

# Montage 19

## *Echantillonnage: Réalisation, spectre, restitution*

DEFOSSEUX Maxime, REBILLAT Marc

8 janvier 2007

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Réalisation de l'échantillonneur-bloqueur</b>	<b>2</b>
2.1	Signal continu échantillonné . . . . .	2
2.2	Réalisation du prélèvement : la fonction interrupteur . . . . .	3
2.2.1	Réalisation avec un transistor MOS . . . . .	3
2.2.2	Réalisation avec un interrupteur CMOS . . . . .	5
2.3	Réalisation du maintien : le blocage . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Aspect spectral de l'échantillonnage</b>	<b>8</b>
3.1	Théorème de Shannon . . . . .	8
3.2	Nécessité d'un filtre anti-repliement . . . . .	11
3.3	Influence de l'échantillonnage réel . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Restitution</b>	<b>15</b>
4.1	Cas idéal . . . . .	15
4.2	Réalisation pratique . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>17</b>

## 1 Introduction

L'utilisation des calculateurs numériques est aujourd'hui démocratisée, car il est désormais possible de les produire industriellement, et les possibilités de traitement de l'information qu'ils offrent sont bien plus étendues que celles proposées par un traitement purement analogique. Or les signaux physiques, eux, sont toujours de nature analogique. C'est pourquoi, pour réaliser

au mieux une chaîne de traitement de l'information contenant un traitement numérique, il est impératif de maîtriser le passage du monde des signaux continus au monde des signaux discrets : l'échantillonnage.

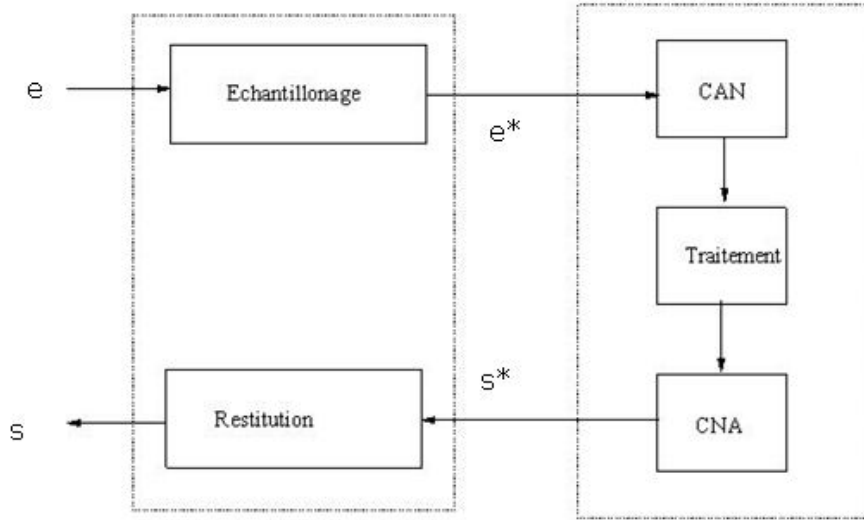


FIG. 1 – Chaîne numérique de traitement de l'information

## 2 Réalisation de l'échantillonneur-bloqueur

### 2.1 Signal continu échantillonné

Avec l'échantillonnage, nous souhaitons réaliser la ponction d'une valeur d'un signal  $e(t)$  à des intervalles de temps réguliers espacés de la période d'échantillonnage  $T_e$ . Alors on peut définir  $e^*(t)$  le signal échantillonné de  $e(t)$ , qui est un **signal à temps continu** de la façon suivante ( $\delta$  désigne la fonction "Dirac") :

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

Toutefois, pour que les convertisseurs analogiques/numériques aient le temps de faire l'acquisition de la valeur  $e(nT_e)$ , il est nécessaire de maintenir cette valeur durant un temps  $\tau$  dépendant du convertisseur. Le signal échantillonné réel peut donc être modélisé par ( $\Pi_\tau$  désigne la fonction "Porte" de largeur  $\tau$ ) :

$$e_{Reel}^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(nT_e)\Pi_\tau(t - nT_e)$$

- Pour réaliser l'échantillonnage, il y'a donc en réalité 2 fonctions à réaliser :
- Prélever la valeur du signal à des instants donné espacés entre eux de la période d'échantillonnage  $T_e$
  - Maintenir cette valeur le temps de l'acquisition

## 2.2 Réalisation du prélèvement : la fonction interrupteur

Pour réaliser le prélèvement des signaux tout les  $T_e$ , il semble logique d'utiliser des interrupteurs commandables. Les transistors semblent donc les outils appropriés. On préférera les transistors MOS aux transistors bipolaires, car ces derniers sont plus lents et moins aisés à réaliser au sein de circuits intégrés.

### 2.2.1 Réalisation avec un transistor MOS

Les transistors MOS constituent une catégorie d'interrupteurs commandés. A l'aide d'un générateur extérieur en mode PULSE nous allons donc commander la fermeture et l'ouverture du transistor MOS en essayant d'avoir des instants de fermeture les plus courts possibles.

