meilleure approximation linéaire du problème dont on dispose. Plus de couples peuvent ainsi être générés au cours des itérations de la LATIN comparé au nombre optimal d'une décomposition effectuée à la dernière itération.

Pour mettre ceci en exergue, on compare l'évolution de l'indicateur PGD en fonction du nombre de couples pour cette décomposition entre :

- une utilisation des fonctions d'espace générées au cours des itérations ;
- des fonctions d'espace « optimales », générées *a posteriori*.

Le résultat de la comparaison est présenté sur la figure 4.3.



**FIGURE 4.3 :** Comparaison de l'évolution de l'indicateur PGD en fonction du nombre de couples pour des fonctions d'espaces générées à la dernière itération de la LATIN ou au cours des itérations de la LATIN

On constate que moins de couples sont nécessaires pour atteindre le même indicateur PGD quand les fonctions d'espace sont générées à la dernière itération *i.e. a posteriori*. La différence vient majoritairement des premiers couples. Dans les premières itérations de la LATIN, la direction de recherche (qui est l'opérateur sur lequel

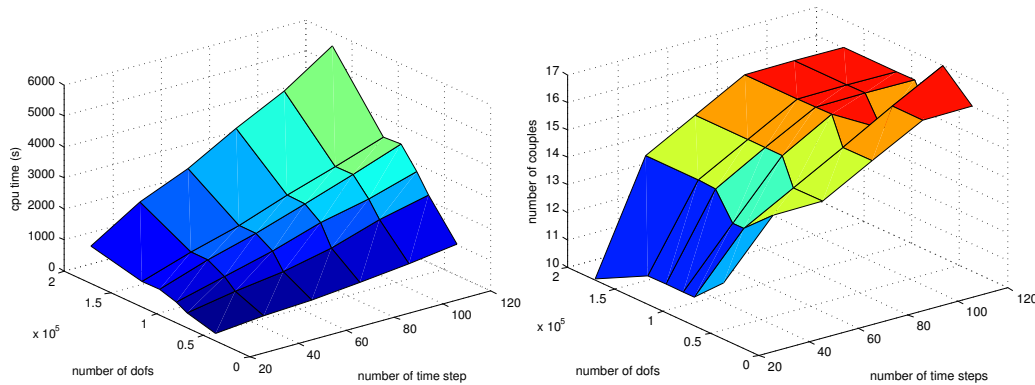


est construit la PGD) et les quantités issue de l'étape locale (second membre pour la PGD) sont très éloignées de celles obtenues à la dernière itération. Les fonctions d'espace générées sont alors aussi très éloignées.

Cependant, seulement 3 couples de moins sont obtenus en générant les fonctions d'espace à la dernière itération, le gain en temps de calcul pour la stratégie multiparamétrique n'est pas évident. En effet le coût de la génération des fonctions d'espace générées à la dernière itérations est de l'ordre de grandeur du coût de calcul de la solution. Les fonctions d'espace générées au cours des itérations de la LATIN seront donc utilisées dans la stratégie multiparamétrique.

### 3.2 Influence du maillage et du nombre de pas de temps

On teste l'influence du raffinement du maillage et du nombre de piquets de temps sur le nombre de couples. Le cas test de la plaque trouée est repris avec 6 finesses de maillage différentes et 6 discrétisations en temps.



**FIGURE 4.4 :** Temps CPU et nombre de couples en fonction du nombre de DDLs et de piquets de temps

On remarque que le nombre de couples est quasiment indépendant de la finesse du maillage. Par contre le nombre de piquets de temps a une influence. Le nombre de couples dans la décomposition est stable seulement à partir de 80 piquets de temps. Ceci peut s'expliquer par l'influence du nombre de piquets de temps sur l'intégration de la loi de comportement. La convergence du schéma en temps choisi n'est atteinte qu'à partir de 80 piquets de temps.

On peut donc conclure que la décomposition PGD est bien intrinsèque au problème étudié, pourvu que les discrétisations en temps et en espace soit assez fines pour capter l'ensemble des phénomènes.

## 4 Réduction de modèle PGD et stratégie multiparamétrique

Dans la stratégie multiparamétrique, la solution avec un jeu de valeurs des paramètres est recherchée à partir d'une solution proche, disponible sous forme approchée par la technique PGD. La solution proche sert d'initialisation pour la LATIN et doit être une solution admissible avec les nouvelles valeurs des paramètres. De même, les fonctions spatiales de la décomposition doivent être admissibles à zéro.

### 4.1 Paramètres variables possibles

Les fonctions d'espace des couples sont statiquement admissibles à zéro. Toutes les variations des paramètres ne changeant pas l'admissibilité à zéro sont donc possibles en conservant les mêmes fonctions d'espace. Les paramètres de la loi d'évolution, de l'amplitude des déplacements imposés, ou des efforts extérieurs, peuvent ainsi être pris en compte.

Les variations des paramètres entraînant une modification de l'admissibilité mais pas de l'admissibilité à zéro (comme par exemple une modification de l'amplitude des déplacements imposés ou des efforts imposés) nécessitent de recalculer la solution élastique admissible. Ce calcul est très peu coûteux dans le cas de chargement se décomposant en combinaison de chargements simples.

Les variations de la valeur de paramètres ayant une influence sur l'admissibilité à zéro, comme les paramètres des lois d'état ou la direction et position des déplacements imposés, imposent de devoir recalculer les couples de la décomposition PGD, ainsi que la solution élastique.

Ces règles sont résumées dans le TAB. 4.1.

paramètres	couple PGD conservés	maj solution élastique
paramètres de la loi d'évolution	X	
amplitude du chargement	X	X
direction efforts imposés	X	X
direction déplacements imposés		X
paramètres de la loi d'état		X

**Tableau 4.1 :** Conséquences de la variation des paramètres

### 4.2 Élimination de couples non pertinents

Le calcul de l'ensemble des intégrales en espace pour la mise à jour des fonctions du temps peut être coûteux (voir paragraphe 3 du chapitre 5 pour plus de détails). Le coût augmente en environ  $N^2$  avec le nombre de couples  $N$  mis en jeux. Le calcul de l'ensemble des intégrales n'est effectué que quand la direction de recherche est mise à

jour. Il est donc nécessaire de faire une sélection des fonctions d'espace pertinentes au cours de l'étude paramétrique, quand la variation des paramètre entraîne une mise à jour de la direction de recherche.

La méthode proposée ici est très empirique et repose sur l'indicateur d'erreur PGD. Après la modification des paramètres du problèmes, à la première itération de la LATIN, si la direction de recherche doit être mise à jour (voir paragraphe 5.2 du chapitre 2), 5 couples au maximum sont conservés, les autres étant gardés en mémoire mais non utilisés. Au cours des itérations, après mise à jour des fonctions du temps, si le critère d'erreur PGD est dépassé, on cherche la meilleure fonction du temps correspondant au sixième couple, s'il y en a un en mémoire. Si l'erreur PGD diminue suffisamment, le couple est gardé. S'il n'y a pas de sixième couple ou si l'erreur PGD ne diminue pas suffisamment, un nouveau couple est recherché par la méthode habituelle de point fixe.

De cette manière, seuls les couples déjà existants et pertinents pour le calcul en cours sont utilisés.

### 4.3 Cas d'un plan d'expérience ordonné

Dans ce premier exemple, la stratégie multiparamétrique est appliquée à un plan d'expérience parcouru de telle manière que la solution précédente est toujours la plus proche. Le nombre d'itérations entre jeux de paramètres est alors minimum. Un plan d'expérience à trois variables pouvant prendre 10 valeurs est considéré sur la plaque trouée (TAB. 4.2).

paramètre	valeur initiale	valeur finale	pas	Nombre de pas	% variation
amplitude $u_d$	0,0005	0,00095	0,00005	9	62
$\sigma_y$	15	37,5	2,5	10	85
$\gamma$	350	620	30	10	94

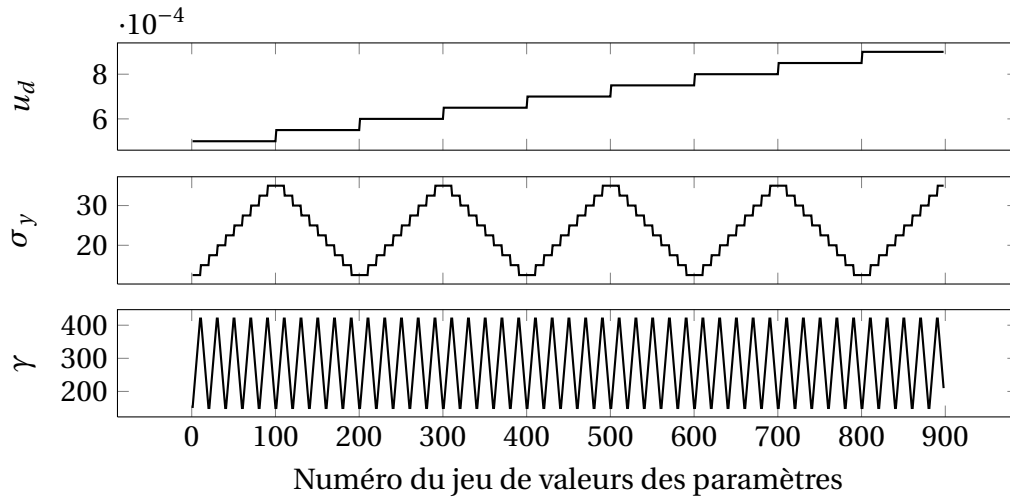
**Tableau 4.2 :** Définition du plan d'expérience pour la plaque trouée

Un chemin possible pour parcourir ce plan d'expérience, déterminé après une analyse de sensibilité, est présenté sur la figure 4.5. L'amplitude du chargement a été identifiée comme le paramètre le plus influent. Le temps de calcul de référence (sans stratégie multiparamétrique) est fonction de l'amplitude du chargement.

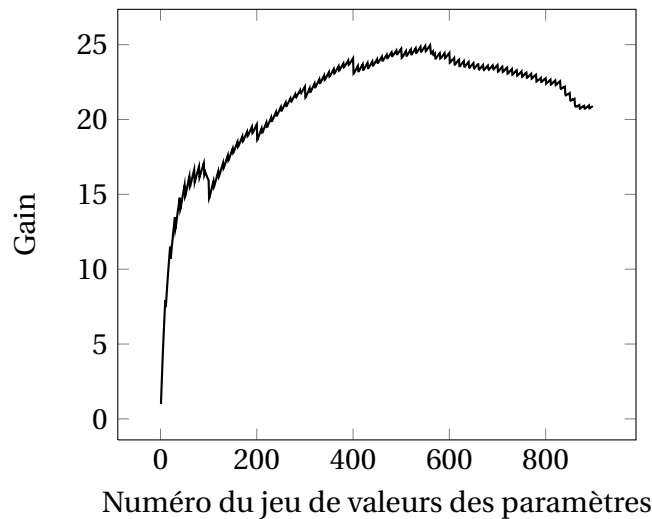
amplitude ( $\cdot 10^{-4}$ )	5	55	6	65	7	75	8	85	9
temps de référence (s)	136	187	239	290	341	392	444	495	550

On peut alors calculer le gain de la stratégie multiparamétrique en comparant le temps nécessaire avec la stratégie par rapport aux temps de référence,

$$\text{gain} = \frac{\sum \text{temps de référence}}{\text{temps avec la stratégie multiparamétrique}} \quad (4.18)$$



**FIGURE 4.5 :** Exemple de parcours optimal du plan d'expérience pour 3 variables prenant 10 valeurs



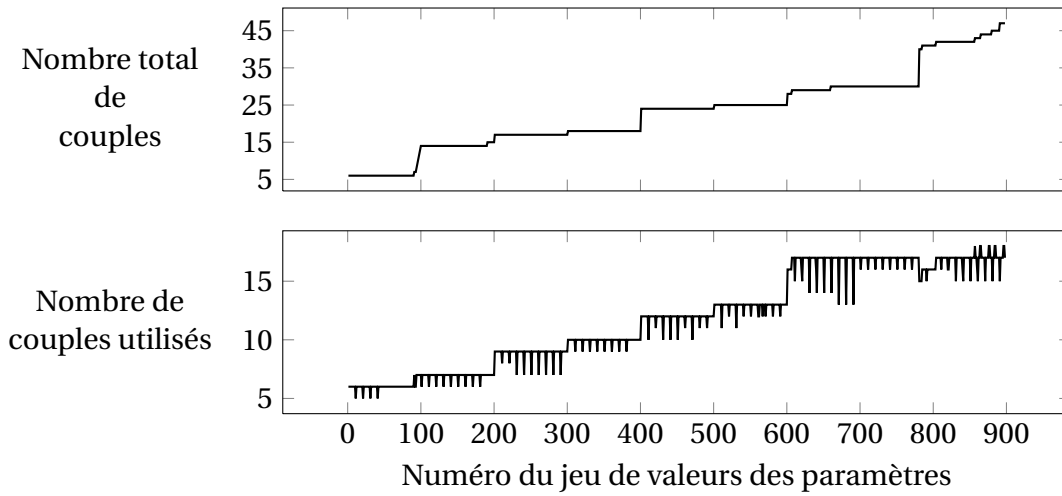
**FIGURE 4.6 :** Gain en fonction du nombre de calculs pour le parcours optimal du plan d'expérience

On constate que le gain pour les 900 jeux de paramètres est de l'ordre 20, *i.e.* que le calcul est 20 fois plus rapide avec la stratégie multiparamétrique que sans (FIG. 4.6).

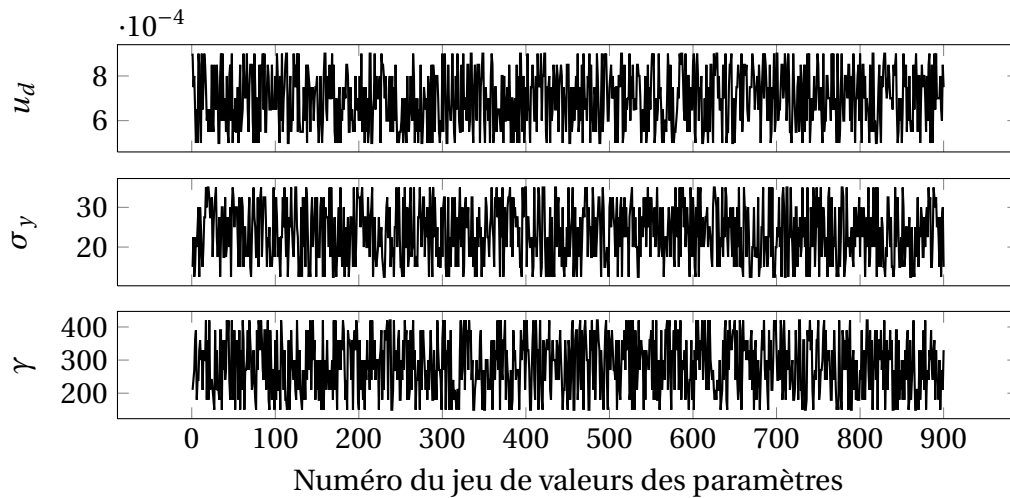
Le nombre total de couples générés durant l'étude paramétrique est de 47, ce qui est assez peu à la vue des variations des paramètres (FIG. 4.7).

