

**Exercice 1.**

On note  $x$  le plus petit côté (un des côtés de l'angle droit). L'autre côté de l'angle droit est égal à  $x + 3$ , et l'hypoténuse mesure 3 cm de plus que  $x + 3$ , donc  $x + 6$ .

Comme le triangle est rectangle, on sait que le théorème de Pythagore est vérifié. Donc

$$x^2 + (x + 3)^2 = (x + 6)^2$$

On développe tout :

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 12x + 36$$

et on se ramène à une équation à second membre nul

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 12x + 36) = 0$$

et on simplifie

$$x^2 - 6x - 27 = 0.$$

Le nombre  $x$  (positif, puisque c'est un longueur) doit vérifier cette équation pour que la configuration de l'énoncé soit possible. On cherche les racines du trinôme du second degré.

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-27) = 36 + 108 = 144$$

On a  $\Delta > 0$ , donc le trinôme a deux racines. Et  $\Delta = 144 = 12^2$ , ce qui nous permet de calculer plus facilement les racines :

$$x' = \frac{6 - 12}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{6 + 12}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

La seule solution convenable est  $x = 9$  car il faut que  $x$  soit positif.

Conclusion : Les côtés du triangle mesurent  $9 \text{ cm}$ ,  $12 \text{ cm}$  et  $15 \text{ cm}$ .

On vérifie que

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$$

Donc le triangle est bien rectangle.

Ne pas oublier de faire une figure.

**Exercice 2.**

1. (a) On calcule les racines pour déterminer si le trinôme  $-2x^2 + 5x - 1$  admet une forme factorisée.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 25 - 8 = 17$$

$\Delta > 0$  donc le trinôme a deux racines.

$$x' = \frac{-5 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-5 + \sqrt{17}}{-4} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

Comme le trinôme a deux racines, la forme factorisée est  $a(x - x')(x - x'')$  :

$$-2x^2 + 5x - 1 = -2 \left( x - \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \right) \left( x - \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \right)$$

- (b) Les solutions de l'équation  $-2x^2 + 5x - 1 = 0$  sont

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{4}; \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \right\}$$

- (c) On fait le tableau de signe associé à l'équation  $-2x^2 + 5x - 1$ . Comme  $a = -2$  est négatif, le tableau de signe est le suivant :

$x$	$-\infty$	$\frac{5 - \sqrt{17}}{4}$	$\frac{5 + \sqrt{17}}{4}$	$+\infty$	
Signe de $-2x^2 + 5x - 1$	-	0	+	0	-

Conclusion :

Le trinôme est négatif ou nul à l'extérieur des racines, racines incluses.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \right] \cup \left[ \frac{5 + \sqrt{17}}{4}; +\infty \right[.$$

2. **Méthode** : Calculer le discriminant, déterminer les racines s'il y en a, et faire le tableau de signes.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 = -3$$

Comme  $\Delta < 0$ , le trinôme n'a pas de racines. Or  $a = 1$  est positif, donc pour tout  $x$  réel,  $x^2 + 3x + 3 > 0$ . Autrement dit, l'équation  $x^2 + 3x + 3 \leq 0$  n'a pas de solution réelle.  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

3. Même méthode :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$ .

$\Delta < 0$  donc le trinôme n'a pas de racine. Or  $a = 1$  est positif, donc pour tout  $x$  réel,  $x^2 - x + 1 > 0$ . Conclusion : tout nombre réel  $x$  est solution.  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.**

- On note  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 - 7x + 3$  et  $g$  la fonction définie par  $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ .
- Graphiquement, les points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont pour abscisses environ 0,5 et 4.
- Méthode** : Pour déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  associées à  $f$  et à  $g$ , on résout l'équation  $f(x) = g(x)$ . Pour résoudre cette équation, il faut d'abord se ramener à un second membre nul. Ensuite, on peut appliquer le cours.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff x^2 - 7x + 3 = -x^2 + 2x - 1 \\ &\iff x^2 - 7x + 3 - (-x^2 + 2x - 1) = 0 \\ &\iff x^2 - 7x + 3 + x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff 2x^2 - 9x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont les racines du trinôme  $2x^2 - 9x + 4$ . On calcule son discriminant.