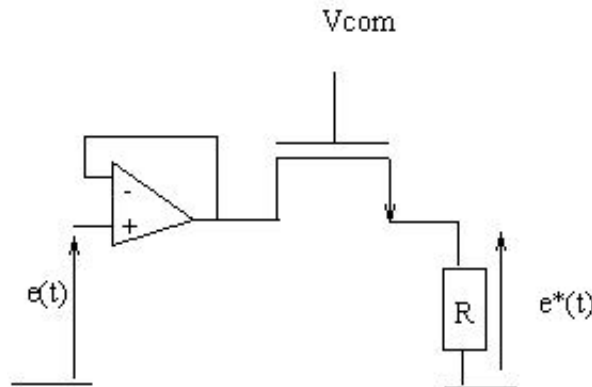


FIG. 2 – Réalisation de l'échantillonnage idéal avec un transistor MOS

Pour réaliser ce montage, on utilise un transistor MOS VN2222L. Il est nécessaire de mettre un suiveur en entrée pour ne pas déformer le signal issu du GBF. Il faut aussi ajouter une résistance en sortie pour qu'il puisse y avoir passage d'un courant de source et que le transistor commute effectivement. Nous avons choisi une valeur de résistance de  $50 \Omega$ , pour qu'elle ne soit pas trop grande devant la résistance à l'état ON du MOS. La tension de commande est réalisée en utilisant le mode PULSE des GBF numériques, ce qui permet de générer de très brèves impulsions.

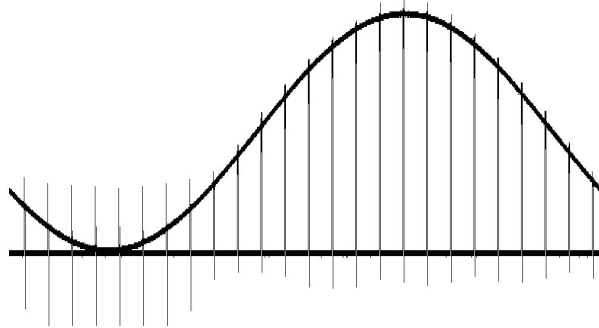


FIG. 3 – Allure du signal initial à 2 kHz toujours positif et du signal échantillonné à 40 kHz

Ce transistor présente 2 défauts très gênants qui font qu'il n'est pas utilisé dans la pratique :

- son fonctionnement est limité à un seul quadrant :  $e > 0$  et  $i > 0$ . Il est donc impossible d'échantillonner des signaux négatifs avec un transistor MOS
- sa résistance à l'état passant est une fonction de  $V_{GS}$  (qui dépend de  $e^*$  donc de  $e$ ). Il n'y a donc pas une relation linéaire entre  $e^*$  et  $e$ .

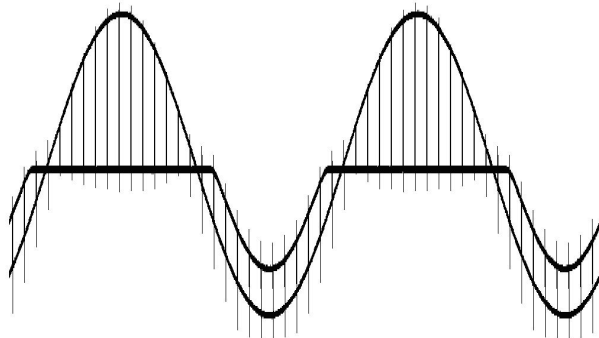


FIG. 4 – Echantillonnage à 40 kHz d'un signal positif et négatif de fréquence 2 kHz avec un transistor MOS

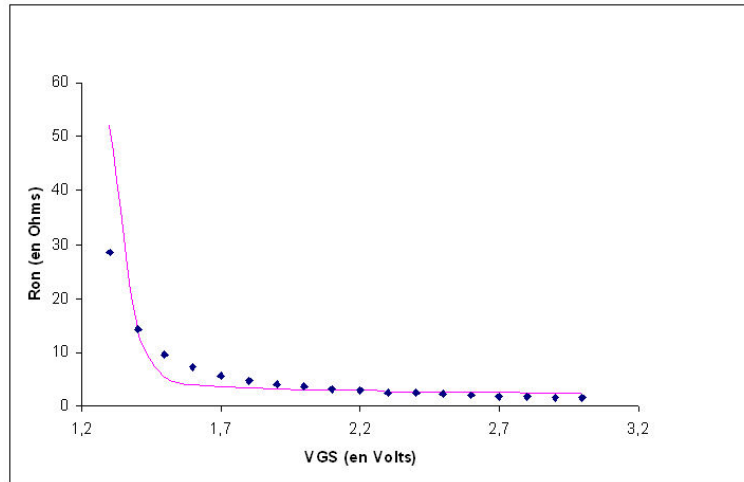


FIG. 5 – Variation de la résistance à l'état passant du VN2222L. Comparaison de la courbe théorique et de la courbe expérimentale. Pour évaluer cette résistance, nous avons utilisé un pont diviseur de tension en continu.

