

Exercice 1.

1. FAUX. On réduit $f(x)$ au même dénominateur :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+2} = \frac{3(x+2)+1}{x+2} = \frac{3x+6+1}{x+2} = \frac{3x+7}{x+2}$$

2. VRAI. La question se reformule sous la forme $f(0) = 3,5$. Or,

$$f(0) = 3 + \frac{1}{2} = 3,5$$

3. FAUX. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x+2 = 0^+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = +\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.

4. FAUX. Une primitive de f sur $] -2; +\infty[$ est $F(x) = 3x + \ln(x+2)$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= [3x + \ln(x+2)]_0^2 \\ &= 3 \times 2 + \ln(2+2) - (3 \times 0 + \ln(2)) \\ &= 6 + 2 \ln 2 - \ln 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 6 + \ln 2$$

5. VRAI. Il faut tester si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

6. VRAI. Pour tout $x \in] -2; +\infty[$, $x+2 > 0$, donc $\frac{1}{x+2} > 0$, donc $f(x) > 3$.

7. VRAI. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\text{D'où } f'(-1) = -\frac{1}{(-1+2)^2} = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

8. VRAI. La fonction f est décroissante sur $] -2; +\infty[$ (car sa dérivée f' , calculée ci-dessus, est clairement négative). De plus, la fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$. Donc par composition, la fonction $g(x) = \ln(f(x))$ est décroissante sur $] -2; +\infty[$.

Exercice 2.

1. Pour étudier les variations de C_m , on calcule d'abord sa dérivée.

$$C'_m(x) = 1 - \frac{16}{(x+1)^2}$$

On veut étudier le signe de la dérivée. Pour cela, on la réduit au même dénominateur, puis on factorise le numérateur qui se présente comme une identité remarquable (différence de deux carrés).

$$C'_m(x) = \frac{(x+1)^2 - 16}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-4)(x+1+4)}{(x+1)^2} = \frac{(x-3)(x+5)}{(x+1)^2}$$

Si on n'a pas remarqué la factorisation du numérateur, on développe : $(x+1)^2 - 16 = x^2 + 2x + 1 - 16 = x^2 + 2x - 15$ et on étudie le signe de ce trinôme à l'aide du discriminant et des éventuelles racines.

Par une manière comme par l'autre, on obtient que les racines sont -5 et 3 , et que le signe du numérateur est donné par :

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$	
Signe de $(x-3)(x+5)$	$+$	\emptyset	$-$	\emptyset	$+$

On en déduit le tableau de variations de C_m :

x	0	3	10
Signe de $C'_m(x)$	$-$	0	$+$
Variations de C_m	16	7	$\frac{126}{11}$

On complète le tableau par les valeurs $C_m(0)$, $C_m(3)$ et $C_m(10)$.

2. On cherche une primitive de c_m sur l'intervalle $[0; 10]$. Or pour $x \in [0; 10]$, $x+1 > 0$. Donc une primitive de C_m sur $[0; 10]$ est donnée par

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 16 \ln(x+1) + K$$

où K est une constante réelle.

De plus, on sait que $C(0) = 0$.

Donc $0 + 16 \ln 1 + K = 0$ d'où $K = 0$.

Finalement,

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 16 \ln(x+1) \quad \text{pour } x \in [0; 10]$$

Exercice 3.

1. Pour résoudre $x^2 - 4x - 5 = 0$, on cherche les racines du trinôme à l'aide du discriminant.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$$

Le trinôme a deux racines

$$x' = \frac{4-6}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{4+6}{2} = 5$$

Donc $\mathcal{S} = \{-1; 5\}$.

2. (a) L'équation $(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$ est définie pour $x > 0$. Pour $x > 0$, on pose $X = \ln x$.

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0 &\iff X^2 - 4X - 5 = 0 \\ &\iff X = -1 \quad \text{ou} \quad X = 5 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} X = -1 &\iff \ln x = -1 \\ &\iff \ln x = \ln(e^{-1}) \\ &\iff x = e^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X = 5 &\iff \ln x = 5 \\ &\iff \ln x = \ln(e^5) \\ &\iff x = e^5 \end{aligned}$$

On vérifie que e^{-1} et e^5 sont tous les deux des nombres positifs (ils doivent faire partie de l'ensemble de définition de l'équation). Finalement, l'équation a deux solutions qui sont e^{-1} (aussi notée $\frac{1}{e}$) et e^5 . $\mathcal{S} = \{e^{-1}; e^5\}$.

- (b) On cherche d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln 2$. L'équation est correctement définie lorsque $x-3 > 0$ et $x-1 > 0$, c'est-à-dire $x > 3$ et $x > 1$. L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D} =]3; +\infty[$.