#### 4.4 Cas d'un plan d'expérience aléatoire

On considère maintenant le cas d'un parcours aléatoire du plan d'expérience (FIG. 4.8). Pour chaque nouveau calcul demandé, il est nécessaire de choisir un jeu de



**FIGURE 4.7 :** Nombres de couples total et utilisés au cours de l'étude paramétrique pour le parcours optimal



**FIGURE 4.8 :** Exemple de parcours aléatoire du plan d'expérience pour 3 variables prenant 10 valeurs

paramètres parmi ceux déjà calculés, tel que le nombre d'itérations de la LATIN sera minimum. Une méthode est proposée dans [Soulrier et Boucard, 2009] pour trouver la solution la plus proche. Elle est fondée sur un critère de distance dans l'espace des paramètres et dans l'espace des réponses approximé par un méta-modèle. Comme on ne construit pas de méta-modèle dans notre cas, on choisit un critère de distance dans l'espace des paramètres pondéré par l'influence de chaque paramètre. L'amplitude du chargement étant la plus influente, on lui assigne un plus gros poids, puis vient le seuil élastique  $\sigma_y$  et enfin le terme de rappel de l'écroutissement cinématique  $\gamma$ . La distance  $d$

permettant de trouver le calcul déjà réalisé le plus proche est ainsi définie par,

$$d(j) = \left( 100 \frac{u_{d,j} - u_d}{u_d} + 10 \frac{\sigma_{y,j} - \sigma_y}{\sigma_y} + \frac{\gamma_j - \gamma}{\gamma} \right) \quad (4.19)$$

Le jeu de paramètre  $j$  minimisant cette distance est choisi comme initialisation.

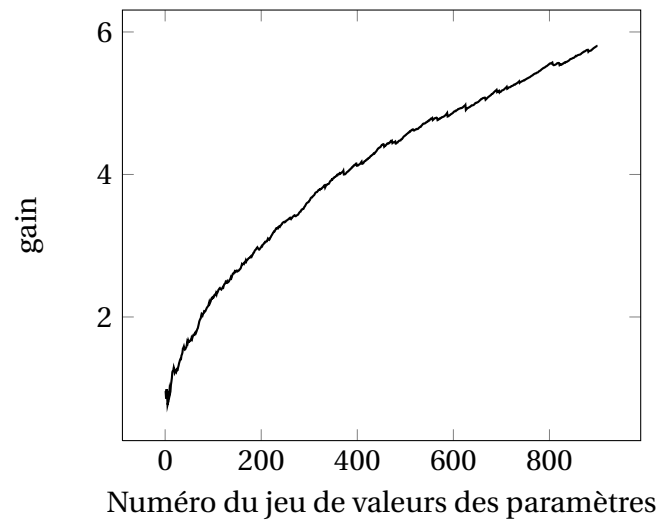
Pour pouvoir réinitialiser avec cette solution, l'ensemble des champs doivent être stockés. Le stockage de l'ensemble des champs de déformation plastique et de contrainte ne pose pas de difficultés particulières, puisqu'on dispose du modèle réduit PGD. Par contre, le stockage de l'ensemble des champs associés aux variables internes n'est pas envisageable si ceux-ci ne sont pas approximés sur un modèle réduit.

Le calcul des variables internes au cours des itérations de la LATIN consiste en la résolution d'une équation différentielle (EQ. 2.40). Résoudre cette équation différentielle avec la PGD n'est pas apparu très efficace en temps de calcul dans nos tests numériques comparé à une résolution incrémentale en chaque point de Gauss.

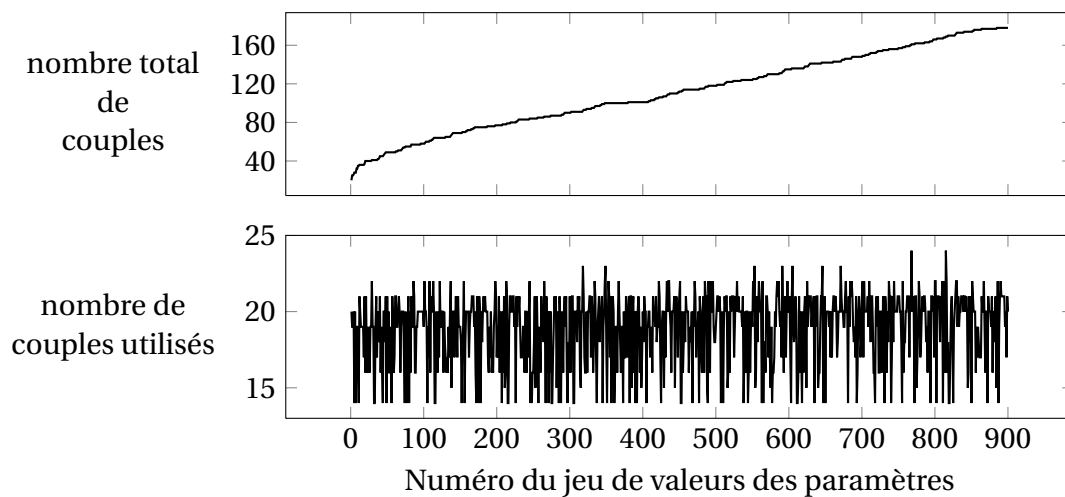
La meilleure stratégie semble de réaliser les calculs aux points de Gauss au cours des itérations et de ne construire le modèle réduit PGD qu'une fois les champs connus (à la dernière itération) pour les stocker à moindre coût de mémoire. Les avantages en temps de calcul d'une résolution incrémentale en chaque point de Gauss et de stockage à moindre coût de mémoire avec le modèle réduit PGD sont ainsi cumulés.

190 fonctions au total sont générées au cours de la stratégie dans le cas du parcours aléatoire, ce nombre est plus important que dans le cas optimal (FIG. 4.10). Le critère de sélection des fonctions pertinentes déjà connues est donc à améliorer ainsi que la sélection du plus proche jeu de paramètres servant d'initialisation. Le nombre total de fonctions générées devrait être intrinsèque au problème étudié dans la plage de variation des paramètres.

Au bilan, le gain apporté par la stratégie multiparamétrique est plus faible que pour le parcours optimal du plan d'expérience, mais atteint quand même 6 (FIG. 4.9). Ce résultat peut apparaître comme décevant (diminution du gain d'un facteur d'environ 4 par rapport au parcours « optimal »), mais il est à pondérer par le fait que de très grandes variations des paramètres ont été imposées (plus de 60% pour chaque paramètre).



**FIGURE 4.9 :** Gain en fonction du nombre de calculs pour le parcours aléatoire du plan d'expérience



**FIGURE 4.10 :** Nombres de couples total et utilisés au cours de l'étude paramétrique dans le cas d'un parcours aléatoire





# Chapitre 5

## Diminution du temps de calcul de la décomposition PGD

*Dans ce chapitre, on présente deux méthodes de mise à jour des fonctions du temps et trois méthodes pour la détermination des fonctions spatiales de la décomposition PGD. L'objectif est de minimiser le temps de calcul avec la PGD. Il est indispensable de disposer d'une méthode efficace de détermination des fonctions d'espace car la majorité du temps de calcul est dépensé dans cette phase. Un exemple issu de la documentation d'ABAQUS permet d'illustrer les performances de la méthode.*

### Table des matières

1	Introduction . . . . .	66
2	Régularisation de la direction de recherche . . . . .	66
3	Détermination des fonctions temporelles . . . . .	69
4	Détermination des fonctions spatiales . . . . .	71
5	Illustration des performances . . . . .	81

## 1 Introduction

La résolution de l'étape linéaire de la LATIN avec la PGD consiste à trouver l'ensemble des fonctions du temps  $\{\alpha_i\}$ , des fonctions d'espace  $\{C_i\}$  pour la contrainte et  $\{E_{p,i}\}$  pour la déformation plastique, connaissant  $\sigma_0$  la contrainte élastique,  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{\varepsilon}_p$ , la contrainte et la déformation plastique à l'étape locale et  $\Theta$  la direction de recherche, tels que l'erreur en direction de recherche soit minimale,

$$\begin{cases} \{C_i \in \mathcal{F}^*\} \\ \{(\mathbf{K}^{-1}C_i + E_{p,i}) \in \mathcal{E}^*\} \\ \sigma = \sigma_0 + \sum \alpha_i C_i \\ \dot{\varepsilon}_p = \sum \dot{\alpha}_i E_{p,i} \\ \min \|\Theta(\sigma_0 + \sum \alpha_i C_i - \hat{\sigma}) - (\sum \dot{\alpha}_i E_{p,i} - \hat{\varepsilon}_p)\|_{\mathbf{M}} \end{cases} \quad (5.1)$$

avec la norme  $\|\square\|_{\mathbf{M}}$  définie comme,

$$\|\square\|_{\mathbf{M}} = \int_{[0,T] \times \Omega} \square : \mathbf{M} \square \, d\Omega \, dt \quad (5.2)$$

et l'opérateur  $\mathbf{M}(\underline{M}, t) = \Theta^{-1}(\underline{M}, t)$ .

A chaque étape linéaire, les fonctions du temps sont tout d'abord mises à jour, si l'indicateur d'erreur PGD est trop élevé après cette mise à jour, le modèle réduit PGD est enrichi (voir paragraphe 2.3 chapitre 4 pour plus de détails). On s'intéresse dans ce chapitre aux détails du calcul des fonctions du temps et de l'espace pour obtenir un temps de calcul faible.

## 2 Régularisation de la direction de recherche

Afin de pouvoir calculer l'opérateur de la norme comme inverse de la direction de recherche, une étape de régularisation est nécessaire. En effet l'opérateur de direction de recherche est nul en tout point et tout piquet de temps où le seuil élastique n'est pas dépassé. On régularise la direction de recherche à l'aide de l'opérateur identité sur les déviateurs (EQ. 2.33) afin de garder une direction de recherche déviatorique (voir paragraphe 5.1 du chapitre 2),

$$\Theta = \Theta + \nu \mathbb{1}^D \quad (5.3)$$

Le coefficient de régularisation  $\nu$  est choisi de manière à perturber le moins possible la direction de recherche. Une possibilité est de prendre comme valeur une fraction de la plus grande valeur propre de  $\Theta(M, t)$  sur tout l'espace et le temps.

$\Theta(M, t)$  est un opérateur sur les déviateurs, il possède donc une valeur propre nulle suivant un vecteur propre de pression pure. En utilisant cette propriété, il est peu coûteux de calculer ses valeurs propres, la technique est détaillée ci-après.

En notation vectorielle le vecteur propre de pression pure a pour expression,

$$[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.4)$$

On construit une base orthonormale à partir de ce vecteur avec comme matrice de passage

$$P^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

L'expression de l'opérateur de direction de recherche dans la base déviatorique est obtenue par application de la matrice de passage,

$$\tilde{\Theta} = P\Theta P^T \quad (5.6)$$

Dans cette base la valeur propre nulle apparaît, avec une matrice de la forme

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

avec  $a, b, c, d, e, f$  des coefficients réels. Les valeurs propres d'une telle matrice sont très simples à calculer et sont,

$$va_{\Theta} = \left[ 0 \quad \frac{a+b+\sqrt{\Delta}}{2} \quad \frac{a+b-\sqrt{\Delta}}{2} \quad d \quad e \quad f \right] \quad (5.8)$$

avec  $\Delta = (a+b)^2 + 4(c^2 - ab)$ .

La valeur du coefficient de régularisation (EQ. 5.3) est choisie comme une fraction de la plus grande valeur propre ainsi calculée,

$$v = \rho \max_{\substack{\Omega \\ [0, T]}}(va_{\Theta}) \quad (5.9)$$

avec  $\rho$  un paramètre dont la valeur est en pratique de 0,01 suite à nos essais numériques.

Après régularisation, l'opérateur de la norme est définie comme la pseudo inverse sur les déviateurs de la direction de recherche  $\Theta$  et a pour expression dans la base déviatorique,

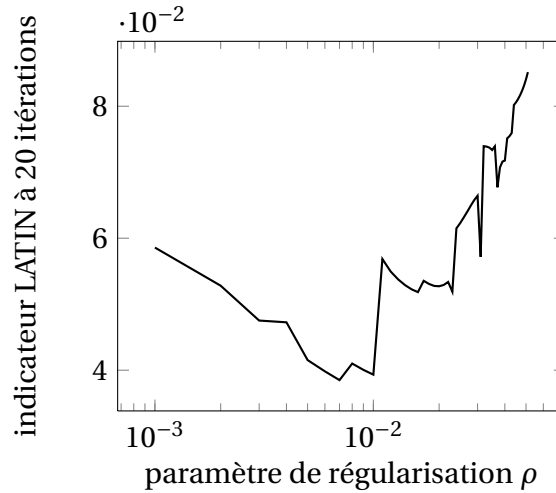
$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/\det & -c/\det & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c/\det & a/\det & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/f \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

avec  $\det = ab - c^2$ . La matrice dans la base usuelle est obtenue par l'application de la matrice de passage,

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{P} \quad (5.11)$$

## 2.1 Influence sur le taux de convergence

Pour tester l'influence du paramètre de régularisation  $\rho$  (EQ. 5.9) de la direction de recherche, on reprend l'exemple de la plaque trouée (FIG. 4.2). On fait varier le coefficient de régularisation entre les valeurs 0,001 et 0,05 par pas de 0,001. On compare l'erreur LATIN obtenue au bout de 20 itérations (FIG. 5.1).



**FIGURE 5.1 :** Indicateurs LATIN obtenus au bout de 20 itérations en fonction du paramètre de régularisation de la direction de recherche

On observe un optimum pour la valeur de 0,01. Une valeur plus petite conduit à des opérateurs moins bien conditionnés et plus grande à une dégradation du taux de convergence. Différent tests menés en faisant varier l'évolution en temps du chargement ont montré une invariance de l'optimum avec comme valeur 0,01. Considérer une régularisation fonction de la plus grande valeur propre semble donc permettre d'obtenir une valeur de  $\rho$  ne dépendant pas du problème traité.