### 2.2.2 Réalisation avec un interrupteur CMOS

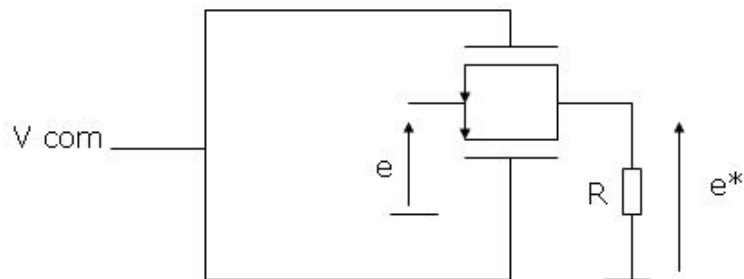


FIG. 6 – Réalisation avec un interrupteur CMOS

Pour palier aux inconvénients de l'interrupteur MOS, il suffit de remplacer un transistor par 2 transistors MOS dopés de façon contraire en parallèle. Alors, étant donné que les deux transistors sont commandés simultanément, la résistance à l'état passant est donnée par :  $R_{ONTOT} = \frac{R_{ON1}R_{ON2}}{R_{ON1}+R_{ON2}}$  (cf. figure 7) et donc elle n'est quasiment plus fonction de  $V_{GS}$ . D'autre part, les deux transistors étant dopés de façon contraire, on peut désormais travailler dans les 2 quadrants :  $(e > 0, i > 0)$  et  $(e < 0, i > 0)$ .

Pour qu'il y ait effectivement circulation de courant dans la résistance  $R$ ,

il faut que celle ci soit de l'ordre de grandeur de la résistance  $R_{ONTOT}$ . Nous avons mesuré sur les interrupteurs CMOS du composant intégré DG201 une résistance  $R_{ONTOT}$  de 85 Ohms (valeur plus élevée qu'avec le MOS car ici nous travaillons avec un composant intégré et donc le rapport  $\frac{l}{S}$  intervenant dans le calcul de résistance y est plus grand, et valeur cohérente avec la valeur maximale donnée par le constructeur  $R_{ONTOT} = 125$  Ohms). Ici  $R$  vaut 100 Ohms.

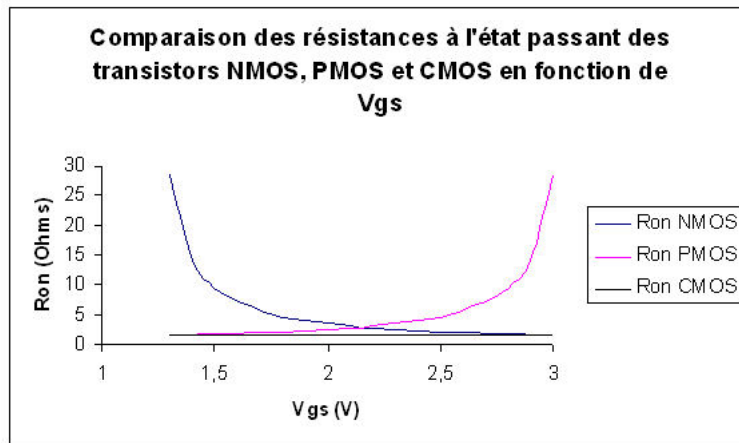


FIG. 7 – Comparaison des résistances à l'état passant

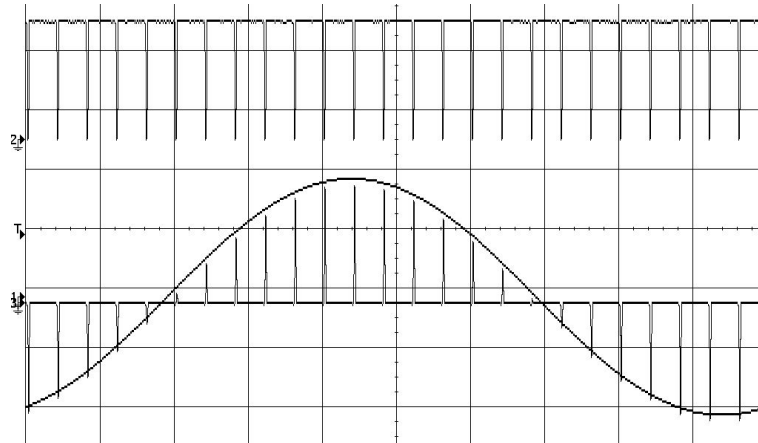


FIG. 8 – Allure des signaux lors de l'échantillonnage avec un interrupteur CMOS. Le signal à échantillonner à une fréquence de 2 kHz et le signal de commande une fréquence de 40 kHz

### 2.3 Réalisation du maintien : le blocage

A présent, il faut réussir à maintenir le signal prélevé le temps d'une période d'échantillonnage pour que le convertisseur analogique/numérique ait le temps d'assimiler l'information. Pour cela, on utilisera une capacité qui va se charger ou se décharger, par l'intermédiaire de la résistance  $R_{ONTOT}$  et ainsi maintenir constante le temps d'une période d'échantillonnage la valeur la tension d'entrée du CAN.

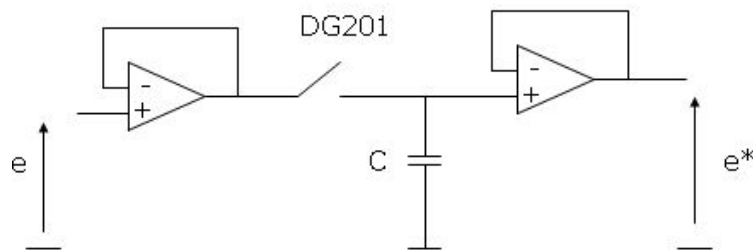


FIG. 9 – Réalisation d'un échantillonneur bloqueur

En amont du DG200, nous avons placé un suiveur pour éviter que l'échantillonneur bloqueur ne perturbe le montage observé. Pour le choix de la capacité, il faut respecter par exemple  $R_{ONTOT}C < \frac{T_{ech}}{10}$ . ici pour échantillonner à 44 kHz, nous avons pris  $C = 22nF$ . Enfin, pour que le CAN ne risque pas de décharger la capacité lorsqu'il acquiert les données, nous plaçons un montage suiveur en aval du DG201.

