

Exercice 2.

- f est continue sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$ en tant que quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Cf correction en classe
- D'après la question 2., on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$, donc \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ (cf. définition du cours).
- On met au même dénominateur

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{x-2} &= \frac{(ax+b)(x-2) + c}{x-2} \\ &= \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2} \\ &= \frac{ax^2 + (b-2a)x + c - 2b}{x-2} \end{aligned}$$

et on compare cette expression à $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x-2}$. Pour que les deux expressions soient égales, il suffit d'avoir, en identifiant les coefficients des termes en x^2 , des termes en x et des termes constants

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \\ c - 2b = 5. \end{cases}$$

Ce système conduit à $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$. Finalement, pour tout $x \neq 2$, $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x + 4 + \frac{3}{x-2}$.

- On a $f(x) - (x + 4) = \frac{3}{x-2}$ d'après la question précédente. Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-2} = 0$, ce qui entraîne que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (x + 4)) = 0$. Ceci traduit exactement le fait que la droite d'équation $y = x + 4$ est asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ (cf. définition du cours).
- On étudie le signe de la différence $f(x) - (x + 4)$.
Or $f(x) - (x + 4) = \frac{3}{x-2}$, qui est du signe de $x - 2$ puisque 3 est positif.
 - Pour $x \in] -\infty; 2[$, on a $x - 2 < 0$ donc $f(x) - (x + 4) < 0$, donc \mathcal{C}_f est en-dessous de son asymptote \mathcal{D}' sur $] -\infty; 2[$.
 - En revanche pour $x \in]2; +\infty[$, on a $x - 2 > 0$ donc $f(x) - (x + 4) > 0$, donc \mathcal{C}_f est au-dessus de son asymptote sur $]2; +\infty[$.

Exercice 3.

- Il faut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f . On note tout d'abord que f est continue, en tant que fonction polynomiale. On va raisonner en étudiant f sur chacun des intervalles sur lesquels elle est strictement monotone : $[-1; 1]$, puis $[1; 3]$, puis $[3; 5]$.
 - Sur $[-1; 1]$, f est continue (déjà dit) et strictement croissante. De plus, $f(-1) = -18$, $f(1) = 2$, et $0 \in [-18; 2] = [f(-1); f(1)]$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de LA valeur intermédiaire) assure donc que, sur l'intervalle $[-1; 1]$, f prend une et une seule fois toute valeur comprise entre -18 et 2 , et en particulier, f prend une et une seule fois la valeur 0. On note a l'unique réel de $[-1; 1]$ tel que $f(a) = 0$.
 - Sur $[1; 3]$, f est continue et strictement décroissante. De plus, $f(1) = 2 > 0$ et $f(3) = -56 < 0$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure donc qu'il existe un unique réel $b \in [1; 3]$ tel que $f(b) = 0$.
 - Sur $[3; 5]$, f est continue et strictement croissante. De plus, $f(3) = -56 < 0$ et $f(5) = 18 > 0$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure donc qu'il existe un unique réel $c \in [3; 5]$ tel que $f(c) = 0$.

Bilan : f s'annule exactement trois fois sur l'intervalle $[-1; 5]$, en trois points notés a , b et c . De plus, on sait que $a \in] -1; 1[$, $b \in]1; 3[$ et $c \in]3; 5[$.

- Cherchons un encadrement plus précis de $b \in]1; 3[$. On s'aperçoit que $f(2) = 0$, donc la solution cherchée est exactement 2.
Cherchons alors un encadrement de $c \in]3; 5[$. Dans un premier temps, on cherche un encadrement d'amplitude 10^{-1} . On utilise le tableur de la calculatrice pour calculer toutes les images par f des nombres allant de 3 à 5 par pas de 0,1. La fonction f est croissante sur $[3; 5]$, on observe donc d'abord des valeurs négatives, puis ces valeurs deviennent positives. On remarque que

$$f(3,7) \approx -0,187 < 0$$

$$f(3,8) \approx 0,432 > 0.$$

Ainsi, $0 \in [f(3,7); f(3,8)]$, donc c est compris entre 3,7 et 3,8. C'est un encadrement d'amplitude 10^{-1} . On recommence alors le tableau de valeurs, mais entre 3,7 et 3,8 avec un pas de 0,01. On trouve cette fois

$$f(3,73) \approx -0,012 < 0$$

$$f(3,74) \approx 0,048 > 0.$$

donc c est compris entre 3,73 et 3,74. On a obtenu un encadrement d'amplitude 10^{-2} de c , à savoir

$$3,73 \leq c \leq 3,74.$$

On pourrait de la même manière obtenir un encadrement pour $a \in] -1; 1[$:

$$0,26 \leq a \leq 0,27.$$