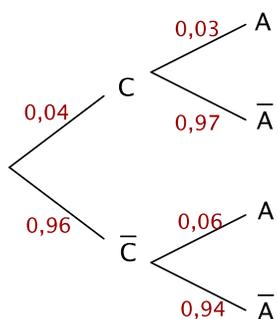


**Exercice 1.**

1. (a) D'après l'énoncé :

$$p_{\bar{C}}(\bar{A}) = 0,94 \quad p_C(A) = 0,03 \quad p(C) = 0,04$$



(b)

2. (a) « La calculatrice présente les deux défauts » correspond à l'événement
- $A \cap C$
- .

Or,

$$p(A \cap C) = p(C) \times p_C(A) = 0,04 \times 0,03 = 0,0012$$

- (b) « La calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier » correspond à l'événement
- $A \cap \bar{C}$
- . Or,

$$p(A \cap \bar{C}) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(A) = 0,96 \times 0,06 = 0,0576$$

- (c) D'après la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$p(A) = p(A \cap C) + p(A \cap \bar{C}) = 0,0012 + 0,0576 = 0,0588$$

- (d) « La calculatrice ne présente aucun défaut » correspond à l'événement
- $\bar{A} \cap \bar{C}$
- .

On a

$$p(\bar{A} \cap \bar{C}) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(\bar{A}) = 0,96 \times 0,94 = 0,9024$$

Arrondie au millième, on obtient une probabilité égale à 0,902.

3. (a) La probabilité, pour une calculatrice, de ne pas présenter de défaut, est égale à 0,902.

Les trois calculatrices étant indépendantes, la probabilité qu'aucune des trois calculatrices ne présente de défaut est égale à

$$0,902^3 \approx 0,734$$

en arrondissant au millième.

- (b) L'événement « au moins une des trois calculatrices a un défaut » est l'événement contraire de « aucune des trois calculatrices ne présente de défaut ». On a donc

$$p(\text{au moins un défaut}) = 1 - p(\text{aucun défaut}) = 1 - 0,734 = 0,266$$

La probabilité qu'au moins une des trois calculatrices présente un défaut est donc égale à 0,266.

**Exercice 2.**

Le coût total est une primitive du coût marginal, donc

$$G(x) = 50x - 2x^3 + x^4 + c$$

où  $c$  est une constante, correspondant aux coûts fixes en centaines d'euros. D'après l'énoncé,  $c = 20$ . Finalement, l'expression du coût total de production est

$$G(x) = 50x - 2x^3 + x^4 + 20$$

**Exercice 3.**

1. (a) On développe :

$$a(x-1)^2 + b = a(x^2 - 2x + 1) + b = ax^2 - 2ax + a + b$$

et on compare cette expression à  $4x^2 - 8x - 5$ . On en déduit qu'on aura l'égalité  $4x^2 - 8x - 5 = a(x-1)^2 + b$  si les constantes  $a$  et  $b$  vérifient les contraintes :

$$\begin{cases} a = 4 \\ -2a = -8 \\ a + b = -5 \end{cases}$$

c'est-à-dire  $a = 4$  et  $b = -5 - a = -9$ . On a alors l'égalité

$$4x^2 - 8x - 5 = 4(x-1)^2 - 9$$

- (b) On en déduit que
- $f$
- se réécrit :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x - 5}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)^2 - 9}{(x-1)^2}$$

Or

$$\frac{4(x-1)^2 - 9}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-1)^2} = 4 - \frac{9}{(x-1)^2}$$

D'où

$$f(x) = 4 - \frac{9}{(x-1)^2}$$

2. (a) Une primitive de  $f$  sur  $]1; +\infty[$  est de la forme

$$G(x) = 4x + \frac{9}{x-1}$$

L'ensemble des primitives de  $f$  est de la forme  $G(x) + c$ .