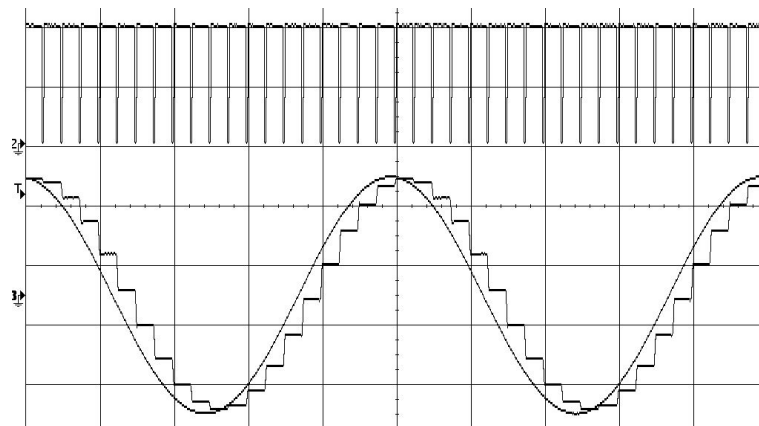


FIG. 10 – Allure des signaux avec cet échantillonneur bloqueur : signal basse fréquence à 2 kHz et commande à 40 kHz

### 3 Aspect spectral de l'échantillonnage

Maintenant que nous sommes en mesure de réaliser un échantillonneur bloqueur, une question de fond se pose : Perd-on de l'information lorsque l'on échantillonne un signal ?

#### 3.1 Théorème de Shannon

Si l'on se place dans le cas de l'échantillonnage idéal, alors les signaux échantillonnés peuvent être modélisés de la façon suivante ( $\delta$  représente la fonction de Dirac et  $P$  la fonction peigne associée) :

$$e^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(nT_e)\delta(t - nT_e) = e(t)P_{T_e}(t)$$

Sachant que la transformée de Fourier du peigne de Dirac est :

$$TF[P_{T_e}](f) = F_e P_{F_e}(f)$$

Alors :

$$E^*(f) = TF[e^*](f) = (TF[e] * TF[P_{T_e}])(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} TF[e](f - nF_e)$$

Soit, en posant  $E(f) = TF[e](f)$  :

$$E^*(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E(f - nF_e)$$

Il y a donc une périodisation du spectre du signal initial, la période étant la fréquence d'échantillonnage  $F_e$ . Par conséquent, pour ne pas perdre d'information, il faut s'assurer que chacun des spectres dupliqué n'aille pas déborder sur son voisin. D'où la condition de Shannon, si  $F_{max}$  est la fréquence maximale du signal à échantillonner :

$$F_{max} < \frac{F_e}{2}$$

Si l'on observe le spectre d'une sinusoïde échantillonnée (quasi) idéalement avec le dispositif réalisé précédemment, on voit bien ces duplications. Nous constatons que les pics dupliqués n'ont pas tous la même amplitude, cela est dû au fait que l'échantillonnage n'est pas vraiment idéal ici. Les quelques autres pics observés sont bien en dessous des pics principaux (l'échelle est de 10 dB/dec) et sont certainement dûs au fait que le générateur de signaux utilisé ne soit spectralement très pur.

Et si l'on ne respecte pas la condition de Shannon, il est possible de voir apparaître en basse fréquence des raies hautes fréquences issues d'un spectre dupliqué. C'est ce qu'on appelle le sous-échantillonnage.



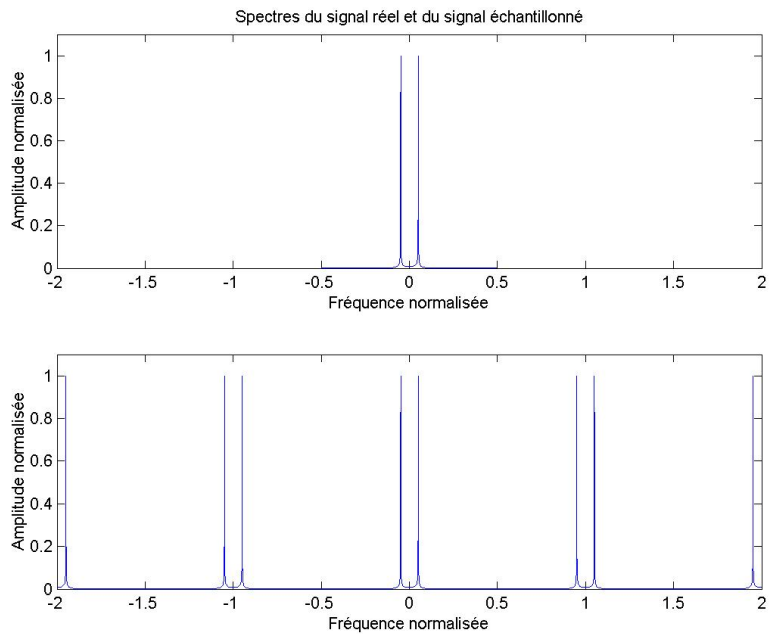


FIG. 11 – Duplication du spectre : sinusoïde à 2 kHz échantillonnée idéalement à 40 kHz

