

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision du raisonnement seront prises en compte dans la notation. La calculatrice est autorisée.

Questions de cours

- Donner la dérivée de la fonction définie par $f(x) = u(ax + b)$, où u est une fonction dérivable, et a et b deux réels.
- Donner l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f au point d'abscisse a .

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f (on fera un tableau de variations pour résumer les résultats).
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} . On note a cette solution. D'après le tableau de variations, dans quel intervalle se trouve a ?
4. Donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.
5. Représenter la courbe \mathcal{C} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

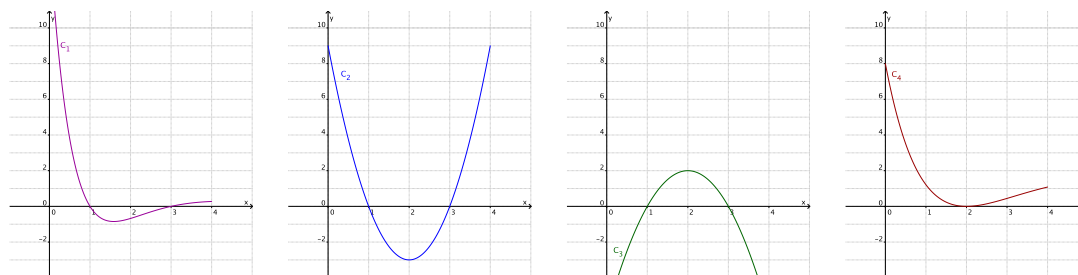
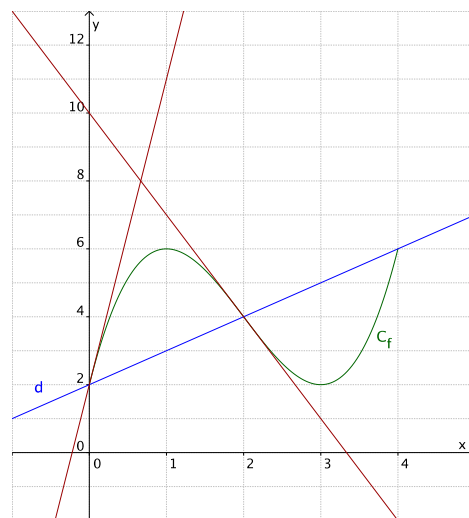
Exercice 2.

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $I = [0; 4]$. Sa courbe représentative est donnée ci-contre dans un repère orthogonal. On note f' la fonction dérivée de f .

Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 2, ainsi que la droite (d) d'équation $y = x + 2$.

Aux points d'abscisses 1 et 3, les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.

1. Par lecture graphique, déterminer :
 - (a) $f(0)$ et $f'(0)$
 - (b) $f(1)$ et $f'(1)$
 - (c) $f(2)$ et $f'(2)$
 - (d) L'ensemble des réels x tels que $f(x) \leq x + 2$.
2. Par lecture graphique, dresser le tableau de variations de f sur I . On indiquera le signe de $f'(x)$.
3. Parmi les quatre courbes ci-dessous, quelle est celle correspondant à la dérivée de f ? Justifier en argumentant l'élimination de chacune des trois autres courbes.



4. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$.
 - (a) En utilisant les résultats de la question 1.(a), déterminer p et q .
 - (b) En utilisant les résultats de la question 1.(b), déterminer m et n .
5. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. Calculer la dérivée de f , et démontrer que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.

Exercice 3.

Une entreprise fabrique une quantité x , comprise entre 0 et 20, d'un certain objet. Le coût total de production f , exprimé en euros, est représenté par la courbe \mathcal{C} dans un repère d'origine O du graphique 1 ci-contre. Les tangentes à la courbe \mathcal{C} aux points B d'abscisse 14 et D d'abscisse 5 sont tracées sur le même graphique.

- Quel est le coût total de production de 10 objets ?
 - Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût inférieur à 150 € ?
- Le coût marginal g est donné sur l'intervalle $]0; 20]$ par la dérivée du coût total de production : $g(x) = f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 20]$.
 - En utilisant le graphique 1 ci-contre, déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 14$. Comparer $g(14)$ et $g(5)$.
 - Quelle est, parmi les trois courbes proposées sur le graphique 2 ci-dessous, celle qui représente le coût marginal ? Justifier la réponse.

3. Le coût moyen h est donné sur l'intervalle $]0; 20]$ par $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

- Estimer $h(5)$.
- Sur le graphique 1, placer le point Q d'abscisse 5 situé sur la courbe \mathcal{C} , puis tracer la droite (OQ) . Une expression du coefficient directeur de la droite (OQ) est $\frac{f(5)}{5}$. Justifier cette expression.
- Placer le point A sur la courbe \mathcal{C} tel que la droite (OA) soit tangente à \mathcal{C} . On appelle a l'abscisse du point A .
- Conjecturer les variations de h sur l'intervalle $]0; 20]$.
Toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.

Exercice 4. [Bonus]

Soit f la fonction définie sur $]1; 4[$ par : $f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 5x + 4}$.

- Montrer que $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-4}$ pour tout x de $]1; 4[$.
 - Utiliser la forme précédente pour étudier le sens de variation de la fonction f sur $]1; 4[$.
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En donner une interprétation graphique.
- Tracer la courbe représentative de f , en précisant les tangentes aux points d'abscisses 2 et 3. Choisir 2 cm pour unité en abscisse.