On remanie à présent l'équation pour se ramener à quelque chose de la forme $\ln a = \ln b$, puis on résout.

$$\begin{aligned} \ln(x-3) + \ln(x-1) = 3 \ln 2 &\iff \ln[(x-3)(x-1)] = \ln 2^3 \\ &\iff \ln[(x-3)(x-1)] = \ln 8 \\ &\iff (x-3)(x-1) = 8 \\ &\iff x^2 - 4x + 3 = 8 \\ &\iff x^2 - 4x - 5 = 0 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 5 \end{aligned}$$

Or, l'ensemble de définition de l'équation est $\mathcal{D} =]3; +\infty[$. 5 est dans cet ensemble, mais pas -1. Donc l'équation admet pour unique solution $x = 5$.

$$\mathcal{S} = \{5\}$$

Exercice 4.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de f au voisinage de 0.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} = +\infty$. De plus d'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Il faut déterminer la fonction dérivée f' .

f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On dérive $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en appliquant la règle pour un quotient.

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

On en déduit que $f'(1) = 1 + \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1 + 1 = 2$.

De plus, $f(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\ln 1}{1} = \frac{3}{2}$.

D'où l'équation de la tangente :

$$y = 2(x-1) + \frac{3}{2}$$

$$y = 2x - \frac{1}{2}$$

Exercice 5.

1. Par définition, $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Donc

$$d(I) = 10 \times \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \times \frac{\ln \left(\frac{I}{I_0} \right)}{\ln 10} = \frac{10}{\ln 10} \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \frac{10}{\ln 10} (\ln I - \ln I_0)$$

On a bien obtenu l'écriture demandée.

2. Pour $I = 10^6 I_0$, on a, en utilisant l'écriture de la question précédente :

$$\begin{aligned} d(I) &= \frac{10}{\ln 10} (\ln(10^6 I_0) - \ln I_0) \\ &= \frac{10}{\ln 10} (\ln(10^6) + \ln I_0 - \ln I_0) \\ &= \frac{10}{\ln 10} (6 \ln(10)) \\ d(I) &= 60 \end{aligned}$$

Le niveau sonore atteint par la voix humaine correspond à $d(I) = 60$ décibels.

3. La phrase « I_1 correspond à un niveau sonore de 90 db » signifie que $d(I_1) = 90$. La phrase « I_2 correspond à un niveau sonore de 120 db » signifie que $d(I_2) = 120$. On exprime le fait que $d(I_1) = 90$. Cela signifie que

$$90 = \frac{10}{\ln 10} \ln \left(\frac{I_1}{I_0} \right)$$

On a alors

$$\ln \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 90 \times \frac{\ln 10}{10} = 9 \ln 10$$

donc

$$\ln \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = \ln(10^9)$$

Comme $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$, on en déduit que

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^9$$

Calculons à présent $\frac{I_2}{I_0}$. On procède de la même manière en exprimant ce que signifie $d(I_2) = 120$. On a :

$$120 = \frac{10}{\ln 10} \ln \left(\frac{I_2}{I_0} \right)$$

donc

$$\ln \left(\frac{I_2}{I_0} \right) = 120 \times \frac{\ln 10}{10} = 12 \ln 10$$

donc

$$\ln \left(\frac{I_2}{I_0} \right) = \ln(10^{12})$$

On en déduit alors que

$$\frac{I_2}{I_0} = 10^{12}$$

Pour finir, on s'intéresse à $\frac{I_2}{I_1}$. On va utiliser cette fois le deux résultat qui viennent d'être démontrés.

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{I_0} \times \frac{I_0}{I_1} = 10^{12} \times \frac{1}{10^9} = \frac{10^{12}}{10^9} = 10^{12-9} = 10^3$$

donc

$$\frac{I_2}{I_1} = 1000$$

Remarque : En intensité, le niveau sonore du concert de Who atteint donc 1 000 fois le niveau sonore à partir duquel il y a danger et risque de surdité.

4. (a) On calcule, en appliquant la définition :

$$\begin{aligned} d(I_2) - d(I_1) &= \frac{10}{\ln 10} (\ln I_2 - \ln I_0) - \left(\frac{10}{\ln 10} (\ln I_1 - \ln I_0) \right) \\ &= \frac{10}{\ln 10} (\ln I_2 - \ln I_0 - (\ln I_1 - \ln I_0)) \\ d(I_2) - d(I_1) &= \frac{10}{\ln 10} (\ln I_2 - \ln I_1) \end{aligned}$$

On a donc démonstré le résultat demand e.