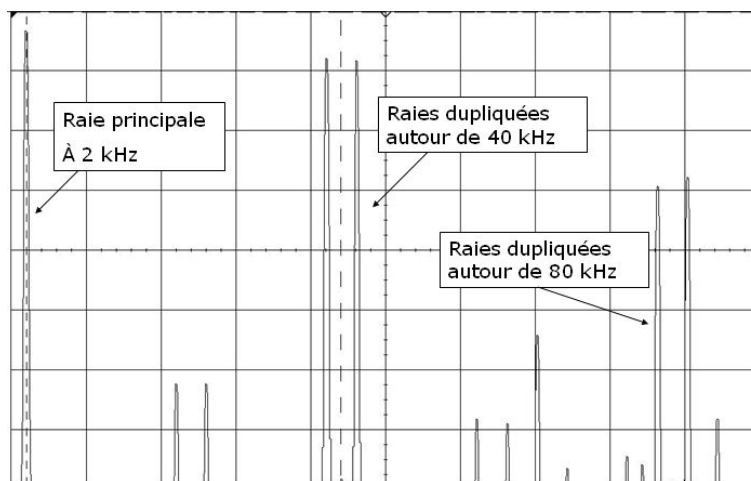


FIG. 12 – Duplication du spectre : sinusoïde à 2 kHz échantillonnée à 40 kHz

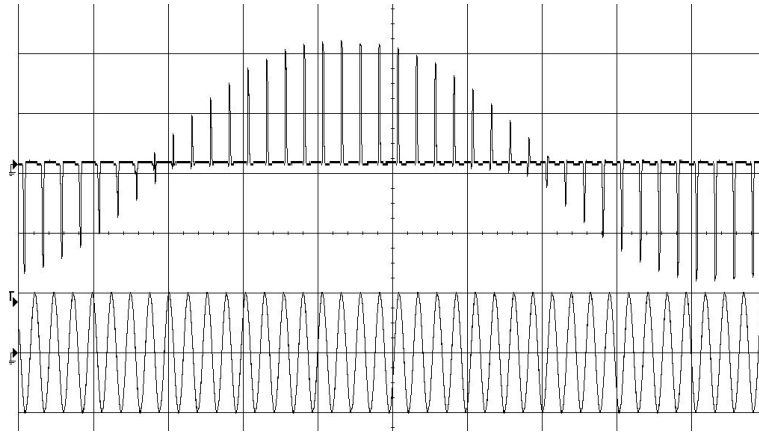


FIG. 13 – Sous-échantillonnage : Sinusoïde à 39 kHz échantillonnée à 40 kHz. Au final, nous avons l'impression d'avoir échantillonné une sinusoïde à 1 kHz, il y'a eu repliement de spectre.

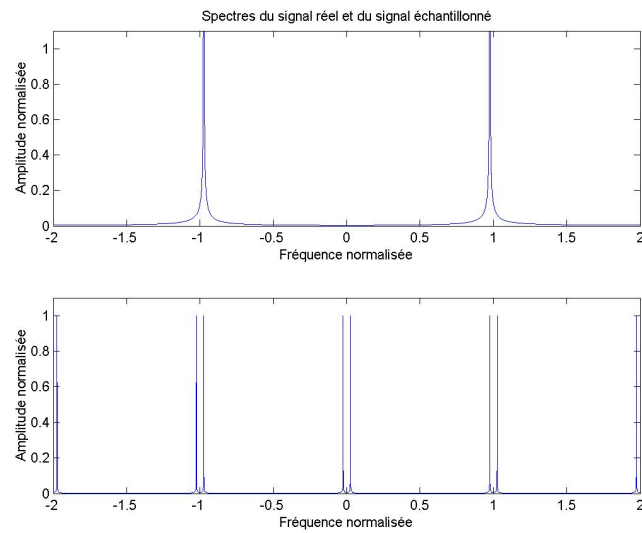


FIG. 14 – Spectre du signal réel et spectre du signal échantillonné. Nous ne voyons plus les raies à 39 kHz, elles ont été traduites à 1 kHz et -1 kHz par l'échantillonnage.

### 3.2 Nécessité d'un filtre anti-repliement

Mais les signaux réels ne possèdent pas une bande passante limitée. en effet, à cause du bruit de fond ces derniers occupent un spectre très large. Pour éviter tout problème lors de l'échantillonnage, il faut alors filtrer le signal d'entrée avant qu'il ne soit échantillonné pour que la condition de Shannon soit respectée. C'est le rôle du filtre anti-repliement.

Pour réaliser le filtre anti-repliement, nous avons choisi de cascader deux filtres passe bas de Butterworth d'ordre 2 réalisés avec une structure de Sallen-Key (en mettant un suiveur entre les deux).

