

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision du raisonnement seront prises en compte dans la notation.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1.

f est une fonction définie sur $] - 2; +\infty[$ par $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$.

On note f' sa fonction dérivée et \mathcal{C} la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

1. $f(x) = \frac{3x+6}{x+2}$ VRAI FAUX
2. La courbe \mathcal{C} coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5. VRAI FAUX
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = 3$ VRAI FAUX
4. $\int_0^2 f(x) dx = 3$ VRAI FAUX
5. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à \mathcal{C} . VRAI FAUX
6. $f(x) > 3$ pour tout x de $] - 2; +\infty[$. VRAI FAUX
7. $f'(-1) = -1$ VRAI FAUX
8. La fonction g définie sur $] - 2; +\infty[$ par $g(x) = \ln[f(x)]$ est décroissante. VRAI FAUX

Exercice 2.

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit.

Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C_m(x) = x + \frac{16}{x+1}$$

($C_m(x)$ est exprimée en centaines d'euros, x en kilogrammes).

Etudier les variations de la fonction C_m , puis dresser le tableau de variation de la fonction C_m sur l'intervalle $[0; 10]$.

2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m .
Déterminer la fonction C , primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0; 10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

Exercice 3.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$.
2. En déduire la résolution, dans l'ensemble des réels, des équations suivantes :

(a) $(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$

(b) $\ln(x - 3) + \ln(x - 1) = 3 \ln 2$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats lorsque cela est possible.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Exercice 5.

Le niveau sonore $d(I)$ d'un son d'intensité I est une fonction de I donnée par la formule :

$$d(I) = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

où I_0 est l'intensité du seuil audible de l'oreille humaine, et $\log_{10} x$ désigne le logarithme décimal de x . Ce niveau sonore est exprimé en décibels (db).

1. Montrer que $d(I)$ est également donné par l'expression :

$$d(I) = \frac{10}{\ln 10} (\ln I - \ln I_0)$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser cette nouvelle expression pour $d(I)$.

2. Une voix humaine produit un son dont l'intensité est égale à $10^6 I_0$. Calculer le niveau sonore $d(I)$, en décibels, atteint par cette voix humaine.
3. Calculer $\frac{I_1}{I_0}$, $\frac{I_2}{I_0}$, puis $\frac{I_2}{I_1}$, lorsque :
 - I_1 correspond à un niveau sonore de 90 db (au-delà de ce niveau sonore, on considère qu'il y a danger et risque de surdité) ;
 - I_2 correspond à un niveau sonore de 120 db (c'est le niveau sonore atteint par un concert des « Who » en 1976).
4. Dans cette question, I_1 et I_2 désignent des intensités quelconques ; on suppose $I_1 \leq I_2$.

- (a) Montrer que :

$$d(I_2) - d(I_1) = \frac{10}{\ln 10} (\ln I_2 - \ln I_1)$$

- (b) Calculer cette différence $d(I_2) - d(I_1)$, arrondie au dixième le plus proche, lorsque $I_2 = 2 I_1$.

- (c) Déterminer $\frac{I_2}{I_1}$ lorsque $d(I_2) - d(I_1) = 15$, puis justifier l'affirmation suivante : « 115 décibels, c'est environ 32 fois plus fort que 100 décibels ».