### 3 Détermination des fonctions temporelles

Considérons tout d'abord l'étape de mise à jour des fonctions du temps,  $m - 1$  couples étant déjà introduits,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \Delta\alpha_i) C_i, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \sum_{i=1}^{m-1} (\dot{\alpha}_i + \Delta\dot{\alpha}_i) E_{p,i} \quad (5.12)$$

Les corrections  $\Delta\alpha_i$  des fonctions du temps sont recherchées de manière à minimiser l'erreur en direction de recherche,

$$\{\Delta\alpha_i\}_{i=1}^{m-1} = \arg \min_{\{\Delta\alpha_i\}_{i=1}^{m-1} \in \mathcal{H}_1^{m-1}} \left\| \Theta \sum_{i=1}^{m-1} \Delta\alpha_i C_i - \sum_{i=1}^{m-1} \Delta\dot{\alpha}_i E_{p,i} - \Delta_1 \right\|_{\mathbf{M}} \quad (5.13)$$

avec  $\Delta_1$  regroupant les quantités connues,

$$\Delta_1 = \Theta \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i C_i \right) - \left( \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\alpha}_i E_{p,i} \right)$$

La stationarité de l'erreur en relation de comportement (EQ. 5.13) par rapport aux fonctions temporelles s'écrit de la manière suivante, en notant pour plus de lisibilité  $\underline{\alpha}$  le vecteur de fonction temps  $\{\Delta\alpha_i\}_{i=1}^{m-1}$ ,  $\underline{\mathbb{E}}_p$  et  $\underline{\mathbb{C}}$  les vecteurs des fonctions d'espace associés à la déformation plastique et la contrainte,

$$\forall \underline{\alpha}^*, \quad \int_{[0,T]} \underline{\dot{\alpha}}^* (A_{11} \underline{\dot{\alpha}} + A_{10} \underline{\alpha} - D_1) dt + \int_{[0,T]} \underline{\alpha}^* (A_{01} \underline{\dot{\alpha}} + A_{00} \underline{\alpha} - D_0) dt = 0 \quad (5.14)$$

avec les matrices suivantes

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{\Omega} \mathbb{E}_p : \mathbf{M} \mathbb{E}_p^T d\Omega & A_{10} &= - \int_{\Omega} \mathbb{E}_p : \mathbf{M} \Theta \mathbb{C}^T d\Omega \\ A_{01} &= - \int_{\Omega} \Theta \mathbb{C} : \mathbf{M} \mathbb{E}_p^T d\Omega & A_{00} &= \int_{\Omega} \Theta \mathbb{C} : \mathbf{M} \Theta \mathbb{C}^T d\Omega \\ \underline{D}_1 &= - \int_{\Omega} \mathbb{E}_p : \mathbf{M} \Delta_1 d\Omega & \underline{D}_0 &= \int_{\Omega} \Theta \mathbb{C} : \mathbf{M} \Delta_1 d\Omega \end{aligned} \quad (5.15)$$

#### 3.1 Produit de dérivées aux sens de Galerkin discontinu

Le schéma en temps choisi est de type Galerkin discontinu [Nouy et Ladevèze, 2004b]. Pour donner un sens à l'équation (5.14), il est nécessaire de définir l'intégrale du produit de dérivées au sens de Galerkin discontinu. En effet, on cherche à calculer des intégrales du type :

$$\int_{[0,T]} \alpha(t) \dot{a} b dt \quad (5.16)$$

On choisit de représenter la dérivée  $\dot{a}$  d'une fonction  $a$  par une fonction  $\check{a}$ . Elle est définie comme suit :

$$\int_{[0,T]} \dot{a} v dt = \int_{[0,T]} \check{a} v dt \quad , \quad \forall v \quad (5.17)$$

Il est alors possible de définir un produit de dérivées par l'intégrale suivante :

$$\int_{[0,T]} \alpha(t) \dot{a} \dot{b} dt = \int_{[0,T]} \alpha(t) \check{a} \check{b} dt \quad (5.18)$$

La résolution dépend donc du schéma temporel. Par exemple, pour Galerkin Discontinu d'ordre 0, les fonctions sont constantes par morceaux, donc l'intégrale de la dérivée d'une fonction  $a$  s'écrit :

$$\int_{[0,T]} \dot{a} v dt = \sum_{i=1}^N v(t_i^+) (a(t_i^+) - a(t_i^-)) \quad \forall v \quad (5.19)$$

Il faut trouver une fonction  $a$  qui soit telle que  $\forall v$  :

$$\int_{[0,T]} \dot{a} v dt = \int_{[0,T]} \check{a} v dt \quad (5.20)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^N v(t_i^+) (a(t_i^+) - a(t_i^-)) = \sum_{i=1}^N \Delta t_i v(t_i^+) \check{a}(t_i^+) \quad (5.21)$$

avec  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . Par exemple, la fonction  $\check{a}$  qui prend comme valeur constante sur chaque intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$  la valeur suivante, vérifie ces conditions :

$$\check{a}(t_i^+) = \frac{\check{a}(t_i^+) - \check{a}(t_i^-)}{\Delta t_i} \quad (5.22)$$

Cette écriture permet de donner un sens à la notation (5.16). Dans le paragraphe suivant, le système à résoudre pour déterminer une solution au problème temporel est présenté dans ce cas particulier.

### 3.2 Résolution

En définissant le produit de dérivées aux sens de Galerkin discontinu, on peut écrire sur chaque intervalle de temps  $i$

$$\mathbf{q}_i^{\star T} \mathbf{T}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^{\star T} \mathbf{b}_i$$

avec  $\mathbf{q}_i^T = [\underline{\alpha}_{i-1} \quad \underline{\alpha}_i]$ ,  $\mathbf{b}_i^T = \left[ -\frac{D_1}{dt} \quad \left( \frac{D_1}{dt} + D_0 \right) \right]$  et la matrice élémentaire (où d'intégration)

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{dt^2} & \left( -\frac{A_{10}}{dt} - \frac{A_{11}}{dt^2} \right) \\ \left( -\frac{A_{01}}{dt} - \frac{A_{11}}{dt^2} \right) & \left( \frac{A_{11}}{dt^2} + \frac{A_{10}}{dt} + \frac{A_{01}}{dt} + A_{00} \right) \end{bmatrix}$$

En assemblant les matrices liées à chaque intervalle de temps, on obtient un système global  $\mathbf{T} \mathbf{q} = \mathbf{b}$  de taille le nombre de pas de temps fois le nombre de fonctions couples

PGD. La matrice  $\mathbf{T}$  est symétrique et le système peut être résolu par n'importe quelle technique usuelle. Ce problème peut être vu comme le modèle réduit de l'étape linéaire sur les fonctions d'espace.

Plus de détails sont disponibles dans [Passieux, 2008]. Une méthode alternative ne nécessitant pas d'assemblage y est aussi proposée. Elle consiste à résoudre le système d'équations du second ordre à conditions initiales et finales, obtenu après intégration par partie de l'Eq. 5.14, par une méthode de tir. Cette méthode a été testée et améliorée durant cette thèse mais n'a pas montrée une stabilité suffisante pour être utilisée, bien que présentant un léger gain en temps de calcul.

### 3.3 Mise à jour individuelle

La mise à jour de l'ensemble des fonctions du temps simultanément nécessite le calcul d'un grand nombre d'intégrales spatiales pour tenir compte des couplages entre fonctions. Une idée est de mettre à jour individuellement chaque fonction du temps en ne tenant pas compte des couplages. On détermine alors les fonctions du temps les unes après les autres en minimisant les problèmes suivant,

$$\Delta\alpha_i = \arg \min_{\Delta\alpha_i \in \mathcal{H}_1} \left\| \Theta\Delta\alpha_i C_i - \Delta\dot{\alpha}_i E_{p,i} - \left( \Delta_1 + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\alpha_j C_j + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\dot{\alpha}_j E_{p,j} \right) \right\|_{\mathbf{M}} \quad (5.23)$$

Tant que le nombre de fonctions n'est pas trop important, cette méthode est équivalente à la mise à jour de l'ensemble des fonctions du temps simultanément. Dès que plus de 10 fonctions sont en jeu, cette manière de mettre à jour donne une erreur en direction de recherche plus grande après correction qu'avant.

Par manque de stabilité, cette mise à jour individuelle n'est donc pas utilisée.

## 4 Détermination des fonctions spatiales

Si l'indicateur d'erreur PGD (Eq. 4.12) dépasse une valeur seuil après la mise à jour des fonctions du temps, un nouveau couple est ajouté en correction, avec la fonction du temps  $\alpha_m$  et les fonctions d'espace  $(C_m, E_{p,m})$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \Delta\alpha_i) C_i + \alpha_m C_m, \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \sum_{i=1}^{m-1} (\dot{\alpha}_i + \Delta\dot{\alpha}_i) E_{p,i} + \dot{\alpha}_m E_{p,m} \quad (5.24)$$

Le nouveau couple est recherché comme,

$$(\alpha_m, C_m, E_{p,m}) = \arg \min_{\substack{\alpha_m \in \mathcal{H}_1 \\ C_m \in \mathcal{F}^* \\ (\mathbf{K}C_m + E_{p,m}) \in \mathcal{E}^*}} \left\| \Theta\alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2 \right\|_{\mathbf{M}} \quad (5.25)$$

avec

$$\Delta_2 = \Theta \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \Delta\alpha_i) C_i \right) - \left( \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p - \sum_{i=1}^{m-1} (\dot{\alpha}_i + \Delta\dot{\alpha}_i) E_{p,i} \right)$$

On introduit ici  $e_{\text{ddr}}$  tel que

$$e_{\text{ddr}} = \|\Theta \alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (5.26)$$

Un algorithme de point fixe (ou des puissances) est utilisé pour résoudre le problème de minimisation 5.25. Cet algorithme est initialisé avec une fonction temps aléatoire, puis,

- connaissant la fonction du temps  $\alpha_m$ , les fonctions d'espace sont recherchées comme,

$$(C_m, E_{p,m}) = \arg \min_{\substack{C_m \in \mathcal{F}^* \\ (\mathbf{K}C_m + E_{p,m}) \in \mathcal{E}^*}} \|\Theta \alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (5.27)$$

- connaissant les fonctions d'espace  $(C_m, E_{p,m})$ , la fonction du temps est recherchée comme,

$$\alpha_m = \arg \min_{\alpha_m \in \mathcal{H}_1} \|\Theta \alpha_m C_m - \dot{\alpha}_m E_{p,m} - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (5.28)$$

Le problème de détermination de la fonction temps (5.28) est très proche du problème de mise à jour des fonctions du temps (5.13) et est résolu de la même manière.

Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer les fonctions spatiales (Eq. 5.27). Il s'agit d'un point clef car la majorité du temps de calcul est dépensé à cette étape. Trois méthodes sont présentées ici. La première est issue du travail de [Passieux, 2008] développée pour le cas d'une loi de comportement viscoélastique. Elle est adaptée ici au cas élastoviscoplastique où les opérateurs sont déviatoriques avec l'introduction d'un paramètre de régularisation supplémentaire. La deuxième méthode permet d'éviter l'introduction de cette régularisation mais nécessite de nombreux assemblages de matrice éléments finis. Une troisième méthode est donc introduite, proposée par P. Ladevèze [Ladevèze, 2010], qui permet d'éviter ces assemblages et présente un coût de calcul bien plus faible que les deux précédentes.

Dans la suite du document, les indices  $m$  sont omis pour simplifier les notations.

#### 4.1 Version 1 (V1), issue du cas viscoélastique

Le cas de la viscoélasticité a été traité par [Passieux, 2008]. La méthode consiste à choisir comme inconnues  $E$  et  $C$  en utilisant la loi d'état. Le problème de minimisation 5.27 s'écrit alors

$$(C, E) = \arg \min_{\substack{C \in \mathcal{F}^* \\ E \in \mathcal{E}^*}} \|\Theta \alpha C + \mathbf{K}^{-1} \dot{\alpha} C - \dot{\alpha} E - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (5.29)$$

La stationarité de l'erreur par rapport aux fonctions spatiales s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \int_{\Omega} C^* : (A_{CC}C - A_{CE}E + \Delta_C) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} E^* : (A_{EE}E - A_{EC}C - \Delta_E) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$



avec,

$$\begin{aligned}
A_{CC} &= (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]} + (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\Theta\dot{\alpha}, \alpha)_{[0,T]} + (\Theta\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\alpha, \dot{\alpha})_{[0,T]} + (\Theta\mathbf{M}\Theta\alpha, \alpha)_{[0,T]} \\
A_{CE} &= (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]} + (\Theta\mathbf{M}\dot{\alpha}, \alpha)_{[0,T]} \\
A_{EC} &= (\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]} + (\Theta\mathbf{M}\alpha, \dot{\alpha})_{[0,T]} \\
A_{EE} &= (\mathbf{M}\dot{\alpha}, \dot{\alpha})_{[0,T]} \\
\Delta_C &= -(\Theta\mathbf{M}\Delta_2, \alpha)_{[0,T]} + (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\Delta_2, \dot{\alpha})_{[0,T]} \\
\Delta_E &= -(\mathbf{M}\Delta_2, \dot{\alpha})_{[0,T]}
\end{aligned}$$

avec  $(a, b)_{[0,T]} = \int_{[0,T]} ab \, dt$ .

Le problème ainsi obtenu peut-être vu comme l'association de deux problèmes couplés : un problème en contraintes (problème statique) et un problème en déplacements (cinématique). Une première façon de le résoudre consiste à assembler le problème global et à le résoudre de manière directe. Cette résolution conduirait à l'inversion d'un système deux fois plus grand que celui d'un problème éléments finis standard, ce qui n'est pas envisageable. Pour réduire le coût de cette étape, une technique de point fixe est utilisée avec des itérations entre :

- un problème cinématique :  
connaissant  $C$ , la fonction de déformation  $E$  est recherchée comme,

$$E = \arg \min_{E \in \mathcal{E}^*} \|\Theta\alpha C + \mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}C - \dot{\alpha}E - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (5.31)$$

- et un problème statique :  
connaissant  $E$ , la fonction de contrainte  $C$  est recherchée comme,

$$C = \arg \min_{C \in \mathcal{F}^*} \|\Theta\alpha C + \mathbf{K}^{-1}\dot{\alpha}C - \dot{\alpha}E - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (5.32)$$

#### 4.1.1 Problème statique

Le problème formulé en contrainte doit d'abord être dualisé afin que l'on puisse le résoudre par une méthode éléments finis standard. Pour cela, la contrainte d'admissibilité  $C^* \in \mathcal{F}^*$  est assurée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange  $\tilde{E} \in \mathcal{E}^*$ . Le problème est reformulé de la manière suivante : trouver  $C \in \mathcal{F}^*$  et  $\tilde{E} \in \mathcal{E}^*$  tels que  $\forall C^*$

$$\int_{\Omega} C^* : (A_{CC}C - A_{CE}E + \Delta_C) \, d\Omega - \int_{\Omega} C^* : \tilde{E} = 0 \quad (5.33)$$

et

$$\forall \tilde{E}^* \in \mathcal{E}^*, \quad \int_{\Omega} C : \tilde{E}^* = 0 \quad (5.34)$$

$C^*$  étant désormais quelconque, on peut écrire la relation (5.33) en tout point :

$$C = A_{CC}^{-1} (A_{CE}E - \Delta_C + \tilde{E}) \quad (5.35)$$

Cette relation, injectée dans l'équation d'admissibilité (5.34) du multiplicateur  $\tilde{E}$ , permet d'écrire :

$$\forall \tilde{E}^* \in \mathcal{E}^*, \quad \int_{\Omega} A_{CC}^{-1} (A_{CE}E - \Delta_C + \tilde{E}) : \tilde{E}^* = 0 \quad (5.36)$$

Ce problème est résolu par une technique éléments finis. Après résolution,  $C$  est déduit de  $\tilde{E}$  grâce à l'équation (5.35).

#### 4.1.2 Problème cinématique

Il s'agit de trouver  $E$  tel que

$$\forall E^*, \quad \int_{\Omega} E^* : (A_{EE}E - A_{EC}C - \Delta_E) d\Omega = 0 \quad (5.37)$$

Ce problème est résolu par une technique éléments finis classique.