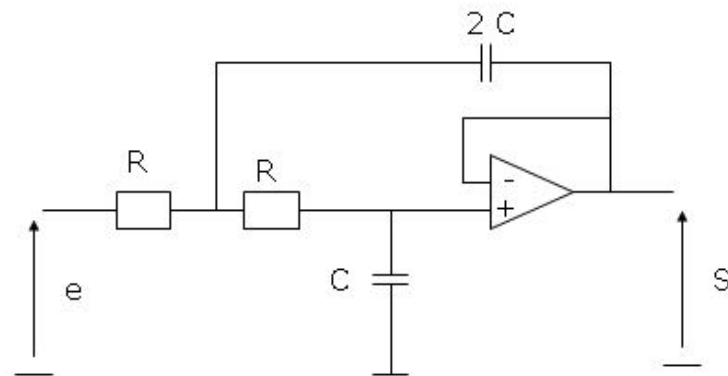


FIG. 15 – Réalisation d'un filtre anti-repliement avec un filtre passe bas de Butterworth d'ordre 2

La fonction de transfert de cette cellule est dans le domaine de Laplace :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + 2RCp + 2(RCp)^2}$$

Nous avons choisi de placer la fréquence de coupure à 6 kHz, ce qui est loin de la fréquence d'échantillonnage que nous utilisons (40 kHz). Cela nous donne les valeurs de composants suivantes :  $R = 10 \text{ kOhms}$  et  $C = 1,8 \text{ nF}$ .

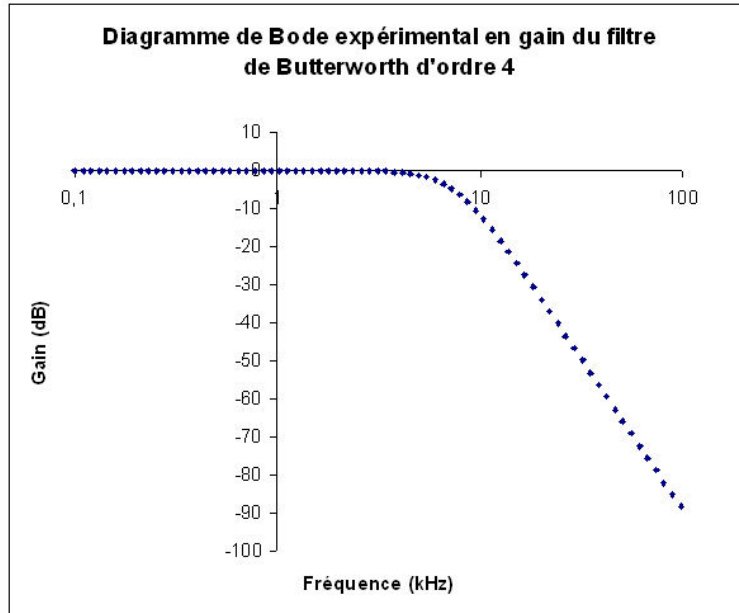


FIG. 16 – Diagramme de Bode en gain du filtre antirepliement

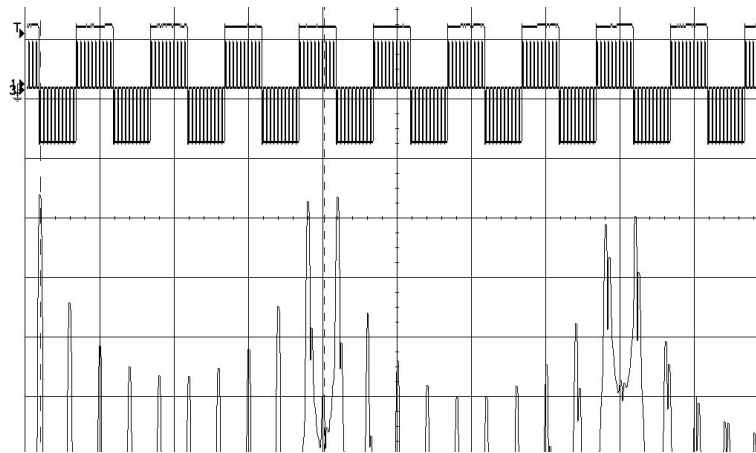


FIG. 17 – Spectre d'un signal en créneau à 2 kHz échantillonné à 40 kHz sans filtre antirepliement : les spectres se recouvrent

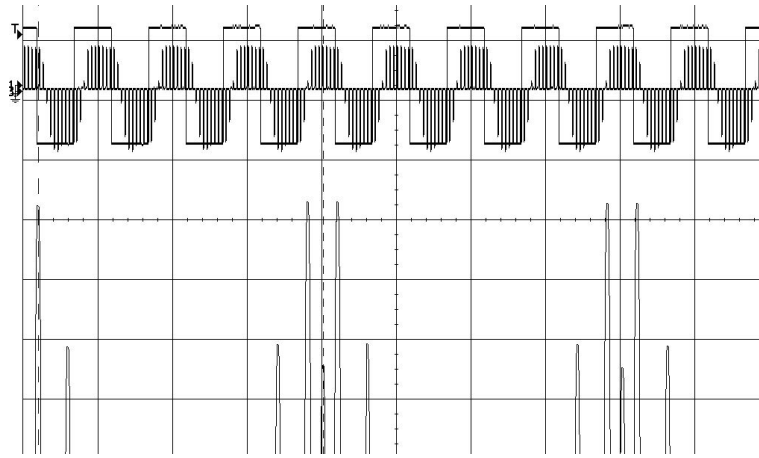


FIG. 18 – Spectre d'un signal en créneau à 2 kHz échantillonné à 40 kHz avec filtre antirepliement : les spectres ne se recouvrent plus, mais le signal est déformé.