(b)  $f(2) = 4 - \frac{9}{(2-1)^2} = 4 - \frac{9}{1} = -5$ . On cherche donc la primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(2) = -5$ . On sait que  $F$  s'écrit

$$F(x) = 4x + \frac{9}{x-1} + c$$

où  $c$  est une constante. De plus, on a

$$\begin{aligned} F(2) &= -5 \\ 4 \times 2 + \frac{9}{2-1} + c &= -5 \\ 8 + 9 + c &= -5 \\ c &= -5 - 17 \end{aligned}$$

D'où  $c = -22$ . Finalement, la primitive de  $f$  telle que  $F(2) = f(2)$  est donnée par

$$F(x) = 4x + \frac{9}{x-1} - 22$$

3. (a) On étudie la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ d'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty}$$

On étudie la limite de  $F$  en 1 (à droite). On a, d'une part,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x - 1 = 0^+, \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{9}{x-1} = +\infty$$

et d'autre part,  $\lim_{x > 1} 4x - 22 = -18$ .

Donc par somme,  $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} F(x) = +\infty}$ .

(b)  $F$  est une primitive de  $f$ , donc la dérivée de  $F$  est  $f$ , c'est-à-dire

$$F'(x) = 4 - \frac{9}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 5}{(x-1)^2}$$

On pourra être amené à utiliser l'une ou l'autre expression pour  $f$ , selon ce qui sera le plus judicieux.

Pour étudier le sens de variation de  $F$ , il faut étudier le signe de  $f$ . La forme du quotient (donnée initialement par l'énoncé) convient le mieux. Le dénominateur  $(x-1)^2$  est toujours positif puisque c'est un carré. La fonction  $f$  est donc du même signe que le numérateur.

Le numérateur  $4x^2 - 8x - 5$  est un trinôme du second degré. Pour déterminer son signe, il faut d'abord calculer son discriminant.

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 64 + 80 = 144 = 12^2$$

Le trinôme a deux racines qui sont

$$\begin{aligned} x' &= \frac{8-12}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \\ x'' &= \frac{8+12}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$a = 4$  est positif, donc le signe du trinôme est donné par :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
Signe de $4x^2 - 8x - 5$	+	0	-	0	+

On s'intéresse uniquement à l'intervalle  $]1; +\infty[$ . Or 1 est compris entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{5}{2}$ . D'après le tableau de signe précédent, pour tout  $1 < x < \frac{5}{2}$ , on a  $4x^2 - 8x - 5 < 0$ , et pour  $x > \frac{5}{2}$ , on a  $4x^2 - 8x - 5 > 0$ .

Par conséquent, pour tout  $x \in ]1; \frac{5}{2}[$ ,  $f(x) < 0$ , donc la fonction  $F$  est strictement décroissante sur  $]1; \frac{5}{2}[$ ; et pour tout  $x > \frac{5}{2}$ ,  $f(x) > 0$ , donc  $F$  est strictement croissante sur  $] \frac{5}{2}; +\infty[$ . On a le tableau de variations suivant :

$x$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	-	0	+
Variations de $F$	$+\infty$	$\searrow$	$-6$
		$\swarrow$	$+\infty$

**Exercice 4.**

$$(a) A = \int_0^2 (0,03x^2 - 2x + 1) dx$$

$$f(x) = 0,03x^2 - 2x + 1$$

$$F(x) = \frac{0,03}{3} x^3 - x^2 + x = 0,01 x^3 - x^2 + x$$

donc

$$A = [0,01 x^3 - x^2 + x]_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$A = 0,01 \times 2^3 - 2^2 + 2 - (0 - 0 + 0)$$

$$A = 0,08 - 4 + 2$$

$$\text{donc } \boxed{A = -1,92}$$

$$(b) B = \int_0^2 \frac{1}{(1+t)^3} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)^3} = (1+t)^{-3}$$

$$F(t) = \frac{1}{-2} (1+t)^{-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+t)^2}$$

