

Question de cours

1. Si le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie L lorsque h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est égal à L .

On note $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

2. La dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est la fonction $f'(x) = 2x$.

Exercice 1.

1. Univers : $\Omega = \{\text{FFF}; \text{FFG}; \text{FGF}; \text{FGG}; \text{GFF}; \text{GFG}; \text{GGF}; \text{GGG}\}$.
Il y a 8 configurations différentes possibles.

2. L'événement A : « avoir deux enfants de sexes différents » correspond à avoir au moins un garçon et au moins une fille parmi les trois enfants. C'est l'événement complémentaire de l'événement \bar{A} : « avoir trois enfants de même sexe ». Or l'événement \bar{A} est réalisé par deux issues élémentaires : FFF (trois filles) ou GGG (trois garçons). Comme toutes les issues sont équiprobables,

$$p(\bar{A}) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } \bar{A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

On en déduit que

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Finalement, la probabilité d'obtenir deux enfants de sexes différents parmi les trois enfants est de $\frac{3}{4}$.

Exercice 2.

1. Répartition des pièces :

Forme \ Couleur	Rouge	Bleu	Vert	Total
Cube	12	15	28	55
Cylindre	6	5	14	25
Total	18	20	42	80

En effet, il y a 80 pièces au total, dont 25 cylindres, donc 55 cubes.

15 % des pièces, c'est-à-dire $0,15 \times 80 = 12$ pièces sont des cubes rouges.

20 % des 25 cylindres sont bleus, il y a donc $0,20 \times 25 = 5$ cylindres bleus.

Il y a trois fois plus de cubes bleus que de cylindres bleus, ce qui fait 15 cubes bleus.

On en déduit qu'il y a $55 - 12 - 15 = 28$ cubes verts.

Or il y a deux fois plus de cubes verts que de cylindres verts, il y a donc 14 cylindres verts.

Pour finir, on en déduit qu'il y a $25 - 5 - 14 = 6$ cylindres rouges.

On complète ensuite le total de pièces de chaque couleur.

2. Il y a 18 pièces rouges ($\text{card}(A) = 18$), donc $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40}$.

Il y a 55 cubes ($\text{card}(B) = 55$), donc $p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(E)} = \frac{55}{80} = \frac{11}{16}$.

Il y a 28 pièces qui sont des cubes verts ($\text{card}(C) = 28$),

donc $p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(E)} = \frac{28}{80} = \frac{7}{20}$.

On applique la formule :

$$p(D) = p(\{\text{cube}\} \cup \{\text{vert}\}) = p(\{\text{cube}\}) + p(\{\text{vert}\}) - p(\{\text{cube}\} \cap \{\text{vert}\})$$

Autrement dit,

$$p(D) = p(A) + p(B) - p(C)$$

donc

$$p(D) = \frac{55}{80} + \frac{42}{80} - \frac{28}{80} = \frac{69}{80}$$

Exercice 3.

1 ^{er} dé \ 2 ^{ème} dé	1	2	2	3	4	4
1	2	3	3	4	5	5
3	4	5	5	6	7	7
4	5	6	6	7	8	8
5	6	7	7	8	9	9
6	7	8	8	9	10	10
8	9	10	10	11	12	12

L'univers est $E = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. Il y a 11 valeurs différentes possibles pour la somme.

2. Chaque case du tableau ci-dessus représente une des issues élémentaires, et a une probabilité égale à $\frac{1}{36}$.

La somme peut prendre toutes les valeurs de 2 à 12. Pour obtenir la probabilité d'avoir une somme égale à 2, il faut compter le nombre de manières différentes d'obtenir 2 dans le tableau ci-dessus. Or, il y a une seule manière d'obtenir une somme égale à 2 (faire 1 sur chaque dé). Donc

$$p(S = 2) = \frac{\text{nombre d'issue ayant pour somme 2}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{36}$$

donc $p(S = 2) = \frac{1}{36}$.

Il y a deux manières d'obtenir une somme égale à 3 : faire 1 sur le premier dé, et faire 2 sur le deuxième dé (sur lequel deux faces portent le numéro 2). Donc

$$p(S = 3) = \frac{2}{36}$$

On continue de la même manière, et on obtient le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme :

Somme S_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

3. Pour que la somme soit impaire, il faut qu'elle soit égale à 3, ou 5, ou 7, ou 9, ou 11. On complète alors en s'appuyant sur le tableau précédent :

$$\begin{aligned} p(S \text{ impaire}) &= p(S = 3) + p(S = 5) + p(S = 7) + p(S = 9) + p(S = 11) \\ &= \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc la probabilité d'obtenir une somme impaire est égale à $\frac{1}{2}$.