### 3.3 Influence de l'échantillonnage réel

Comme nous l'avons vu précédemment, la durée durant laquelle le signal est maintenu modifie le spectre du signal échantillonné. Nous pouvons adopter pour ces signaux le modèle suivant :

$$e_{Reel}^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(nT_e)\Pi_\tau(t - nT_e) = (e^* * \Pi_\tau)(t)$$

Donc, en appliquant la transformée de Fourier, nous aboutissons à :

$$|E_{Reel}^*(f)| = |E^*(f)\text{sinc}(\pi f\tau)|$$

La durée de l'échantillonnage pondère donc l'amplitude du spectre du signal échantillonné. Il est donc important de prendre ce phénomène en compte, et éventuellement de le compenser par filtrage. Si l'on s'intéresse au cas courant ou  $\tau = T_e$  alors, on constate qu'en  $F_e/2$  l'affaiblissement est de  $20 \log(\sin(\pi/2)) \simeq -3,9dB$ . Pour éviter ce genre de désagrément, on cherchera à prendre une fréquence d'échantillonnage la plus éloignée possible de la fréquence de coupure du filtre antirepliement. Ainsi l'affaiblissement se ressent beaucoup moins.

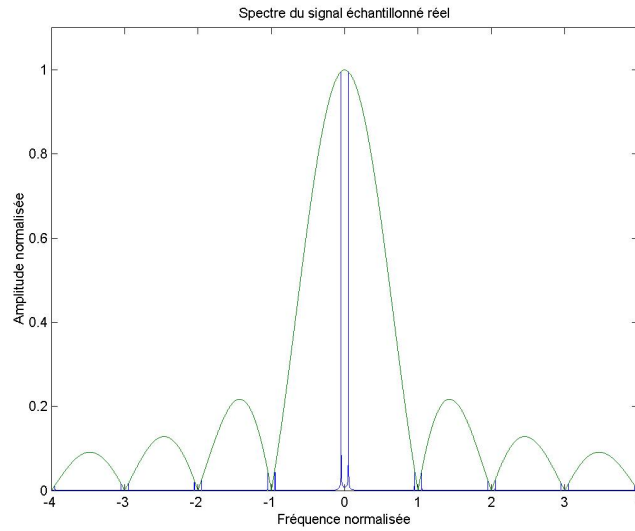


FIG. 19 – Spectre du signal à 2 kHz échantillonné-bloqué à 40 kHz. Le sinus cardinal module l'amplitude des raies.

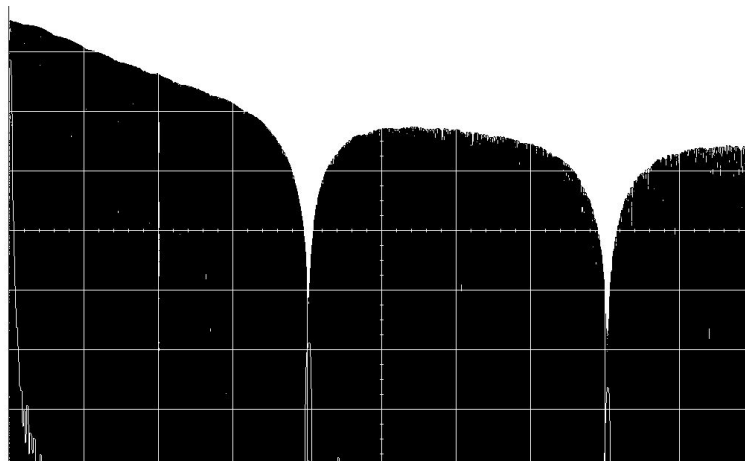


FIG. 20 – Balayage en fréquence de la plage  $[0, F_e/2=20\text{kHz}]$  avec une sinusoïde et observation du spectre de cette sinusoïde échantillonnée bloquée avec une persistance infinie. Nous retrouvons bien l'allure du sinus cardinal en logarithme.

## 4 Restitution

### 4.1 Cas idéal

A partir d'un signal échantillonné idéal avec respect de la condition de Shannon, nous souhaitons retrouver l'original temporel de ce signal. Il va donc falloir récupérer le spectre initial et non pas ses duplicatas. On peut réaliser ceci en utilisant un filtre passe bas parfait.

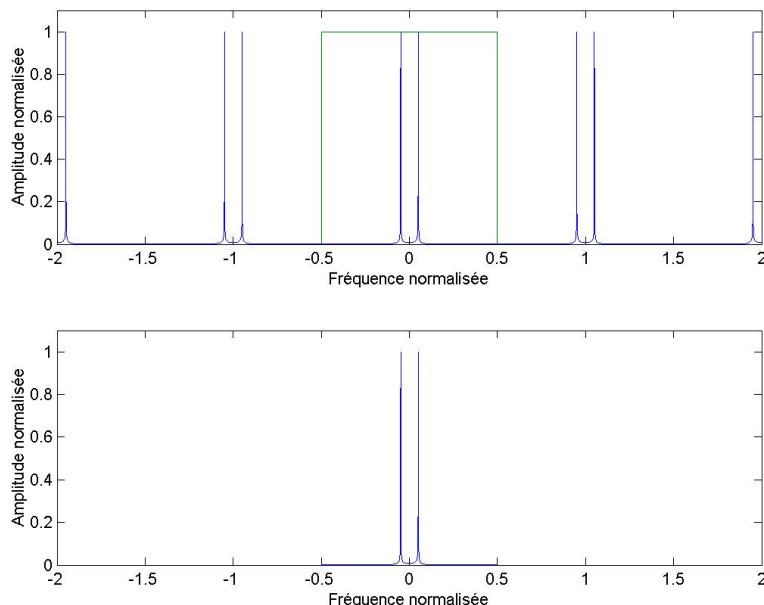


FIG. 21 – Récupération du spectre initial de la sinusoïde à 2 kHz échantillonné à 40 kHz.