(b) Lorsque $I_2 = 2I_1$, on a, en appliquant cette formule :

$$\begin{aligned} d(I_2) - d(I_1) &= \frac{10}{\ln 10} (\ln(2I_1) - \ln I_1) \\ &= \frac{10}{\ln 10} (\ln 2 + \ln I_1 - \ln I_1) \\ d(I_2) - d(I_1) &= \frac{10}{\ln 10} \ln 2 \end{aligned}$$

On calcule alors que $d(I_2) - d(I_1) \approx 3,0$.

Ainsi, un son deux fois plus fort en intensité correspond à une différence de 3 décibels en niveau sonore.

(c) Lorsque $d(I_2) - d(I_1) = 15$, on a :

$$15 = \frac{10}{\ln 10} \ln \left(\frac{I_2}{I_1} \right)$$

donc

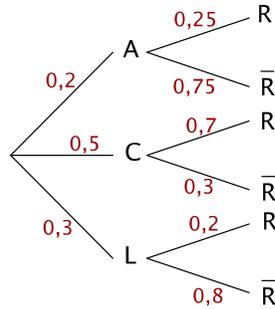
$$\ln \left(\frac{I_2}{I_1} \right) = 15 \times \frac{\ln 10}{10} = \frac{3}{2} \ln 10 = \ln(10^{3/2})$$

D'où $\frac{I_2}{I_1} = 10^{3/2}$ ou encore $\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{10^3} = \sqrt{1000}$.

Or $\sqrt{1000} \approx 31,6$, donc une différence de 15 décibels (par exemple entre un niveau de 100 décibels et un niveau de 115 décibels) correspond à un bruit d'intensité environ 32 fois plus élevée.

Exercice supplémentaire (6 avril)

1. On peut traduire les informations de l'énoncé par l'arbre pondéré suivant :



2. (a) « La personne interrogée pratique la natation en compétition et participe à la rencontre » correspond à l'événement $C \cap R$. On calcule donc $p(C \cap R)$.

$$p(C \cap R) = p(C) \times p_C(R) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$$

(b) La probabilité qu'un adhérent ne participe pas à la rencontre est égale à $p(\bar{R})$. Or, les événements $A \cap \bar{R}$, $C \cap \bar{R}$ et $L \cap \bar{R}$ forment une partition de l'événement \bar{R} . Donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(\bar{R}) &= p(A \cap \bar{R}) + p(C \cap \bar{R}) + p(L \cap \bar{R}) \\ &= p(A) \times p_A(\bar{R}) + p(C) \times p_C(\bar{R}) + p(L) \times p_L(\bar{R}) \\ &= 0,2 \times 0,75 + 0,5 \times 0,3 + 0,3 \times 0,8 \\ &= 0,15 + 0,15 + 0,24 \\ p(\bar{R}) &= 0,54 \end{aligned}$$

54 % des adhérents ne participent pas à la rencontre, ce qui justifie les propos du président.

3. On sait que la personne interrogée participe à la rencontre. Sachant cela, la probabilité qu'elle fasse partie de la section compétition est donnée par $p_R(C)$. On calcule cette probabilité en revenant à la définition de la probabilité conditionnelle.

$$p_R(C) = \frac{p(C \cap R)}{p(R)} = \frac{p(C) \times p_C(R)}{p(R)}$$

Or, $p(R) = 1 - p(\bar{R}) = 1 - 0,54 = 0,46$. On remplace :

$$p_R(C) = \frac{0,5 \times 0,7}{0,46} \approx 0,76$$

4. (a) Les adhérents qui dépensent 60 euros sont ceux qui font partie de la section aquagym ou loisir, et qui n'ont pas participé à la rencontre. Cela correspond

aux événements $A \cap \bar{R}$ et $L \cap \bar{R}$.

$$p(S_i = 60) = p(A \cap \bar{R}) + p(L \cap \bar{R}) = 0,2 \times 0,75 + 0,3 \times 0,8 = 0,15 + 0,24 = 0,39$$

D'autre part, les adhérents qui dépensent 100 euros sont ceux qui adhèrent à la section compétition sans avoir participé à la rencontre. Cela correspond à l'événement $C \cap \bar{R}$.

$$p(S_i = 100) = p(C \cap \bar{R}) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$$

D'où la loi de probabilité :

S_i	60	75	100	115
p_i	0,39	0,11	0,15	0,35

(b) L'espérance mathématique de cette loi de probabilité est donnée par :

$$\begin{aligned} E &= 0,39 \times 60 + 0,11 \times 75 + 0,15 \times 100 + 0,35 \times 115 \\ E &= 86,90 \end{aligned}$$

En moyenne, un adhérent dépense 86,90 €.