#### 4.1.3 Extension au cas de quantités déviatoriques

Dans le cas d'un modèle matériau plastique, la direction de recherche tangente conduit à un opérateur portant uniquement sur la partie déviatorique des champs. Les opérateurs  $A_{CC}$ ,  $A_{EE}$  possèdent alors une valeur propre nulle sur la partie pression. Les problèmes éléments finis des problèmes cinématique et statique ne peuvent pas être résolus à cause cette valeur propre nulle. Une possibilité pour supprimer cette valeur propre nulle est de régulariser l'opérateur de définition de la norme  $\mathbf{M}$  pour la partie en pression. Le choix de l'amplitude de la valeur propre conditionne la partie pression du champ de déformation plastique  $E_p$ , qui est théoriquement nulle.

Un paramètre  $\lambda$  est introduit sur la partie pression, ce qui donne dans la base déviatorique (5.10),

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/\det & -c/\det & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c/\det & a/\det & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/f \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Une valeur possible du paramètre de régularisation est  $\lambda = \min(b/\det, a/\det)$ .

#### 4.1.4 Exemple simple, influence du paramètre de régularisation

On prend le cas test le plus simple possible. Il s'agit d'un cube en traction compression. Les symétries du problème permettent de ne considérer qu'un huitième de la structure (FIG. 5.2). Le problème est homogène en espace, la décomposition PGD ne fait donc intervenir normalement qu'un couple.

On fait varier le coefficient de régularisation  $\lambda$  entre 1 et 1000. On observe une dépendance inversement proportionnelle entre le coefficient de régularisation et le ratio

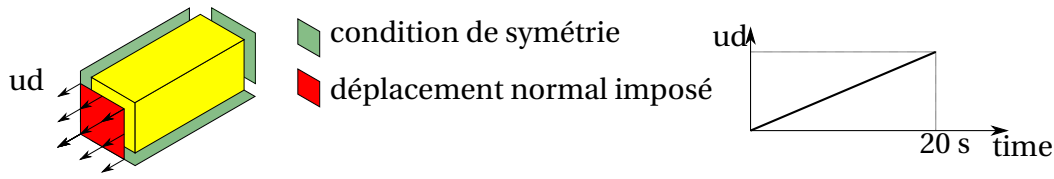


FIGURE 5.2 : Définition du problème du cube

entre la trace et le Mises (norme de la partie déviatorique) de la première fonction spatiale pour la déformation plastique  $E_{p,1}$  (FIG. 5.3).

$$\text{ratio} = \frac{\text{Tr}(E_{p,1})}{E_{p,1}^D} \quad (5.39)$$

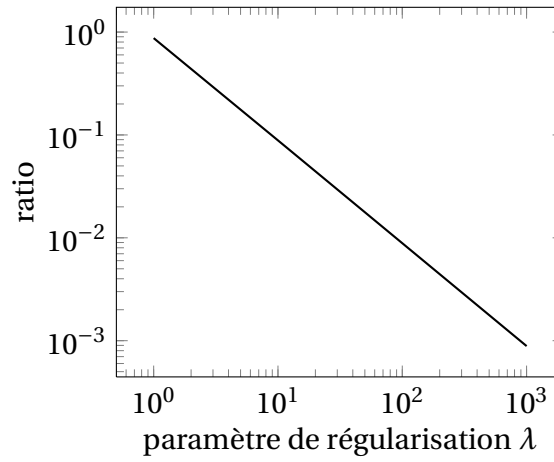


FIGURE 5.3 : Ratio entre la partie pression et la partie déviatorique de la première fonction d'espace générée en fonction du paramètre de régularisation

Si le coefficient de régularisation n'est pas pris assez grand, un deuxième couple PGD est ajouté en correction au cours des itérations de la LATIN, qui rend la déformation plastique déviatorique. Ceci n'est pas très satisfaisant, car le problème est homogène en espace et un seul couple est théoriquement nécessaire.

## 4.2 Version 2 (V2), développée pour les quantités déviatoriques

Pour palier les problèmes d'opérateur déviatoriques dans le cas d'un modèle matériau plastique, une nouvelle manière de calculer les fonctions d'espace est introduite.

On introduit un multiplicateur de Lagrange  $\tilde{E} \in \mathcal{E}^*$  pour imposer  $\mathbf{K}(E - E_p) \in \mathcal{F}^*$

$$e'_{\text{ddr}} = \|\alpha\Theta\mathbf{K}(E - E_p) - \dot{\alpha}E_p - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} + \int_{\Omega} \mathbf{K}(E - E_p) : \tilde{E} \, d\Omega \quad (5.40a)$$

$$\forall \tilde{E}^* \in \mathcal{E}^*, \quad \int_{\Omega} \mathbf{K}(E - E_p) : \tilde{E}^* \, d\Omega = 0 \quad (5.40b)$$

La stationarité de l'erreur en direction de recherche est donnée par

$$\begin{aligned} \forall E^* \in \mathcal{E}^*, \forall E_p^*, \tilde{E} \in \mathcal{E}^* \\ \int_{[0,T] \times \Omega} (\alpha \Theta \mathbf{K}(E - E_p) - \dot{\alpha} E_p - \Delta_2) : \mathbf{M}(\alpha \Theta \mathbf{K} E^*) \, d\Omega \, dt \\ + \int_{[0,T] \times \Omega} (\alpha \Theta \mathbf{K}(E - E_p) - \dot{\alpha} E_p - \Delta_2) : \mathbf{M}(-\alpha \Theta \mathbf{K} E_p^* - \dot{\alpha} E_p^*) \, d\Omega \, dt \\ + \int_{\Omega} \mathbf{K}(E^* - E_p^*) : \tilde{E} \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

avec

$$\forall \tilde{E}^* \in \mathcal{E}^* \int_{\Omega} \mathbf{K}(E - E_p) : \tilde{E}^* \, d\Omega = 0 \quad (5.42)$$

#### 4.2.1 Minimisation suivant $E_p^*$

Le  $\forall E_p^*$  permet d'écrire une relation locale

$$A_{pp} E_p = A_{pe} E + A_{pet} \tilde{E} + A_{pd} \quad (5.43)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{pp} &= \int_{[0,T]} (-\alpha \Theta \mathbf{K} - \dot{\alpha} \mathbb{1}) \mathbf{M}(-\alpha \Theta \mathbf{K} - \dot{\alpha} \mathbb{1}) \, dt & A_{pe} &= \int_{[0,T]} (\alpha \Theta \mathbf{K}) \mathbf{M}(\alpha \Theta \mathbf{K} + \dot{\alpha} \mathbb{1}) \, dt \\ A_{pet} &= \mathbf{K} & A_{pd} &= \int_{[0,T]} (\Delta) \mathbf{M}(-\alpha \Theta \mathbf{K} - \dot{\alpha} \mathbb{1}) \, dt \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Minimisation suivant $E^*$

Le  $\forall E^* \in \mathcal{E}^*$  permet d'écrire,

$$\forall E^* \in \mathcal{E}^*, \tilde{E} \in \mathcal{E}^* \int_{\Omega} (B_{ee} E + B_{ep} E^p + B_{et} \tilde{E} + B_{ed}) : E^* \, d\Omega = 0 \quad (5.44)$$

avec

$$\begin{aligned} B_{ee} &= \int_{[0,T]} (\alpha \Theta \mathbf{K}) \mathbf{M}(\alpha \Theta \mathbf{K}) \, dt & B_{ep} &= \int_{[0,T]} (-\alpha \Theta \mathbf{K} - \dot{\alpha} \mathbb{1}) \mathbf{M}(\alpha \Theta \mathbf{K}) \, dt \\ B_{ed} &= \int_{[0,T]} (-\Delta) \mathbf{M}(\alpha \Theta \mathbf{K}) \, dt & B_{et} &= K \end{aligned}$$

En remplaçant  $E_p$  par (5.43) on obtient,

$$\forall E^* \in \mathcal{E}^*, \tilde{E} \in \mathcal{E}^* \int_{\Omega} (C_{ee} E + C_{et} \tilde{E} + C_{ed}) : E^* \, d\Omega = 0 \quad (5.45)$$

avec,

$$C_{ee} = B_{ee} + B_{ep} A_{pp}^{-1} A_{pe} \quad C_{et} = K + B_{ep} A_{pp}^{-1} A_{pet} \quad C_{ed} = B_{ed} + B_{ep} A_{pp}^{-1} A_{pd}$$

qui peut être résolu par une technique éléments finis si l'on connaît  $E$ .

### 4.2.3 Multiplicateur de Lagrange

En remplaçant  $E_p$  par (5.43) dans (5.42) on obtient,

$$\forall \tilde{E}^* \in \mathcal{E}^*, E \in \mathcal{E}^* \int_{\Omega} (C_{etet}\tilde{E} + C_{ete}E + C_{etd}) : \tilde{E}^* d\Omega = 0 \quad (5.46)$$

avec

$$C_{etet} = -KA_{pp}^{-1}A_{pet} \quad C_{ete} = K - KA_{pp}^{-1}A_{pe} \quad C_{etd} = -KA_{pp}^{-1}A_{pd}$$

qui peut être résolu par une technique éléments finis si l'on connaît  $E$ .

### 4.2.4 Résolution

Le système couplé (5.45) (5.46) peut être résolu en assemblant

$$\forall \tilde{E}^* \in \mathcal{E}^*, \forall E^* \in \mathcal{E}^* \int_{\Omega} (C_{ee}E + C_{eet}\tilde{E} + C_{ed}) : E^* d\Omega + \int_{\Omega} (C_{etet}\tilde{E} + C_{ete}E + C_{etd}) : \tilde{E}^* d\Omega = 0 \quad (5.47)$$

On remarque que les opérateurs  $C_{ee}$  et  $C_{etet}$  n'ont pas de valeur propre nulle sur la partie pression même si les opérateurs associés à la direction de recherche ou à la norme en possède une. Ce point était problématique dans la version 1.

L'assemblage conduit à résoudre un système avec deux fois plus d'inconnues qu'un problème éléments finis standard. Ceci pénalise fortement les temps de calcul. Sur un exemple de plaque trouée, un algorithme de point fixe similaire à celui utilisé dans le cas viscoélastique n'a pas montré de bonnes propriétés de convergence. Une approche itérative de type GMRES est donc adoptée pour résoudre le système couplé non symétrique. Le système complet à résoudre avec une technique éléments finis classique est du type

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ee} & \mathbf{C}_{eet} \\ \mathbf{C}_{ete} & \mathbf{C}_{etet} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ed} \\ \mathbf{C}_{etd} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

On choisit comme préconditionneur l'inverse des termes diagonaux par bloc

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ee}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{etet}^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Chaque application du préconditionneur correspond alors à la résolution de chaque système de manière découplé. Le stockage des décompositions de Choleski des matrices  $\mathbf{C}_{ee}$  et  $\mathbf{C}_{etet}$  rend les résolutions multiples peu coûteuses. Une fois la matrice décomposée, la résolution consiste uniquement en une descente remonté. Un indicateur d'erreur est disponible dans la méthode GMRES, qui permet de contrôler la convergence.

#### 4.2.5 Exemple simple

On reprend l'exemple simple du cube (FIG. 5.2). Avec cette nouvelle méthode pour calculer la fonction spatiale, un seul couple PGD est généré au cours des itérations de la LATIN jusqu'à convergence. De plus, il n'est plus nécessaire de régulariser sur la partie pression de la direction de recherche.

Par contre le temps de calcul n'est pas satisfaisant puisqu'il 10 fois plus grand que celui de la première méthode. La résolution du problème couplés avec GMRES et l'assemblage des matrices éléments finis sont les étapes de l'algorithme les plus coûteuses.

### 4.3 Version 3 (V3), méthode itérative pour la détermination des fonctions spatiales

Pour diminuer le temps de calcul de la fonction d'espace et pour assurer que les fonctions d'espace de la déformation plastique seront bien déviatoriques, une troisième méthode est proposée par P. Ladevèze [Ladevèze, 2010].

L'idée de départ est que l'inconnue principale du problème de minimisation est la déformation plastique. En effet l'équation d'équilibre lie l'ensemble des quantités,

$$\forall E^* \in \mathcal{E}^* \quad \int_{\Omega} \mathbf{K}(E - E_p) : E^* \, d\Omega = 0 \quad (5.50)$$

Un opérateur  $\mathbb{E}$  tel que  $E = \mathbb{E}E_p$  peut être introduit. De même, comme  $C = \mathbf{K}(E - E_p)$ , un opérateur  $\mathbb{C}$  tel que  $C = \mathbb{C}E_p$  peut être défini ( $\mathbb{C} = \mathbf{K}(\mathbb{E} - \mathbb{I})$ ).

L'erreur en direction de recherche (5.26) est donc seulement une fonction de  $E_p$ .

$$e_{\text{ddr}}(E_p) = \|\Theta \alpha \mathbb{C}E_p - \dot{\alpha}E_p - \Delta_2\|_{\mathbf{M}} \quad (5.51)$$

La minimisation de cette erreur par rapport à  $E_p$  serait possible mais demanderait un effort de calcul trop grand. On utilise donc une technique itérative où la dépendance de  $E$  et  $C$  à  $E_p$  est utilisée.

Cette dépendance passe par la résolution de l'équation d'équilibre (5.50). Celle-ci est effectuée par une technique éléments finis. L'opérateur impliqué dans cette résolution peut être décomposé avec un algorithme de Cholesky et être stocké, afin de diminuer fortement le coût de calcul. On peut remarquer que cet opérateur est le même que celui mis en jeu pour la détermination de l'initialisation élastique de la LATIN.

