

Exercice 1.

(a) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -3$ au voisinage de -3 .

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On ne peut rien dire.

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $-\infty$.

(d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ au voisinage de 0 .

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On ne peut rien dire.

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ au voisinage de $+\infty$.

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

On ne peut rien dire.

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

On ne peut rien dire.

(j) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ au voisinage de -1 .

Exercice 2.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 + \frac{1}{x^3}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \end{array} \right\} \text{ par somme, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 + \frac{1}{x^3} = +\infty}$$

(b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x - 3 + \frac{1}{x^3}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x - 3 = -3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3} = -\infty \end{array} \right\} \text{ par somme, } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x - 3 + \frac{1}{x^3} = -\infty}$$

La courbe associée admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 3 + x^2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ par somme, c'est une forme indéterminée.}$$

On factorise alors : $2x - 3 + x^2 = x^2 + 2x - 3 = x(x + 2) - 3$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + 2) = +\infty$$

Donc par addition de -3 , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + 2) - 3 = +\infty$,

c'est-à-dire $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 3 + x^2 = +\infty}$.

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{donc par inverse, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Par multiplication par 5 , on a toujours $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2} = 0}$.

La courbe associée admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) au voisinage de $-\infty$.

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + \frac{3}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x+3 = +\infty \quad \text{donc par inverse,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+3} = 0$$

$$\text{Par multiplication par 3,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+3} = 0$$

$$\text{Par ajout de 5,} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 + \frac{3}{x+3} = 5}$$

La courbe associée admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ au voisinage de $+\infty$.

$$(f) \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} 5 + \frac{3}{x+3}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} x+3 = 0^+ \quad \text{donc par inverse,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

$$\text{Par multiplication par 3,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{3}{x+3} = +\infty$$

$$\text{Par ajout de 5,} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} 5 + \frac{3}{x+3} = +\infty}$$

La courbe associée admet une asymptote verticale d'équation $x = -3$ au voisinage de -3 .

Exercice 3.

1. • Etude en $-\infty$:

$$\text{D'une part,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x+3 = +\infty.$$

$$\text{D'autre part,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1 = -\infty, \text{ donc par passage à l'inverse,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0.$$

$$\text{Par somme, on obtient alors que} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}.$$

• Etude en $+\infty$: même chose qu'en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x+3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0, \text{ donc par somme,} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}.$$

• Etude en 1 à gauche :

$$\text{D'une part,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -x+3 = 2.$$

$$\text{D'autre part,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x-1 = 0^-, \text{ donc par passage à l'inverse,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty,$$

$$\text{puis} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2}{x-1} = -\infty \text{ (on multiplie par 2, qui est positif).}$$

$$\text{Par somme, on obtient alors que} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty}.$$

• Etude en 1 à droite :

$$\text{D'une part,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} -x+3 = 2.$$

$$\text{D'autre part,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x-1 = 0^+, \text{ donc par passage à l'inverse,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

$$\text{puis} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2}{x-1} = +\infty.$$

$$\text{Par somme, on obtient alors que} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty}.$$

2. D'après la question précédente, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$, donc

la courbe de f admet une asymptote verticale d d'équation $x = 1$ au voisinage de 1.

Au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, \mathcal{C} n'admet pas d'asymptote horizontale, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Cependant, f est de la forme $f(x) = ax+b+\varepsilon(x)$, ce qui laisse présager l'existence d'une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$ si la fonction $\varepsilon(x)$ tend vers 0 en $-\infty$ et/ou en $+\infty$.

$$\text{En effet,} \quad f(x) - (-x+3) = \frac{2}{x-1},$$

$$\text{et on sait que} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0.$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x+3)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+3)] = 0$$

Donc la droite d' d'équation $y = -x+3$ est asymptote oblique à \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

3. Pour étudier la position de \mathcal{C} par rapport à d' , on étudie le signe de $f(x) - (-x+3)$.

$$\text{Or,} \quad f(x) - (-x+3) = \frac{2}{x-1}.$$

$$\bullet \text{ Si } x < 1, \text{ alors } x-1 < 0, \text{ donc } \frac{1}{x-1} < 0, \text{ puis } \frac{2}{x-1} < 0.$$

$$\text{Donc pour } x < 1, f(x) - (-x+3) < 0.$$

\mathcal{C} est en-dessous de d' sur l'intervalle $] -\infty; 1[$.

$$\bullet \text{ Si } x > 1, \text{ alors } x-1 > 0, \text{ donc } \frac{1}{x-1} > 0, \text{ puis } \frac{2}{x-1} > 0.$$

$$\text{Donc pour } x > 1, f(x) - (-x+3) > 0.$$

\mathcal{C} est au-dessus de d' sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 4.

1. On étudie l'expression proposée en la réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} x + 1 - \frac{3}{x-2} &= \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} - \frac{3}{x-2} \\ &= \frac{(x+1)(x-2) - 3}{x-2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + x - 2 - 3}{x-2} \\ &= \frac{x^2 - x - 5}{x-2} \\ x + 1 - \frac{3}{x-2} &= f(x) \end{aligned}$$

Donc on a bien, pour $x \neq 2$, $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-2}$.

2. • Etude en $-\infty$:

Si on utilise la forme donnée initialement dans l'énoncé, on obtient une forme indéterminée. On utilise donc la forme démontrée (ou admise, pour ceux qui n'ont pas su la faire) à la question 1 : $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-2}$.

D'une part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$, donc par passage à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{x-2} = 0$.

Par somme, on obtient alors que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

• Etude en $+\infty$: même principe qu'en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x-2} = 0$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• Etude en 2 à gauche :

On pourrait utiliser l'une ou l'autre forme, mais la deuxième limite les risques d'erreur. On utilise donc toujours l'expression de la question 1.

D'une part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x + 1 = 3$.

D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^-$, donc par passage à l'inverse, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$,

puis $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} -\frac{3}{x-2} = +\infty$ (on multiplie par -3 , qui est négatif).

Par somme, on obtient alors que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$.

• Etude en 2 à droite :

D'une part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x + 1 = 3$.

D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$, donc par passage à l'inverse, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$,

puis $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} -\frac{3}{x-2} = -\infty$ (on multiplie par -3 , qui est négatif).

Par somme, on obtient alors que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$.

3. On sait que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$,

donc \mathcal{C} admet une asymptote verticale d d'équation $x = 2$ au voisinage de 2.

D'autre part, d'après la forme démontrée à la question 1 pour f , on conjecture que \mathcal{C} admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. Démonstrons-le.

On sait que $f(x) - (x + 1) = -\frac{3}{x-2}$. Or, on a vu lors des calculs de la question précédente que $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3}{x-2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x-2} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$

Donc la droite d' d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

4. Pour étudier la position de \mathcal{C} par rapport à d' , on étudie le signe de $f(x) - (x + 1)$.

Or, $f(x) - (x + 1) = -\frac{3}{x-2}$.

• Si $x < 2$, alors $x - 2 < 0$, donc $\frac{1}{x-2} < 0$, puis $-\frac{3}{x-2} > 0$.
Donc pour $x < 2$, $f(x) - (x + 1) > 0$.

\mathcal{C} est au-dessus de d' sur l'intervalle $] -\infty; 2[$.

• Si $x > 2$, alors $x - 2 > 0$, donc $\frac{1}{x-2} > 0$, puis $-\frac{3}{x-2} < 0$.
Donc pour $x > 2$, $f(x) - (x + 1) < 0$.

\mathcal{C} est en-dessous de d' sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

5. *Courbe*