Mais, en pratique cette solution est irréalisable, car la conception d'un filtre passe pas idéal suppose la conception d'un filtre qui ne soit pas causal, ce qui est impraticable dans la réalité.

### 4.2 Réalisation pratique

Après être échantillonné, bloqué, traité numériquement, et reconstruit par un bloqueur d'ordre 0 par exemple, le signal à besoin d'être filtré pour que l'on ne conserve que l'original du spectre et pas ses duplicatas. Nous utilisons à nouveau un filtre passe bas de Butterworth d'ordre 2, comme celui synthétisé pour le filtre antirepliement.

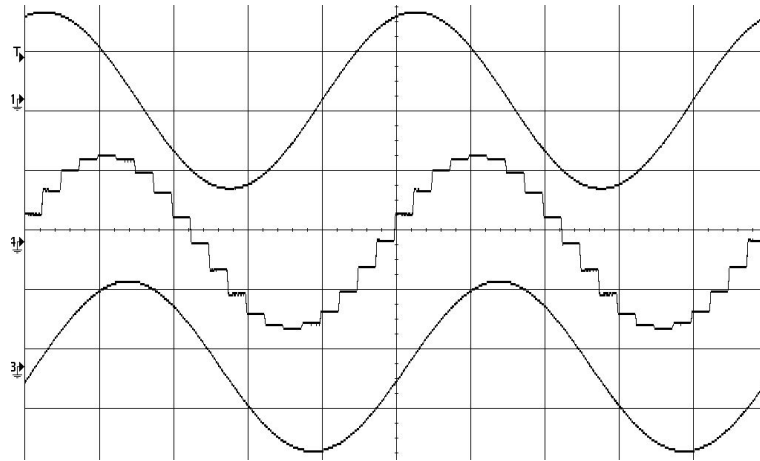


FIG. 22 – Signaux au cours de leur traitement par la chaine réalisée : signal initial à 2 kHz, signal échantillonné bloqué à 40 kHz et signal restitué par passage dans le filtre passe bas précédent.

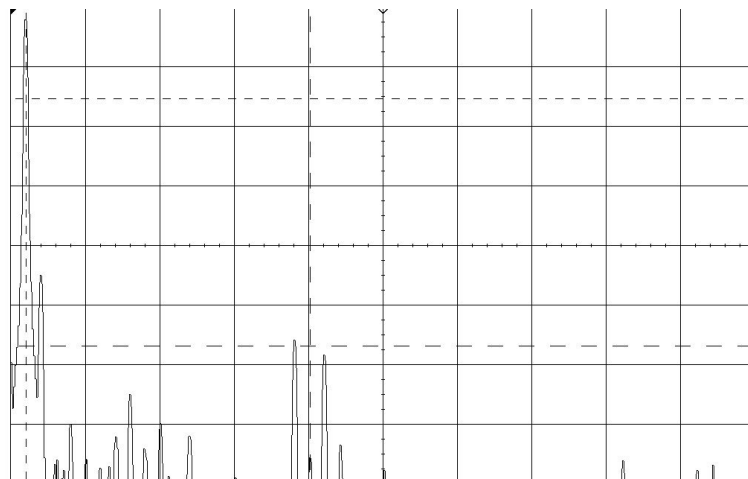


FIG. 23 – Spectre du signal à 2 kHz échantillonné à 40 kHz puis restitué. On constate encore la présence de deux raies autour de 44 kHz qui sont les raies dupliquées et atténuées par le filtre passe-bas d'ordre 2, mais peut être pas suffisamment.



## 5 Conclusion

Au cours de ce montage, nous avons donc dans un premier temps réalisé un dispositif permettant l'échantillonnage de signaux électriques. Puis, nous avons vu quelles étaient les conditions pour ne pas perdre l'information contenue dans le signal initial lors de l'échantillonnage, tout en expliquant la nécessité d'un filtre anti-repliement ainsi que les effets de la durée d'échantillonnage. Enfin nous avons vu comment restituer au mieux le signal initial à partir de son homologue échantillonné.

Il existe de nombreux autres types de montages échantillonneurs (par exemple utilisant des structures à capacités commutées) qui sont bien plus efficaces, mais ce dispositif par sa facilité à la réalisation et car il permet de mettre en avant tout les phénomènes nécessaires à la bonne compréhension du phénomène nous a paru suffisant.

## 6 Bibliographie

Les ouvrages que nous avons utilisé sont les suivants :

- *Théorie des signaux et systèmes* PICINBONO, Editions DUNOD
- *Traité d'électricité : Théorie et traitement des signaux VI* De Coulon, Presses Polytechniques Romanes
- *Signal analogique et capacités commutées* BAILLEU ,Editions DUNOD
- *Traitement des signaux et acquisition de données* COTTET, Edition DUNOD