#### 4.3.1 Problème de résidu

Le problème de minimisation 5.27 peut être récrit sous la forme d'un problème quadratique. L'erreur en direction de recherche  $e_{\text{ddr}}$  (5.26, 5.51) est réécrite en fonction de  $E$  et  $E_p$  en utilisant la loi de Hooke et la partition des déformations,  $C_m = \mathbf{K}(E - E_p)$ ,

$$e_{\text{ddr}}(Z) = 1/2 \int_{\Omega} QZ : Z \, d\Omega + \int_{\Omega} L : Z \, d\Omega + \alpha^2/2 \quad (5.52)$$

avec  $Z = \begin{bmatrix} E - E_p & E_p \end{bmatrix}$  qui ne dépend que de  $E_p$  car  $E = \mathbb{E}E_p$ ,  $Q$  une matrice symétrique,  $L$  une forme linéaire et  $a$  un scalaire (EQ. 5.53),

$$Q = \begin{bmatrix} \int_{[0,T]} \alpha \Theta \mathbf{K} \mathbf{M} \alpha \Theta \mathbf{K} dt & - \int_{[0,T]} \alpha \Theta \mathbf{K} \mathbf{M} \dot{\alpha} dt \\ - \int_{[0,T]} \alpha \Theta \mathbf{K} \mathbf{M} \dot{\alpha} dt & \int_{[0,T]} \dot{\alpha} \mathbf{M} \dot{\alpha} dt \end{bmatrix} \quad (5.53a)$$

$$L = \begin{bmatrix} - \int_{[0,T]} \alpha \Theta \mathbf{K} \mathbf{M} \Delta_2 dt \\ \int_{[0,T]} \dot{\alpha} \mathbf{M} \Delta_2 dt \end{bmatrix} \quad (5.53b)$$

$$a^2/2 = \int_{[0,T]} \Delta_2 \mathbf{M} \Delta_2 dt \quad (5.53c)$$

Le minimum de  $e_{\text{ddr}}$  est trouvé pour

$$(QZ + L) : Z^* = 0, \quad \forall Z^*, \forall E^* \in \mathcal{E}^*, \forall C^* \in \mathcal{F}^* \quad (5.54)$$

On définit  $q = \int_{\Omega} (QZ + L) : Z^* d\Omega$ ; séparé en deux parties,

$$q = \int_{\Omega} (Q_1 Z + L_1) : (E - E_p)^* d\Omega + \int_{\Omega} (Q_2 Z + L_2) : E_p^* d\Omega \quad (5.55)$$

avec  $Q_1$ ,  $L_1$  et  $Q_2$ ,  $L_2$  respectivement la première et deuxième ligne de  $Q$  et  $L$ . La première intégrale peut être exprimée en fonction de la seule différentielle  $E_p^*$  en utilisant l'équation d'équilibre. On définit  $\Sigma \in \mathcal{E}^*$  un champ cinématiquement admissible à zéro tel que

$$\forall E^* \in \mathcal{E}^* \quad \int_{\Omega} \mathbf{K} \Sigma : E^* d\Omega + \int_{\Omega} (Q_1 Z + L_1) : E^* d\Omega = 0 \quad (5.56)$$

$\Sigma$  peut être trouvé par une méthode éléments finis si  $Z$  (et donc  $E_p$ ) est connu.

Comme le champ  $C^*$  est statiquement admissible à zéro,  $C^* \in \mathcal{F}^*$ ,

$$\forall \Sigma \in \mathcal{E}^* \quad \int_{\Omega} \mathbf{K} (E^* - E_p^*) : \Sigma d\Omega = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \mathbf{K} E^* : \Sigma d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{K} E_p^* : \Sigma d\Omega \quad (5.57)$$

En introduisant (5.57) dans (5.56) puis le tout dans (5.55),  $q$  peut s'écrire,

$$q = \int_{\Omega} (Q_1 Z + L_1) : (-E_p)^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{K} \Sigma : E_p^* d\Omega + \int_{\Omega} (Q_2 Z + L_2) : E_p^* d\Omega \quad (5.58)$$

En introduisant  $R(Z, \Sigma)$  tel que,

$$R(Z, \Sigma) = -(Q_1 Z + L_1) + (Q_2 Z + L_2) - \mathbf{K} \Sigma \quad (5.59)$$

$q$  se récrit,

$$q = \int_{\Omega} R(Z, \Sigma) : E_p^* d\Omega \quad (5.60)$$

$R(Z, \Sigma)$  est un résidu, dépendant de manière de la seule variable  $E_p$ , car  $Z$  et  $\Sigma$  dépendent directement de  $E_p$ . La solution est trouvée pour  $R$  nul.

### 4.3.2 Procédure itérative

On utilise une technique itérative, similaire à un gradient conjugué pour trouver  $E_p$  tel que  $R$  tende vers zéro. Il s'agit de minimiser l'erreur (5.52) itérativement, suivant des directions orthogonales.

Cette procédure est initialisée avec  $E_{p,0} = 0$ , qui donne comme déformation totale associée par l'équilibre (5.57) que  $E_0 = 0$  et  $Z_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ .

À l'itération  $n$  de cette procédure itérative, une correction  $Z_n$  de  $Z$  est recherchée. Le résidu  $R$  doit dans un premier temps être calculé à l'aide de l'équation (5.59), avec  $\Sigma$  calculé en résolvant le problème (5.56) (problème éléments finis),  $Z$  étant connu par les précédentes itérations,

$$Z = \sum_{j=0}^{n-1} Z_j$$

Le résidu s'écrit en fonction de  $E_p$  comme,

$$R(Z, \Sigma) = - (Q_{11} (E - E_p) + Q_{12} E_p + L_1) + (Q_{21} (E - E_p) + Q_{22} E_p + L_2) - \mathbf{K} \Sigma$$

On choisit une direction  $E''_{p,n}$  de minimisation,

$$E''_{p,n} = (Q_{22} - Q_{12})^{-1} R$$

L'équilibre (5.57) permet de calculer la déformation totale associée  $E''_n$  (problème éléments finis). La direction  $Z''_n = [E''_n - E''_{p,n} \ E''_{p,n}]^T$  est orthogonalisée par rapport aux directions des itérations précédentes avec une procédure de Gram-Schmitt pour trouver  $Z'_n$  tel que

$$Z''_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i Z'_i + Z'_n \quad (5.61)$$

et

$$\int_{\Omega} Q Z'_j : Z'_n \, d\Omega = 0 \quad \forall j < n \quad (5.62)$$

En pratique, l'orthogonalisation avec la direction de l'itération  $n-1$  suffit pour assurer la convergence. On cherche ensuite à minimiser l'erreur  $e_{\text{ddr}}$  suivant cette direction, on introduit l'intensité  $\lambda$  de descente,

$$Z_n = \lambda Z'_n \quad (5.63)$$

La nouvelle valeur de  $Z$  est

$$Z = \sum_{j=0}^{n-1} Z_j + Z_n$$

qui donne pour valeur de l'erreur,

$$e_{\text{ddr}}(Z + Z_n) = e^2(Z) + e^2(Z_n) \quad (5.64)$$



avec,

$$e_{\text{ddr}}(Z_n) = e^2(\lambda Z'_n) = \frac{1}{2} \lambda^2 \int_{\Omega} QZ'_n : Z'_n \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega} LZ'_n \, d\Omega \quad (5.65)$$

Le minimum de l'erreur  $e_{\text{ddr}}(Z + Z_n)$  est trouvé pour,

$$\lambda = - \frac{\int_{\Omega} LZ'_n \, d\Omega}{\int_{\Omega} QZ'_n : Z'_n \, d\Omega} \quad (5.66)$$

avec cette valeur de  $\lambda$ ,

$$e_{\text{ddr}}(Z_n) = - \frac{1}{2} \frac{(\int_{\Omega} LZ'_n \, d\Omega)^2}{\int_{\Omega} QZ'_n : Z'_n \, d\Omega} \quad (5.67)$$

L'algorithme itératif est stoppé quand  $e_{\text{ddr}}(Z_n) / \|\Delta_2\|_{\mathbf{M}}$  atteint une valeur seuil. En pratique, nous utilisons une valeur de  $10^{-2}$  atteinte dans nos tests en une dizaine d'itérations.

#### 4.4 Comparaison des trois méthodes

Les trois méthodes sont comparées selon leur capacité à traiter un problème déviatorique, la présence d'un indicateur d'erreur, la nécessité d'assembler des matrices éléments finis, le fait de garantir une minimisation de l'erreur en direction de recherche, et du temps de calcul (TAB. 5.1).

	V1	V2	V3
$E_p$ déviatorique		X	X
Critère d'erreur		X	X
<b>Pas</b> d'assemblage matrice EF			X
Minimisation $e_{\text{ddr}}$			X
Temps de calcul	1,16 (s)	9,15 (s)	0,51 (s)

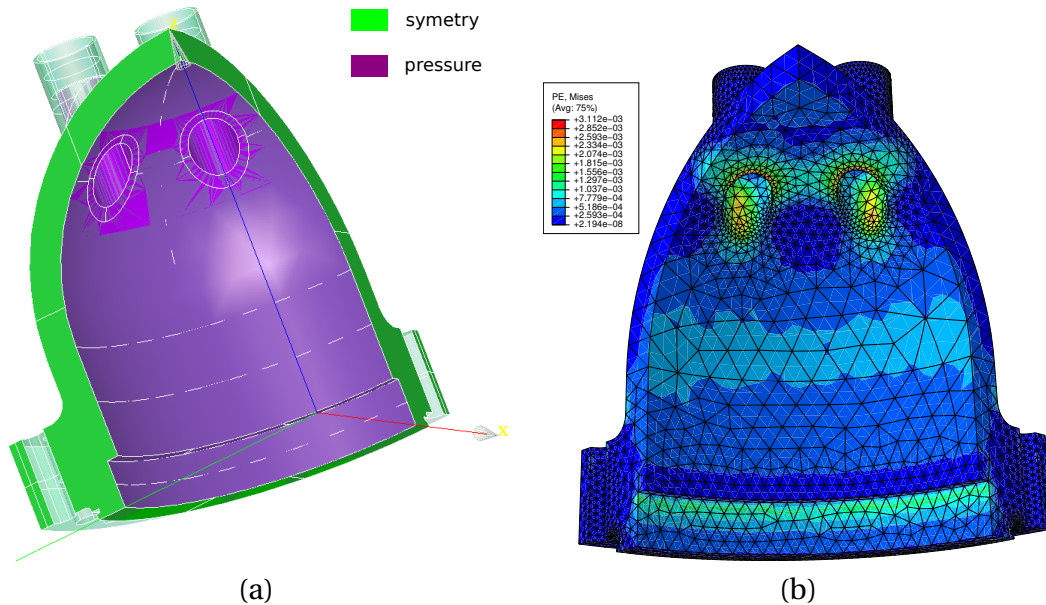
**Tableau 5.1 :** Comparaison des trois méthodes de détermination des fonctions spatiales

La troisième méthode de détermination des fonctions spatiale est plus pertinente sur l'ensemble des critères considérés.

## 5 Illustration des performances

Pour montrer les performances de la nouvelle manière de trouver les fonctions spatiales de la PGD, un exemple à la géométrie complexe nécessitant un grand nombre de degrés de liberté, issue de la documentation d'ABAQUS, est étudié. Il s'agit de la partie supérieure d'un réservoir sous pression. Les conditions de symétrie permettent de ne considérer qu'un quart de la structure. Dans l'exemple original, la partie haute est

reliée à une partie basse à l'aide de boulons. Cet assemblage n'est pas pris en compte ici et des conditions de déplacement normal imposé sur la face inférieure sont utilisées en remplacement (FIG. 5.4 (a)). La structure est soumise à deux cycles de chargement, conduisant à une déformation totale maximum de 0,4%.



**FIGURE 5.4 :** Exemple de réservoir sous pression, (a) définition des conditions aux limites, (b) champ de déformation plastique (norme Mises) au pas de temps 40

Un maillage de 44 856 éléments tétraédriques à dix nœuds est utilisé, avec 229 614 degrés de libertés, et 60 piquets de temps divisent l'intervalle de temps. Un indicateur LATIN de 1% est atteint en 80 itérations. Le champ de déformation plastique est présenté sur la figure (FIG. 5.4 (b)).

### 5.1 Répartition du temps de calcul pour le premier calcul

On compare tout d'abord le temps de calcul par rapport au code de calcul ABAQUS (TAB. 5.2). Ces temps sont comparables. Le but de la stratégie est d'être efficace pour traiter un ensemble de problèmes, et un gain fort n'est attendu que dans ce cas.

	temps (s)
ABAQUS	1200
LATIN	840

**Tableau 5.2 :** Comparaison du temps de calcul entre ABAQUS et la LATIN

Le temps de calcul des différentes étapes est ensuite mesuré sur cet exemple (FIG. 5.5). On remarque que la phase de génération des fonctions d'espace représente

une grande part du temps total. Le développement d'une méthode efficace de détermination des fonctions d'espace est donc bien un point central dans la méthode LATIN avec PGD. La mise à jour des fonctions du temps représente aussi une part non négligeable du temps de calcul.

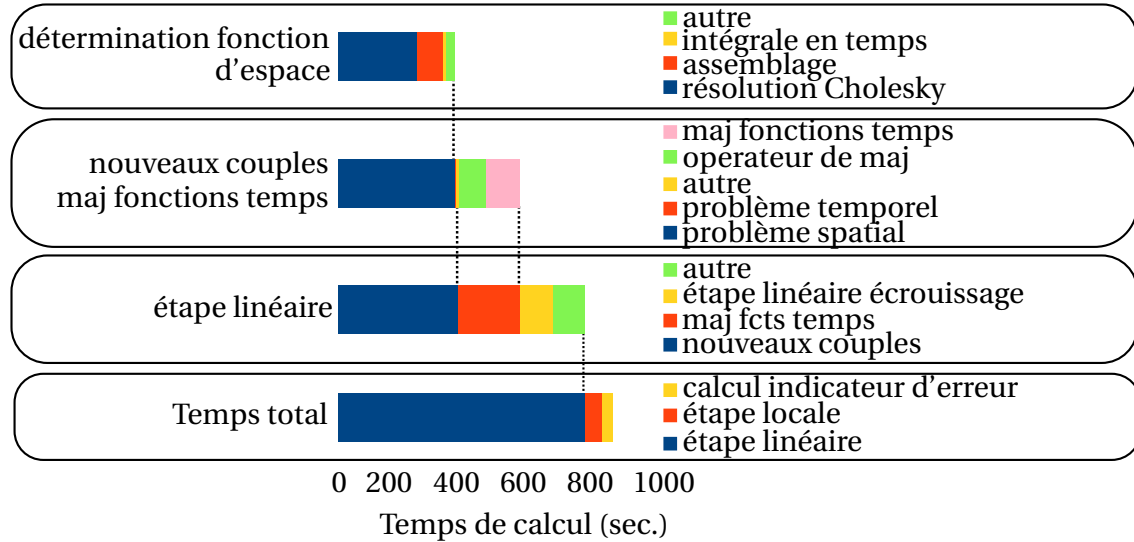
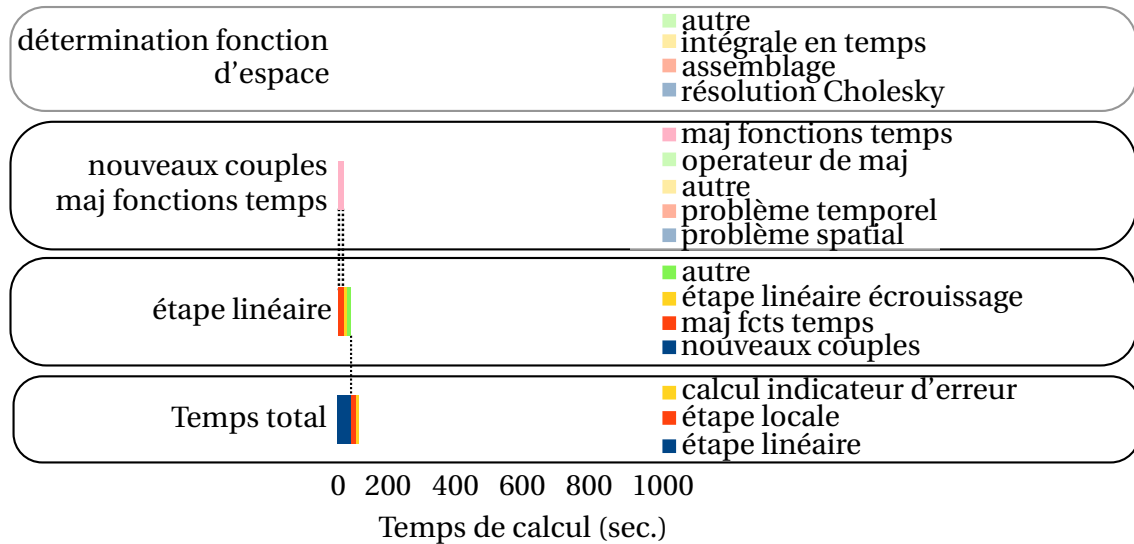


