

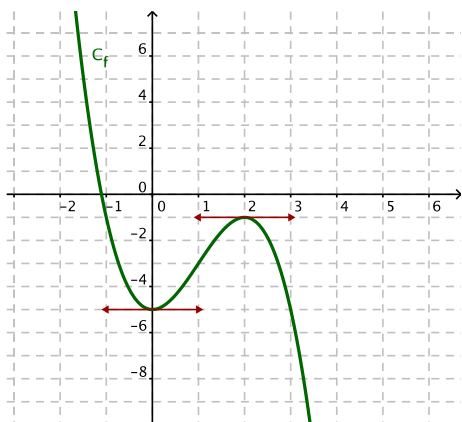
## Exercice 1.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$ .
- $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$  en factorisant.

On étudie le signe de  $f'(x)$  à l'aide d'un tableau de signes, et on en déduit le tableau de variations de  $f$ , qu'on complète avec les limites et  $f(0)$  et  $f(2)$ .

|                   |           |             |             |             |     |
|-------------------|-----------|-------------|-------------|-------------|-----|
| $x$               | $-\infty$ | $0$         | $2$         | $+\infty$   |     |
| $-3x$             | $+$       | $\emptyset$ | $-$         | $-$         |     |
| $x - 2$           | $-$       | $-$         | $\emptyset$ | $+$         |     |
| $f'(x)$           | $-$       | $\emptyset$ | $+$         | $\emptyset$ | $-$ |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $-5$        | $-1$        | $-\infty$   |     |

- Sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , le maximum de  $f$  est  $-1$  (d'après le tableau de variations). La fonction  $f$  ne s'annule donc pas sur  $[0; +\infty[$ .  
Sur  $] -\infty; 0]$ , la fonction  $f$  est dérivable et vérifie  $f'(x) > 0$  pour  $x \in ] -\infty; 0]$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $f(0) = -5$ , donc  $0 \in [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$ . Le théorème des valeurs intermédiaires (version dérivable) assure alors qu'il existe une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -\infty; 0]$  telle que  $f(\alpha) = 0$ .  
De plus, on calcule  $f(-2) = 19 > 0$  et  $f(0) = -5 < 0$ . On sait donc que  $\alpha \in [-2; 0]$ .
- En utilisant la calculatrice, on trouve l'encadrement  $-1,11 \leq \alpha \leq -1,1$ , donc une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près est  $-1,11$  (valeur approchée par défaut).



5.

## Exercice 2.

1. Par lecture graphique :

- $f(0) = 2$  et la pente de la tangente en 0 est égale à 9, donc  $f'(0) = 9$ .
- $f(1) = 6$  et la courbe admet au point d'abscisse 1 une tangente horizontale, donc  $f'(1) = 0$ .
- $f(2) = 4$ , et la pente de la tangente en 2 est égale à  $-3$ , donc  $f'(2) = -3$ .
- L'ensemble des réels  $x$  tels que  $f(x) \leq x + 2$  correspond aux abscisses des points pour lesquels la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant  $f$  est **en-dessous** de la droite  $d$  d'équation  $y = x + 2$ , c'est-à-dire l'intervalle  $[2; 4]$ .

2. On voit que  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$  et sur l'intervalle  $[3; 4]$ , on sait donc que  $f'$  est positive sur ces deux intervalles. A l'inverse,  $f$  est décroissante sur  $[1; 3]$  donc  $f'$  est négative sur  $[1; 3]$ . Ceci permet de compléter la ligne concernant le signe de  $f'(x)$  dans le tableau de variations de  $f$ .

|                   |     |             |     |             |     |
|-------------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|
| $x$               | $0$ | $1$         | $3$ | $4$         |     |
| $f'(x)$           | $+$ | $\emptyset$ | $-$ | $\emptyset$ | $+$ |
| Variations de $f$ | $2$ | $6$         | $2$ | $6$         |     |

- D'après les informations concernant le signe de  $f'(x)$ , on peut éliminer les courbes  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$ . Ensuite, on utilise la valeur de  $f'(2)$  (ou  $f'(0)$ ) pour départager les deux premières courbes. On sait que  $f'(2) = -3$ , donc c'est la courbe  $\mathcal{C}_2$  qui convient.
- (a) On sait que  $f(0) = 2$ . Or, d'après l'expression de  $f$ ,  $f(0)$  s'écrit  $f(0) = m \times 0^3 + n \times 0^2 + p \times 0 + q = q$ , d'où  $q = 2$ .  
D'autre part, on sait que  $f'(0) = 9$ . Or,  $f'(x) = 3mx^2 + 2nx + p$ , donc  $f'(0) = p$ . Ceci nous donne  $p = 9$ .
- (b) On sait désormais que  $f(x) = mx^3 + nx^2 + 9x + 2$  en remplaçant  $p$  et  $q$  par leurs valeurs, et par conséquent,  $f'(x) = 3mx^2 + 2nx + 9$ .  
Comme  $f(1) = 6$  et  $f'(1) = 0$ , on a les équations

$$6 = m \times 1^3 + n \times 1^2 + 9 \times 1 + 2 = m + n + 11$$

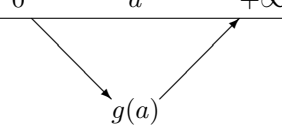
$$\text{et } 0 = 3m \times 1^2 + 2n \times 1 + 9 = 3m + 2n + 9$$

Les nombres  $m$  et  $n$  sont solutions du système  $\begin{cases} m + n = -5 \\ 3m + 2n = -9 \end{cases}$ , dont les solutions sont  $m = 1$  et  $n = -6$ . D'où l'expression de  $f$  (donnée à la question 5).