donc

$$B = \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+t)^2} \right]_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$B = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+2)^2} - \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+0)^2} \right)$$

$$B = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times 1$$

$$\text{donc } \boxed{B = \frac{4}{9}}$$

$$(c) C = \int_{-2}^1 \frac{4}{(t-2)^2} dt$$

$$f(t) = \frac{4}{(t-2)^2}$$

$$F(t) = -\frac{4}{t-2}$$

donc

$$C = \left[ -\frac{4}{t-2} \right]_{-2}^1 = F(1) - F(-2)$$

$$C = -\frac{4}{1-2} - \left( -\frac{4}{-2-2} \right)$$

$$C = -\frac{4}{-1} + \frac{4}{-4}$$

$$C = 4 - 1$$

$$\text{donc } \boxed{C = 3}$$

$$(d) D = \int_1^3 \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} \right) dt$$

$$f(t) = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}$$

$$F(t) = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln(t) - \frac{2}{t}$$

donc

$$D = \left[ \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + t - \ln(t) - \frac{2}{t} \right]_1^3 = F(3) - F(1)$$

$$D = \frac{1}{3} \times 3^3 - \frac{1}{2} \times 3^2 + 3 - \ln(3) - \frac{2}{3} - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln(1) - 2 \right)$$

$$D = 9 - \frac{9}{2} + 3 - \ln(3) - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + 0 + 2$$

$$\text{donc } \boxed{D = 8 - \ln(3)}$$

$$(e) E = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{3} x^3 - x$$

donc

$$E = \left[ \frac{1}{3} x^3 - x \right]_{-1}^1 = F(1) - F(-1)$$

$$E = \frac{1}{3} \times 1^3 - 1 - \left( \frac{1}{3} \times (-1)^3 - (-1) \right)$$

$$E = \frac{1}{3} - 1 - \left( -\frac{1}{3} + 1 \right)$$

$$E = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1$$

donc  $E = -\frac{4}{3}$

$$(f) F = \int_1^2 \left( t - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$g(t) = t - \frac{1}{t}$$

$$G(t) = \frac{1}{2} t^2 - \ln(t)$$

donc

$$F = \left[ \frac{1}{2} t^2 - \ln(t) \right]_1^2 = G(2) - G(1)$$

$$F = \frac{1}{2} \times 2^2 - \ln(2) - \left( \frac{1}{2} \times 1^2 - \ln(1) \right)$$

$$F = 2 - \ln(2) - \frac{1}{2} + 0$$

donc  $F = \frac{3}{2} - \ln(2)$

### Exercice 5.

$$A = \ln \frac{7}{2} + \ln \frac{5}{2} + \ln \frac{5}{4}$$

$$A = \ln 7 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 5 + \ln 5 - \ln 4$$

$$A = \ln 7 - \ln 4$$

$$A = \ln \frac{7}{4}$$

$$B = \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{2^3}$$

$$B = \ln \frac{2 \times 3}{3 \times 2^3}$$

$$B = \ln \frac{2}{2^3}$$

$$B = \ln \frac{1}{2^2}$$

$$B = \ln \frac{1}{4}$$

$$C = \ln 9 + \ln 4 - 2 \ln 6$$

$$C = 2 \ln 3 + 2 \ln 2 - 2(\ln 2 + \ln 3)$$

$$C = 2 \ln 3 + 2 \ln 2 - 2 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$C = 0$$

$$D = \ln \frac{25}{18} - 2 \ln 5 + \ln 2 + 2 \ln 3$$

$$D = \ln 25 - \ln 18 - 2 \ln 5 + \ln 2 + 2 \ln 3$$

$$D = 2 \ln 5 - (\ln 3 + \ln 3 + \ln 2) - 2 \ln 5 + \ln 2 + 2 \ln 3$$

$$D = 2 \ln 5 - 2 \ln 3 - \ln 2 - 2 \ln 5 + \ln 2 + 2 \ln 3$$

$$D = 0$$