FIGURE 5.5 : Répartition du temps de calcul pour le premier calcul

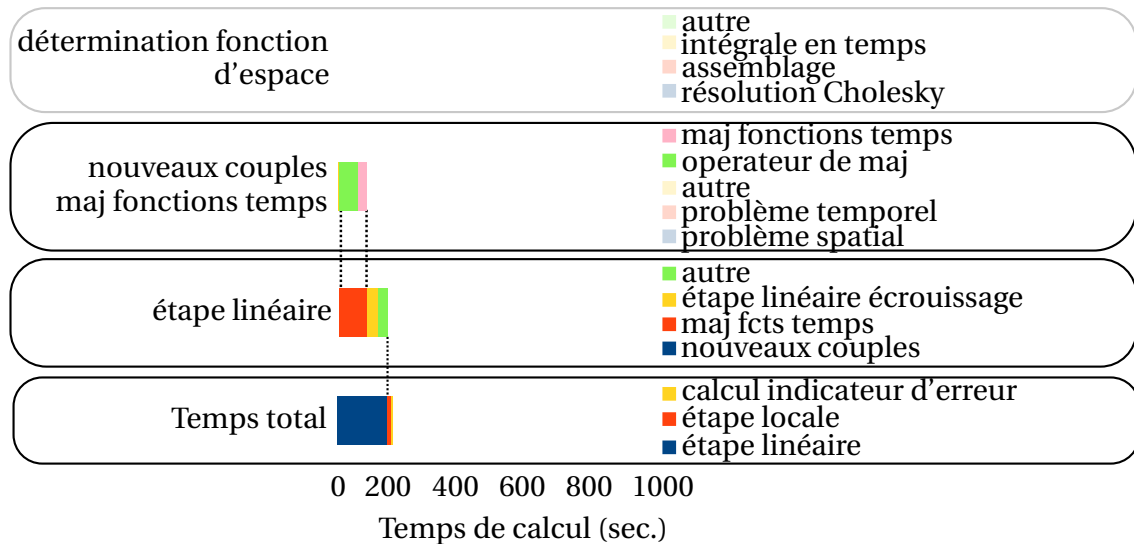
## 5.2 Répartition du temps de calcul pour un deuxième calcul

Plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

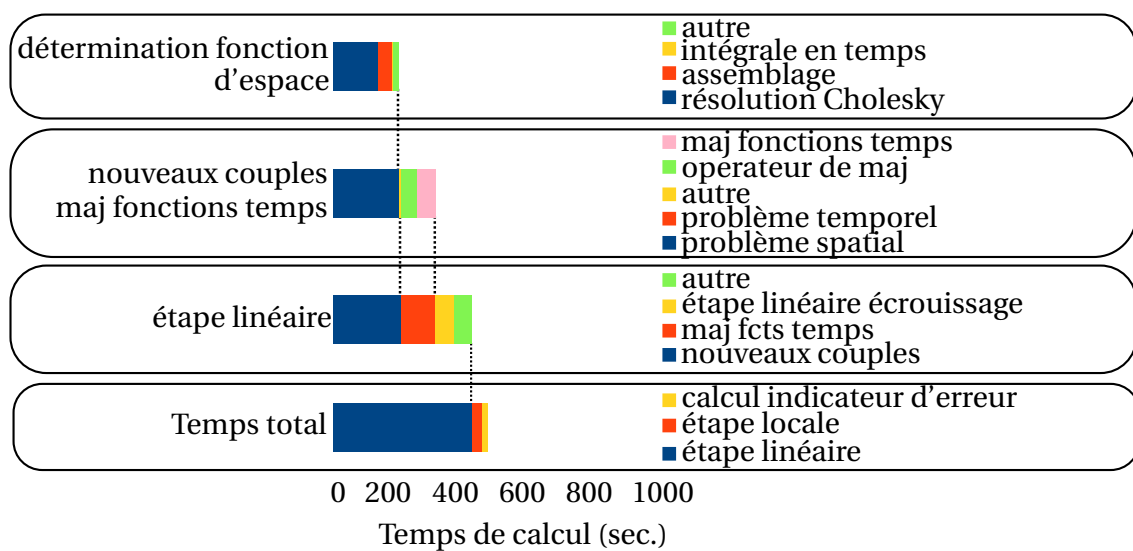
- si l'on considère un deuxième calcul en faisant varier très peu la solution (variation de 10% de  $\gamma$  le terme de rappel de l'écrouissage), seule une mise à jour des fonctions du temps est nécessaire et le temps de calcul est très faible (FIG. 5.6) et le gain est de l'ordre de 10 ;
- si la solution varie plus (variation de 10% de  $\sigma_y$  le seuil élastique), et que la direction de recherche doit être mise à jour, le temps de construction de l'opérateur de mise à jour des fonctions du temps est prépondérant dans le temps de calcul global (FIG. 5.7) et le gain est de l'ordre de 4 ;
- enfin si la solution varie beaucoup (variation de 10% de l'amplitude du chargement), la direction de recherche doit être mise à jour et des nouveaux couples sont générés dans la décomposition PGD, le gain apporté par la stratégie multiparamétrique est alors plus faible, de l'ordre de 2 (FIG. 5.8).



**FIGURE 5.6 :** Répartition du temps de calcul pour un calcul ne faisant intervenir que la mise à jour des fonctions du temps



**FIGURE 5.7 :** Répartition du temps de calcul pour un calcul demandant la mise à jour de la direction de recherche mais pas de nouveaux couples PGD



**FIGURE 5.8 :** Répartition du temps de calcul pour un calcul demandant la mise à jour de la direction de recherche et la génération de nouveaux couples PGD



# Chapitre 6

## Application au cas test du projet APPROFI

*Dans ce dernier chapitre, l'exemple du projet APPROFI est présenté. Le problème est tout d'abord décrit et une comparaison avec ABAQUS est effectuée pour un jeu de valeurs d'entrée. L'exemple d'un plan d'expérience complet est ensuite traité avec la stratégie multiparamétrique. Le cas du calcul de la probabilité de défaillance est ensuite considéré, avec la difficulté supplémentaire par rapport au plan d'expérience complet de la nécessité de définition d'un critère pour déterminer la solution proche servant d'initialisation.*

### Table des matières

1	Présentation du logiciel 3D . . . . .	88
2	Définition du problème . . . . .	88
3	Comparaison avec ABAQUS . . . . .	89
4	Multiparamétrique, plan d'expérience complet . . . . .	90
5	Multiparamétrique, cas interactif . . . . .	90

## 1 Présentation du logiciel 3D

Basé sur la plateforme du LMT-Cachan, le logiciel développé permet d'importer des maillages de différents formats (AVS, UNV, ODB, INP, MSH,...), et de générer des fichiers de résultats aux formats ABAQUS (ODB), et PARAVIEW (VTU). Un effort particulier a été effectué pendant la thèse pour ajouter les formats d'entrée (INP) et sortie (ODB) d'ABAQUS, pour pouvoir échanger avec les partenaires du projet APPROFI.

La résolution de systèmes linéaires peut s'effectuer soit avec des solveurs classiques codés dans la plateforme (Cholesky, Cholesky incomplet, LDL, méthodes itératives...), soit avec des solveurs implantés dans les bibliothèques telles que SuiteSparse, Intel-MKL, MUMPS et interfacées avec la plateforme. Le solveur de type Cholesky de la bibliothèque MKL est utilisé majoritairement dans le logiciel car il a montré les meilleures performances pour la résolution des problèmes rencontrés.

De nombreux types d'élément peuvent être utilisés. Tous les exemples présentés sont maillés avec des éléments tétraédriques à 10 nœuds (TET10), mais l'usage d'autres types d'élément ne serait pas problématique.

## 2 Définition du problème

Une pièce banalisée est proposée par SNECMA pour le projet APPROFI. Cette pièce est soumise à une température élevée et la SNECMA propose de modéliser son comportement matériau par une loi élastoplastique de type Chaboche avec un écrouissage cinématique de type Armstrong-Frederick. Les coefficients matériaux considérés sont ceux du tableau 2.1.

2 cycles de chargement sont imposés pour atteindre le cycle stabilisé. Des conditions aux limites en déplacement sont imposées sur les faces latérales (FIG. 6.1).

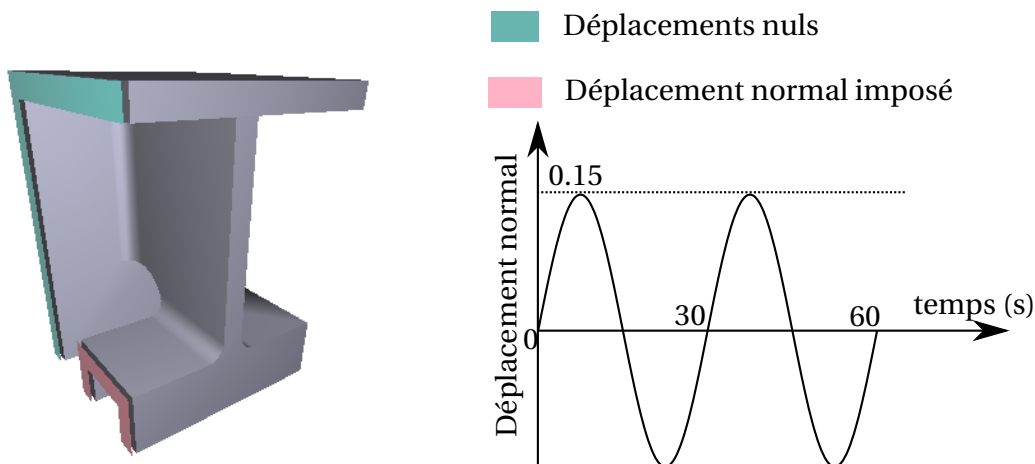
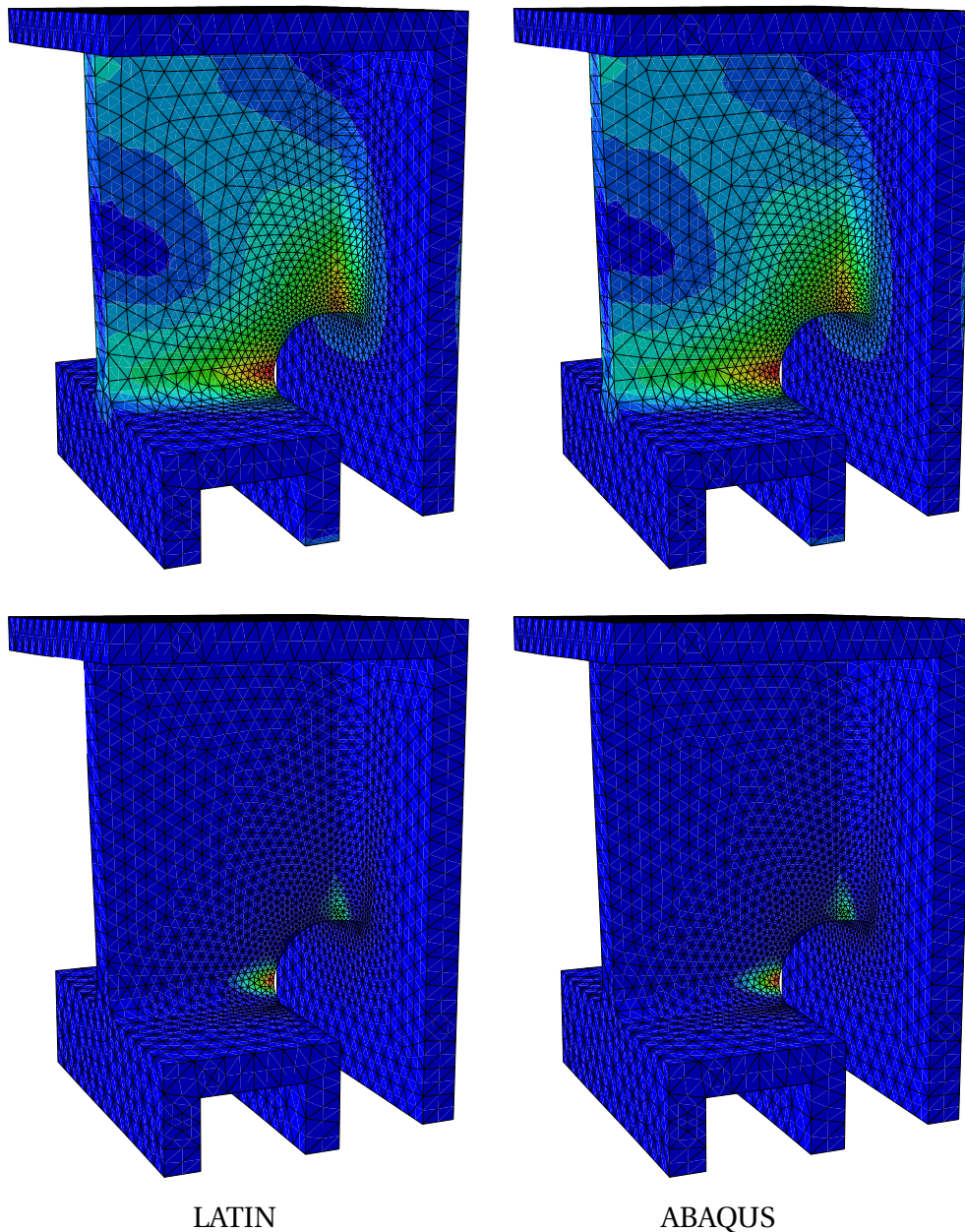


FIGURE 6.1 : Définition du cas test



### 3 Comparaison avec ABAQUS

On compare tout d'abord la répartition des contraintes et des déformations plastiques sur la structure, entre les solutions obtenues par ABAQUS et par la LATIN. Aucune différence n'est visible à l'œil (FIG. 6.2).



**FIGURE 6.2 :** Comparaison des champs de contrainte de Mises et de déformations plastiques obtenus avec ABAQUS et la LATIN

Les temps de calcul sur une station de travail à 12 cœurs sont similaires, avec 1600

secondes pour ABAQUS et 830 secondes pour la LATIN. La méthode développée est donc pertinente pour le traitement d'un calcul non linéaire. Le code LATIN nécessite par contre beaucoup plus de mémoire vive. 4 GB sont utilisés par ABAQUS contre 8 GB pour le code LATIN. Ceci peut être dû à un problème de programmation, et être optimisé.