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ . Pour déterminer si les tangentes sont parallèles, on calcule leurs coefficients directeurs respectifs, donnés par  $f'(0)$  et  $f'(4)$ . Or,  $f'(0) = 9$  et  $f'(4) = 3 \times 16 - 12 \times 4 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9$ . Les tangentes aux points d'abscisses 0 et 4 sont donc parallèles puisqu'elles ont le même coefficient directeur, égal à 9.

**Exercice 3.**

1. (a) Le coût total de production de 10 objets est égal à 60 euros.  
 (b) Pour un coût total ne dépassant pas 150 euros, on peut produire au maximum 18 objets.
2. (a)  $g(14) = f'(14)$ . On lit graphiquement ce nombre dérivé en mesurant le coefficient directeur de la tangente en  $B$ . Or, cette tangente passe évidemment par le point  $B$  de coordonnées  $(14; 90)$ , mais aussi par le point de coordonnées  $(14 + 10; 90 + 60)$ . On en déduit que le coefficient directeur de cette tangente est égal à  $\frac{60}{10} = 6$ . Donc  $g(14) = 6$ . On calcule ensuite  $g(5) = f'(5) =$  coefficient directeur de la tangente en  $D$ . On a alors  $g(5) = \frac{22}{8} = \frac{11}{4} = 2,75$ . On remarque que  $g(14)$  est plus grand que  $g(5)$ .  
 (b) On sait que  $g(14) = 6$ , donc la courbe correspondant au coût marginal ne peut pas être la courbe  $\mathcal{C}_2$ . De plus,  $g(5)$  est plus petit que  $g(14)$ , ce qui n'est pas le cas sur la courbe  $\mathcal{C}_3$ . C'est donc la courbe  $\mathcal{C}_1$  qui représente le coût marginal.
3. (a)  $h(5) = \frac{f(5)}{5} = \frac{40}{5} = 8$ .  
 (b) Le point  $Q$  a pour coordonnées  $(5; f(5))$ . Le coefficient directeur de la droite  $(OQ)$  est donc  $\frac{y_Q - y_O}{x_Q - x_O} = \frac{f(5) - 0}{5 - 0} = \frac{f(5)}{5}$ .  
 (c) Graphiquement, on lit  $a \approx 11$ .  
 (d)  $h(x)$  représente la pente de la droite  $(OQ)$  lorsque  $Q$  se promène sur la courbe  $\mathcal{C}_f$ . Au point d'abscisse  $a$ , la droite  $(OQ)$  coïncide avec la tangente à  $\mathcal{C}$ . Autrement dit, on aura  $h(a) = g(a)$ . Pour  $x$  plus petit que  $a$ , la sécante a une pente supérieure à la tangente. Lorsque  $x$  approche de  $a$  en restant plus petit, la pente de la sécante diminue, jusqu'à être égale à la pente de la tangente. Ensuite, la pente de la sécante augmente à nouveau (et est plus petite que la pente de la tangente). On obtiendra un tableau de variations du genre :

|                   |   |     |           |
|-------------------|---|-----|-----------|
| $x$               | 0   | $a$ | $+\infty$ |
| Variations de $h$ |  |     |           |
| $h(x) - g(x)$     | +   | 0   | -         |

**Exercice 4.**

1. (a) On part de l'expression donnée dans la question, qu'on met au même dénominateur :
 
$$\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-4} = \frac{(x-4) - 4(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x-4-4x+4}{(x-1)(x-4)} = \frac{-3x}{(x-1)(x-4)} = f(x)$$
 On a bien démontré le résultat. On pourra désormais utiliser indifféremment l'une ou l'autre forme pour  $f(x)$ .

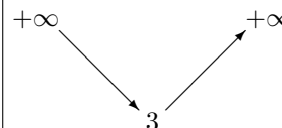
- (b) Conformément à l'énoncé, on se base sur l'expression de  $f(x)$  démontrée à la question précédente. On a alors :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - 4 \left( \frac{-1}{(x-4)^2} \right) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-4)^2}$$

puis on réduit la dérivée au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(x-4)^2 + 4(x-1)^2}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - 16 + 4x^2 - 8x + 4}{(x-1)^2(x-4)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 12}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{3(x^2 - 4)}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-1)^2(x-4)^2} \end{aligned}$$

Le signe de  $f'(x)$  est donc le même que le signe de  $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ . Les racines du trinôme sont  $-2$  et  $2$ , et le trinôme est du signe de  $a$ , c'est-à-dire positif, à l'extérieur des racines (donc pour  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ ), et négatif pour  $x \in ]-2; 2[$ . Ici, on étudie le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in ]1; 4[$ . On obtient le tableau de variations suivant :

|                   |   |   |   |
|-------------------|---|---|---|
| $x$               | 1   | 2 | 4 |
| $f'(x)$           | -   | 0 | + |
| Variations de $f$ |  |   |   |

2. Les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition sont, en utilisant la forme de la question 1. (a) :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4}{x-4} = \frac{4}{3}, \quad \text{d'où, par somme, } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{-4}{x-4} = +\infty, \quad \text{d'où, par somme, } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = +\infty.$$

On complète le tableau de variations. On en déduit que la courbe admet deux asymptotes verticales, d'équations  $x = 1$  et  $x = 4$ .

3.