## 4 Multiparamétrique, plan d'expérience complet

Pour tester les performances de la stratégie proposée, on réalise un plan d'expérience complet pour 3 variables. Chaque variable pouvant prendre 10 valeurs (TAB. 6.1), un total de 1 000 calculs pour 1 000 jeux de paramètres sont à réaliser.

	valeur initiale	valeur finale	pas	% de variation
amplitude	0,1	0,19	0,01	62
seuil $\sigma_y$ (MPa)	20	29	1	36
$\gamma$	400	600	20	42

**Tableau 6.1 :** Définition du plan d'expérience complet pour le cas test

La quantité d'intérêt pour le calcul de la fiabilité est le critère de Smith Topper Watson. Ce critère est calculé comme le maximum sur la structure et sur le cycle stabilisé de la quantité suivante,

$$S_{SWT} = \max_{\Omega} \left( \sqrt{E \sigma_I \Delta \epsilon_I} \right) \quad (6.1)$$

avec  $E$  le module d'Young,  $\sigma_I$  la contrainte principale maximum sur le cycle stabilisé et  $\Delta \epsilon_I$  la variation de la déformation principale sur le cycle stabilisé. La valeur du critère en fonction des valeurs des paramètres est présenté sur la FIG. 6.3. On remarque que le paramètre le plus influent est l'amplitude du chargement.

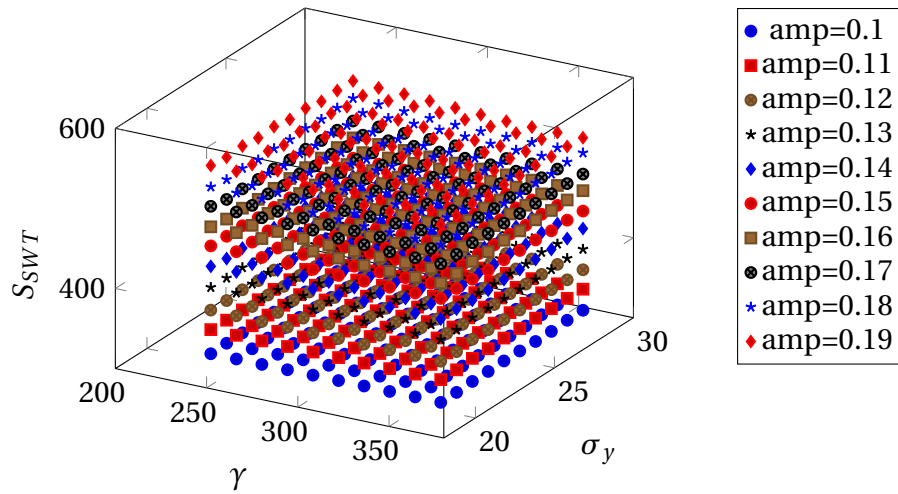
Il n'est évidemment pas envisageable de réaliser les 1000 calculs sans stratégie multiparamétrique pour pouvoir calculer le gain exact apporté par la stratégie. Le gain est donc évalué à partir du temps nécessaire au premier calcul.

$$\text{gain} = \frac{n \times \text{temps du premier calcul}}{\text{temps pour les } n \text{ calculs}} \quad (6.2)$$

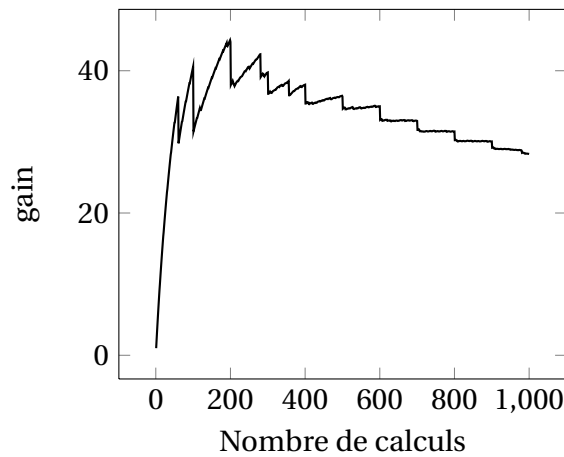
L'évolution du gain au cours de l'étude paramétrique est présenté sur la FIG. 6.4. Un gain de 30 est observé en moyenne.

## 5 Multiparamétrique, cas interactif

On considère maintenant le cas où l'on souhaite déterminer la probabilité de défaillance de la pièce. Une communication est nécessaire entre le méta-modèle de Krigage et la stratégie multiparamétrique. En effet le méta-modèle est enrichi à partir



**FIGURE 6.3 :** Critère de SWT obtenu en fonction de la valeur des paramètres d'entrée

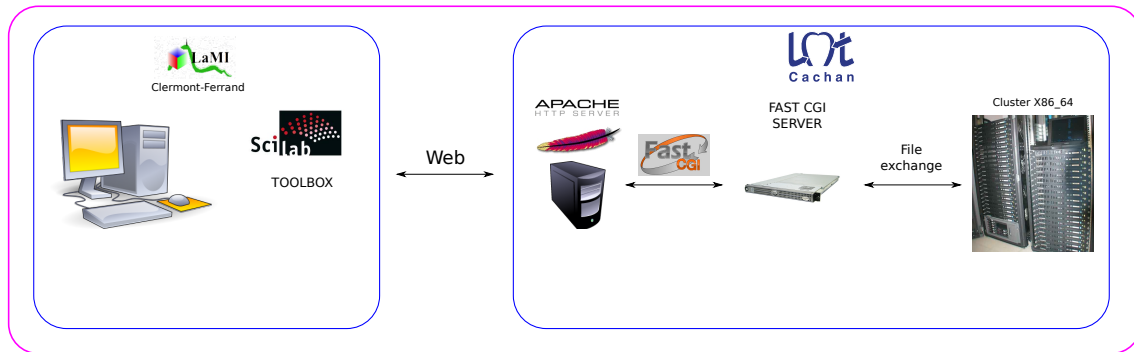


**FIGURE 6.4 :** Gain en fonction du nombre de calculs pour l'étude paramétrique sur l'aillette

des résultats de la stratégie multiparamétrique (voir paragraphe 5.3 du chapitre 1). Une communication à distance par internet a été mise en place pour relier le LaMI situé à Clermont-Ferrand où le méta-modèle est développé avec le LMT-Cachan où les moyens de calcul sont disponibles et la stratégie multiparamétrique est développée (FIG. 6.5).

L'étude paramétrique réalisée sur le plan d'expérience complet montre que l'amplitude du chargement est le paramètre le plus influent. On définit donc la proximité de deux jeux de paramètre en comparant leur amplitude de chargement. Ce critère permet de choisir parmi les solutions déjà calculées celle qui servira d'initialisation.

Le plan d'expérience complet a montré une grande linéarité entre les paramètres d'entrée et le critère SWT. Très peu de jeux des valeurs des paramètres sont donc nécessaires au méta-modèle de Krigage pour déterminer la probabilité de défaillance.



**FIGURE 6.5 :** Flux de donnée et services utilisés en mode interactif

On peut cependant calculer le gain apporté par la stratégie multiparamétrique, qui atteint environ 2. Ce gain faible est à mettre en rapport avec le petit nombre de jeux de paramètres demandé (environ 15). Comme cela a été montré sur les autres exemples numériques (FIG. 4.9), des gains plus importants sont obtenus avec un grand nombre de jeux de paramètres.

Ce mode de communication à distance permettant l'échange de données entre spécialistes de domaine différents (calcul de la probabilité de défaillance pour le LaMI et calcul multiparamétrique pour le LMT) offre des possibilités prometteuses pour des études demandant un grand nombre de calculs.

# Conclusion et perspectives

DANS CE TRAVAIL, une stratégie de calcul pour la réalisation d'études paramétriques a été proposée. Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet ANR APPROFI, qui vise à prévoir la probabilité de défaillance en fatigue de pièces ou d'assemblages dans le cas de comportements non linéaires. Les calculs en non linéaires sur des structures industrielles sont très coûteux en temps CPU et le développement d'une stratégie adaptée est indispensable pour pouvoir mener des études paramétriques.

La stratégie proposée repose sur deux méthodes :

- La première est la méthode LATIN, qui permet la résolution de problèmes non linéaires d'évolution de manière non incrémentale en temps. Cette méthode itérative peut être initialisée avec n'importe quelle solution déjà connue. Dans le cadre d'une étude multiparamétrique, le nombre d'itérations nécessaires est alors d'autant plus faible que l'initialisation est proche de la solution recherchée.
- La deuxième est la méthode de réduction de modèle dite *Proper Generalized Decomposition* (PGD) qui permet de réduire les besoins en mémoire et en temps de calcul en réduisant le modèle sur peu de degrés de liberté.

Une amélioration de ces deux méthodes a été effectuée dans cette thèse pour minimiser les temps de calcul dans le cadre multiparamétrique.

Les paramètres de la méthode LATIN ont dû faire l'objet d'une attention particulière dans le cadre d'un comportement matériau non linéaire. En particulier, les directions de recherche ont été choisies afin de faire un compromis entre le taux de convergence et la simplicité d'implémentation. Un critère sur la mise à jour des directions de recherche a été mis en place pour optimiser le temps de calcul.

Le calcul de la décomposition PGD a été modifié avec l'introduction d'un nouvel algorithme beaucoup plus rapide, ne demandant pas d'assemblage de matrices éléments finis. Ce nouvel algorithme permet de plus de prendre en compte sans régularisation des opérateurs déviatoriques.

Enfin, un mode de gestion de l'approximation PGD dans la stratégie multiparamétrique a été proposé afin de ne sélectionner, pour un jeu de paramètres donné, que les couples PGD les plus pertinents parmi ceux déjà existants .

Avec ces améliorations, un code de calcul performant a pu être développé, et

des exemples d'études paramétriques en non linéaire sur des structures complexes illustrent les performances atteintes pour le traitement de problèmes paramétrés. Une interaction forte avec les partenaires du projet APPROFI, en utilisant la stratégie développée pour être un serveur de calcul efficace, a permis d'atteindre l'objectif du projet et de prévoir la probabilité de défaillance d'une pièce complexe avec un comportement matériau non linéaire.

Une perspective à court terme de ce travail est l'introduction de la technique de décomposition de domaine mixte de la LATIN afin de pouvoir utiliser les ordinateurs à architecture parallèle et traiter des problèmes d'assemblage. Ceci demande la modification de l'algorithme de détermination des fonctions spatiales. L'introduction de la PGD avec la décomposition de domaine laisse de plus envisager une nouvelle manière de voir l'homogénéisation pour les structures périodiques.

L'analyse des temps de calcul dans les exemples traités montre que l'optimisation du calcul sur le modèle réduit PGD est nécessaire (l'étape de mise à jour des fonctions du temps), en s'inspirant des travaux sur l'hyperreduction par exemple.

La gestion des couples PGD au cours des études paramétriques est aussi à améliorer. Avec la technique proposée, le nombre total de couples générés dépend de l'enchaînement des jeux de paramètres demandés, *i.e.* du parcours du plan d'expérience. Une caractéristique attendue de la décomposition PGD est qu'elle soit intrinsèque au problème traité et ne doit pas dépendre du parcours.

À plus long terme, la prise en compte de la partie stochastique avec la PGD, en gardant à l'esprit que la quantité d'intérêt est la probabilité de défaillance, peut permettre de prédire celle-ci dans des cas plus complexes avec de nombreuses variables. Ceci se rapproche des travaux de [Nouy, 2010b].

On peut aussi imaginer une prédiction de la probabilité de défaillance plus réaliste, prenant en compte l'effet de surcharges. La stratégie multiparamétrique paraît être un outil utile pour calculer de manière rapide de tels cas.

# Résumé, algorithme LATIN

```
// Initialisation de la méthode
Résolution du problème élastique
// Début de l'algorithme itératif
tant que  $\eta_{LATIN} > 10^{-2}$  faire
  Étape locale
  | // voir paragraphe 4 du chapitre 2
  Étape linéaire
  | // Étape linéaire pour la déformation plastique
  | Détermination de la direction de recherche
  | | // voir paragraphe 5.1 du chapitre 2
  | Mise à jour des fonctions du temps
  | | // voir paragraphe 3 du chapitre 5
  | Calcul de l'erreur PGD,  $\eta_{PGD}$ 
  | | // equation 4.12
  | // Si l'erreur dépasse le seuil, ajout d'un nouveau couple
  | si  $\eta_{PGD} > 0.95$  alors
  | | // Initialisation, fonction temps quelconque
  | |  $\alpha_m = 1/T$ 
  | | tant que Pas de stagnation de la fonction temps faire
  | | | // Minimisation de l'erreur, problème spatial
  | | | Problème spatial
  | | | | // procédure itérative, voir paragraphe 4.3 du chapitre 5
  | | | | Initialisation  $E_p = 0$ 
  | | | | tant que  $e^2(Z_n) / \|\Delta_2\|_M > 10^{-2}$  faire
  | | | | | Détermination de "multiplicateur de Lagrange"  $\Sigma$  (Pb EF)
  | | | | | Calcul du résidu  $R$ 
  | | | | | Détermination de la direction de descente  $E_p''$ 
  | | | | | Détermination de la déformation associée  $E''$  (Pb EF)
  | | | | | Minimisation de l'erreur, calcul de  $e^2(Z_n)$ 
  | | | | fin
  | | | // Minimisation de l'erreur, problème temporel
  | | | Problème temporel
  | | | | // voir paragraphe 3 du chapitre 5
  | | fin
  | Étape linéaire pour l'écrouissage
  | | Résolution de l'équation 2.40
  | // Régularisation
  | Régularisation de la solution, équation 2.19
  | // Calcul de l'erreur
  | Calcul de  $\eta_{LATIN}$ , critère d'erreur de la méthode (équation 2.20)
fin
```





# Bibliographie

- [Allix et Vidal, 2002] ALLIX, O. et VIDAL, P. (2002). A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:2727–2758.
- [Ammar *et al.*, 2006] AMMAR, A., MOKDAD, B., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3):153–176.
- [Ammar *et al.*, 2007] AMMAR, A., MOKDAD, B., CHINESTA, F. et KEUNINGS, R. (2007). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids : Part II : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144:98–121.
- [Artz, 1994] ARTZ, M. (1994). *Approche des phénomènes cycliques par la méthode à grand incrément de temps*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Bellec, 2007] BELLEC, J. (2007). *Prise en compte de la variabilité dans le calcul de structures avec contact*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Ben-Haim, 1994] BEN-HAIM, Y. (1994). A non-probabilistic concept of reliability. *Structural Safety*, 14(4):227–245.
- [Beylkin et Mohlenkamp, 2005] BEYLKIN, G. et MOHLENKAMP, M. (2005). Algorithms for numerical analysis in high dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(6):2133–2159.
- [Bialecki *et al.*, 2005] BIAŁECKI, R. A., KASSAB, A. J. et FIC, A. (2005). Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(6):774–797.
- [Bognet *et al.*, 2011] BOGNET, B., BORDEU, F., CHINESTA, F., LEYGUE, A. et POITOU, A. (2011). Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3d solutions with 2d computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages –.
- [Boisse, 1987] BOISSE, P. (1987). *Nouvel algorithme à grand incrément de temps pour le calcul des structures élastoplastiques*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.

- [Bordeu *et al.*, 2011] BORDEU, F., CHINESTA, F., ADRIEN, L., CUETO, E. et NIROOMANDI, S. (2011). Réduction de modèle par PGD appliquée la simulation en temps réel de solide déformables. *In 10e colloque national en calcul des structures*, Giens, France.
- [Boucard *et al.*, 2011] BOUCARD, P., ODIÈVRE, D. et GATUINGT, F. (2011). A parallel and multiscale strategy for the parametric study of transient dynamic problems with friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [Boucard *et al.*, 2010] BOUCARD, P.-A., BUYTET, S., SOULIER, B., CHANDRASHEKARAPPA, P. et DUVIGNEAU, R. (2010). Multilevel Modeling. *In* BREITKOPF, P. et COELHO, R. F., éditeurs : *Multidisciplinary Design Optimization in Computational Mechanics*. ISTE - Wiley.
- [Boucard et Champaney, 2003] BOUCARD, P.-A. et CHAMPANEY, L. (2003). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1259–1281.
- [Boucard et Ladevèze, 1999] BOUCARD, P.-A. et LADEVÈZE, P. (1999). A multiple solution method for non-linear structural mechanics. *Mechanical Engineering*, 50(5): 317–328.
- [Bungartz et Griebel, 2004] BUNGARTZ, H.-J. et GRIEBEL, M. (2004). Sparse grids. *In Acta Numerica*. Cambridge University Press.
- [Caflich, 1998] CAFLISCH, R. E. (1998). Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *Acta Numerica*, pages 1–49.
- [Chaboche *et al.*, 2009] CHABOCHE, J., LEMAITRE, J., BENALLAL, A. et DESMORAT, R. (2009). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- [Champaney *et al.*, 2008] CHAMPANEY, L., BOUCARD, P.-A. et GUINARD, S. (2008). Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction. *Computational Mechanics*, 42(2):305–315.
- [Chapman et Saad, 1997] CHAPMAN, A. et SAAD, Y. (1997). Deflated and augmented krylov subspace techniques. *Numerical Linear Algebra With Applications*, 4(1):43–66.
- [Chatterjee, 2000] CHATTERJEE, A. (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7):808–817.
- [Chinesta *et al.*, 2010] CHINESTA, F., AMMAR, A. et CUETO, E. (2010). Proper generalized decomposition of multiscale models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9):1114–1132.
- [Cognard, 1989] COGNARD, J.-Y. (1989). *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la méthode à grand incrément de temps*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Cognard et Ladevèze, 1993] COGNARD, J.-Y. et LADEVÈZE, P. (1993). A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 9(2):141–157.

- [Cognard *et al.*, 1999] COGNARD, J.-Y., LADEVÈZE, P. et TALBOT, P. (1999). A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, 30(9-11):583–593.
- [Cressie, 1993] CRESSIE, N. (1993). *Statistic for Spatial Data*. John Wiley & Sons.
- [Davis et Ierapetritou, 2009] DAVIS, E. et IERAPETRITOU, M. (2009). A kriging based method for the solution of mixed-integer nonlinear programs containing black-box functions. *Journal of Global Optimization*, 43(2-3):191–205.
- [Drakopoulos, 1995] DRAKOPOULOS, J. A. (1995). Probabilities, possibilities, and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 75(1):1–15.
- [Dureisseix *et al.*, 2003] DUREISSEIX, D., LADEVÈZE, P., NÉRON, D. et SCHREFLER, B. A. (2003). A multi-time-scale strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1(4):387–400.
- [Echard *et al.*, 2010] ECHARD, B., GAYTON, N. et LEMAIRE, M. (2010). Kriging-based monte carlo simulation to compute the probability of failure efficiently : Ak-mcs method. *6èmes Journées Nationales de Fiabilité*, pages 24–26.
- [Echard *et al.*, 2011] ECHARD, B., GAYTON, N. et LEMAIRE, M. (2011). Ak-mcs : An active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation. *Structural Safety*.
- [Enjalbert, 2009] ENJALBERT, P. (2009). *Extension de la théorie des méconnaissances aux sources d'excitation*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Fink et Rheinboldt, 1983] FINK, J. P. et RHEINBOLDT, W. C. (1983). On the error behavior of the reduced basis technique for nonlinear finite element approximations. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 63(1):21–28.
- [Galland *et al.*, 2011] GALLAND, F., GRAVOUIL, A., MALVESIN, E. et ROCHETTE, M. (2011). A global model reduction approach for 3D fatigue crack growth with confined plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5-8):699–716.
- [Ghanem et Spanos, 1991a] GHANEM, R. G. et SPANOS, P. (1991a). *Stochastic Finite Elements : A spectral Approach*. Springer, Berlin.
- [Ghanem et Spanos, 1991b] GHANEM, R. G. et SPANOS, P. D. (1991b). Spectral stochastic finite-element formulation for reliability-analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(10):2351–2372.
- [Golub et Loan, 1996] GOLUB, G. H. et LOAN, C. F. V. (1996). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3rd édition.
- [Gosselet *et al.*, 2002] GOSSELET, P., REY, C., LÉNÉ, F. et DASSET, P. (2002). A domain decomposition method for quasi-incompressible formulation with discontinuous pressure fields. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11:363–378.

- [Hisada et Nakagiri, 1985] HISADA, T. et NAKAGIRI, S. (1985). Role of stochastic finite element method in structural safety and reliability. *In International Conference on structural safety and reliability*.
- [Huynh *et al.*, 2011] HUYNH, D., KNEZEVIC, D., PETERSON, J. et PATERA, A. (2011). High-fidelity real-time simulation on deployed platforms. *Computers & Fluids*, 43(1):74–81.
- [Jones, 2001] JONES, D. R. (2001). A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces. *Journal of Global Optimization*, 21(4):345–383.
- [Keane et Prasanth, 2005] KEANE, A. J. et PRASANTH, B. N. (2005). *Computational Approaches for Aerospace Design*. Wiley.
- [Kerfriden *et al.*, 2011] KERFRIDEN, P., GOSSELET, P., ADHIKARI, S. et BORDAS, S. (2011). Bridging Proper Orthogonal Decomposition methods and augmented Newton-Krylov algorithms : an adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems.
- [Krysl *et al.*, 2001] KRYSL, P., LALL, S. et MARSDEN, J. E. (2001). Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(4):479–504.
- [Kunisch et Volkwein, 2001] KUNISCH, K. et VOLKWEIN, S. (2001). Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. *Numerische Mathematik*, 90(1):117–148.
- [Kunisch et Volkwein, 2002] KUNISCH, K. et VOLKWEIN, S. (2002). Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2):492–515.
- [Ladevèze, 1981] LADEVÈZE, J. (1981). Méthode du taux de déformation isochorique artificiel pour la résolution du problème de stokes stationnaire pour certains fluides simples proprement dits incompressibles. *Comptes-Rendus Académie des Sciences*, 292(2):991–994.
- [Ladevèze, 1985a] LADEVÈZE, J. (1985a). Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaines. *In Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, pages 893–907. Pluralis.
- [Ladevèze, 1985b] LADEVÈZE, P. (1985b). New algorithms : mechanical framework and development (in french). *Compte rendu de l'académie des Sciences*, 300(2)(57):41–44.
- [Ladevèze, 1985c] LADEVÈZE, P. (1985c). Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Compte rendu de l'académie des Sciences*, 300(2):41–44.
- [Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). *Mécanique non linéaire des structures*. Hermès, Paris.
- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.

- [Ladevèze, 2010] LADEVÈZE, P. (2010). Retour sur la PGD pour des problèmes d'évolution. Rapport technique, LMT Cachan.
- [Ladevèze *et al.*, 2002] LADEVÈZE, P., COGNARD, J. et TALBOT, P. (2002). A non-incremental and adaptive computational approach in thermo-viscoplasticity. In GLADWELL, G. M. L., BRUHNS, O. et STEIN, E., éditeurs : *IUTAM Symposium on Micro- and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity*, volume 62 de *Solid Mechanics and Its Applications*, pages 281–291. Springer Netherlands.
- [Ladevèze *et al.*, 2006] LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et VIOLEAU, D. (2006). Computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137:139–150.
- [Ladevèze *et al.*, 2008] LADEVÈZE, P., NÉRON, D. et PASSIEUX, J.-C. (2008). On multiscale computational mechanics with time-space homogenization. In *Multiscale methods—Bridging the scales in Science and Engineering*. Oxford University Press. Ed. J. Fish.
- [Ladevèze et Nouy, 2003] LADEVÈZE, P. et NOUY, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30):3061–3087. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- [Ladevèze *et al.*, 2010] LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. et NÉRON, D. (2010). The LATIN multiscale computational method and the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22):1287–1296.
- [Lagaros *et al.*, 2005] LAGAROS, N. D., PLEVRIS, V. et PAPADRAKAKIS, M. (2005). Multi-objective design optimization using cascade evolutionary computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(30-33):3496–3515.
- [Lemaire, 1997] LEMAIRE, M. (1997). Reliability and mechanical design. *Reliability Engineering & System Safety*, 55(2):163–170.
- [Lemaitre et Chaboche, 1994] LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J. (1994). *Mechanics of solid materials*. Cambridge Univ Pr.
- [Liang *et al.*, 2002] LIANG, Y., LEE, H., LIM, S., LIN, W., LEE, K. et WU, C. (2002). Proper orthogonal decomposition and its applications—part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3):527–544.
- [Liu *et al.*, 1988] LIU, W. K., BESTERFIELD, G. et BELYTSCHKO, T. (1988). Transient probabilistic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1):27–54.
- [Machiels *et al.*, 2000] MACHIELS, L., MADAY, Y., OLIVEIRA, I., PATERA, A. et ROVAS, D. (2000). Output bounds for reduced-basis approximations of symmetric positive definite eigenvalue problems. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 331(2):153–158.
- [Matthies et Keese, 2005] MATTHIES, H. et KEESE, A. (2005). Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1295–1331.

- [Mckay *et al.*, 1979] MCKAY, M. D., BECKMAN, R. J. et CONOVER, W. J. (1979). Comparison of 3 methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245.
- [Moore, 1966] MOORE, R. E. (1966). *Interval Analysis*. Prentice-Hall.
- [Niroomandi *et al.*, 2010a] NIROOMANDI, S., ALFARO, I., CUETO, E. et CHINESTA, F. (2010a). Accounting for large deformations in real-time simulations of soft tissues based on reduced-order models. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*.
- [Niroomandi *et al.*, 2010b] NIROOMANDI, S., ALFARO, I., CUETO, E. et CHINESTA, F. (2010b). Model order reduction for hyperelastic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(9):1180–1206.
- [Notin *et al.*, 2011] NOTIN, A., DULONG, J., GAYTON, N., VILLON, P. et LEMAIRE, M. (2011). SLDLT : une technique de mise à jour de la décomposition LDLT pour l'accélération des simulations de Monte-Carlo dans le cas de champs stochastiques non uniformes. In *10e colloque national en calcul des structures*, Giens, France.
- [Nouy, 2003] NOUY, A. (2003). *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [Nouy, 2007] NOUY, A. (2007). A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48):4521–4537.
- [Nouy, 2008] NOUY, A. (2008). Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : Invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52):4718–4736.
- [Nouy, 2010a] NOUY, A. (2010a). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24):1603–1626.
- [Nouy, 2010b] NOUY, A. (2010b). Proper generalized decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, pages 1–32.
- [Nouy *et al.*, 2008] NOUY, A., CLÉMENT, A., SCHOEFS, F. et MOËS, N. (2008). An extended stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52):4663–4682.
- [Nouy et Ladevèze, 2004a] NOUY, A. et LADEVÈZE, P. (2004a). Multiscale computational strategy with time and space homogenization : a radial-type approximation technique for solving microproblems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2:4.
- [Nouy et Ladevèze, 2004b] NOUY, A. et LADEVÈZE, P. (2004b). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3061–3087.

- [Nouy et Le Maitre, 2009] NOUY, A. et LE MAITRE, O. P. (2009). Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems. *Journal of Computational Physics*, 228(1):202–235.
- [Passieux, 2008] PASSIEUX, J.-C. (2008). *Approximation radiale et méthode LATIN multi-échelle en temps et en espace*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Pearson, 1901] PEARSON, K. (1901). On lines planes of closes fit to system of points in space. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2:559–572.
- [Prud'homme et al., 2002] PRUD'HOMME, C., ROVAS, D., VEROY, K., MACHIELS, L., MADDAY, Y., PATERA, A. et TURINICI, G. (2002). Reliable real-time solution of parametrized partial differential equations : Reduced-basis output bound methods. *Journal of Fluids Engineering*, 124:70.
- [Puel, 2004] PUEL, G. (2004). *Sur la théorie des méconnaissances en dynamiques des structures*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Radix, 1991] RADIX, J. (1991). *Pratique moderne des probabilités*. Lavoisier.
- [Relun et al., 2011] RELUN, N., NÉRON, D. et BOUCARD, P. (2011). Multiscale elastic-viscoplastic computational analysis : a detailed example. *European Journal of Computational Mechanics*, à paraître.
- [Rey et Léné, 1998] REY, C. et LÉNÉ, F. (1998). Reuse of Krylov spaces in the solution of large scale non-linear elasticity problems. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, pages 465–471. Springer.
- [Risler et Rey, 2000] RISLER, F. et REY, C. (2000). Iterative accelerating algorithms with Krylov subspaces for the solution to large-scale nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, 23:1–30.
- [Ryckelynck, 2005] RYCKELYNCK, D. (2005). A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202:346–366.
- [Ryckelynck et Benziane, 2010] RYCKELYNCK, D. et BENZIANE, D. M. (2010). Multi-level a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(17-20):1134–1142.
- [Saad, 2000] SAAD, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Compagny, 3rd édition.
- [Sacks et al., 1989] SACKS, J., WELCH, W. J., MITCHELL, T. J. et WYNN, H. P. (1989). Design and analysis of computer experiments. *Statistical Science*, 4:409–423.
- [Santner et al., 2003] SANTNER, T., WILLIAMS, B. et NOTZ, W. (2003). *The Disign and Analysis of compute Experiments*. Springer.
- [Saporta, 1990] SAPORTA, G. (1990). *Probabilités, analyse des données et statistique*. Technip.
- [Soize, 2000] SOIZE, C. (2000). A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294.

- [Soulier et Boucard, 2009] SOULIER, B. et BOUCARD, P. (2009). A multiparametric strategy for the large-scale multilevel optimization of structural assemblies. *In 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization-WCSMO-8*.
- [Sudret et Der Kiureghian, 2000] SUDRET, B. et DER KIUREGHIAN, A. (2000). Stochastic finite element methods and reliability : a state-of-the-art report. Rapport technique, Departement of Civil & Environmental Engineering, university of California, Berkeley.
- [Vapnik, 1995] VAPNIK, V. N. (1995). *The nature of statistical learning theory*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA.
- [Vidal, 2001] VIDAL, P. (2001). *Sur une méthode multi-résolution dédiée à l'identification structurale*. Thèse de doctorat, ENS-Cachan.
- [Wiener, 1938] WIENER, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60:897–936.
- [Yamazaki *et al.*, 1988] YAMAZAKI, F., SHINOZUKA, M. et DASGUPTA, G. (1988). Neumann expansion for stochastic finite-element analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(8):1335–1354.
- [Zadeh, 1978] ZADEH, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1):3–28.