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 81 - 32 = 49 = 7^2$$

$\Delta > 0$ , donc le trinôme a deux racines.

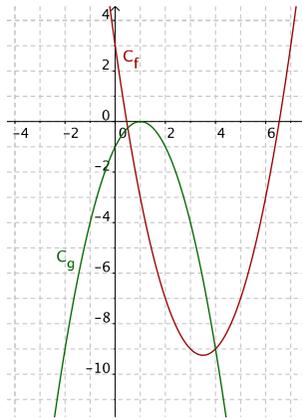
$$x' = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{9+7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

On en déduit que les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et de  $\mathcal{C}_g$  sont  $\frac{1}{2}$  et 4 (ce qui confirme la lecture de la question 2).

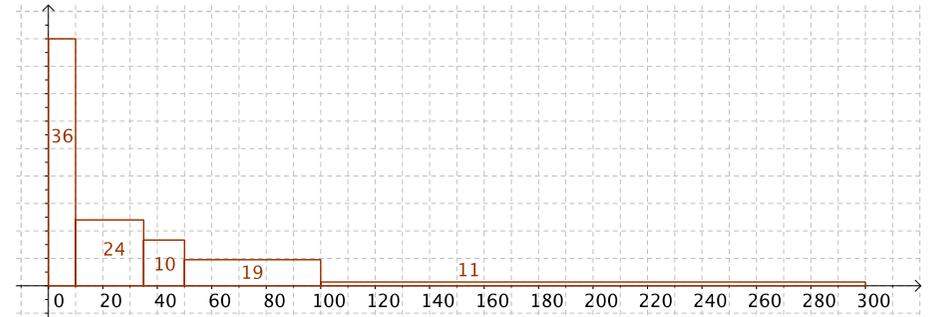
On calcule les ordonnées de ces points :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 7 \times \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(4) = 16 - 7 \times 4 + 3 = -9$$

Les points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et de  $\mathcal{C}_g$  sont les points  $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$  et  $B(4; -9)$ .



2. En utilisant l'histogramme, il devient très clair que les petites entreprises sont très nettement majoritaires en France (ce qui n'était pas évident à lecture du tableau).



### Exercice 5.

1. On sait que la moyenne arithmétique de cinq notes est égale à 12. De plus, dans une série triée de 5 notes, la médiane est la troisième note, et cette note est égale à 13. On cherche alors quatre valeurs  $x, y, z$  et  $t$  telles que

$$\frac{x + y + 13 + z + t}{5} = 12$$

autrement dit  $x + y + 13 + z + t = 60$ , avec  $x$  et  $y$  plus petits que 13, et  $z$  et  $t$  plus grands que 13.

On choisit  $x = 7, y = 8, z = 14, t = 18$ , soit un relevé de notes  $\{7; 8; 13; 14; 18\}$ .

2. Comme la médiane est égale à 12, la troisième note (dans la série ordonnée par ordre croissant) est égale à 12. On sait aussi que la quatrième ou la cinquième note est un 15. Il reste trois notes  $x, y, z$  à déterminer.

Comme la moyenne est égale à 13, on a la condition  $x + y + 12 + 15 + z = 65$ , d'où  $x + y + z = 38$ , avec  $x$  et  $y$  plus petits que 12, et  $z$  plus grand que 12.

On peut avoir  $x = 10, y = 11, z = 17$ . D'où un relevé de notes possible :  $\{10; 11; 12; 15; 17\}$ .

3. La médiane des cinq notes est 12, donc on cherche quatre notes  $x, y, z, t$  telles que  $x + y + 12 + z + t = 40$ . Autrement dit,  $x + y + z + t = 28$ , avec  $x$  et  $y$  plus petits que 12 et  $z$  et  $t$  plus grands que 12.

$z$  et  $t$  sont plus grands que 12, donc  $z + t \geq 24$ , mais la somme  $x + y + z + t$  ne doit pas dépasser 28. Il faut donc choisir  $z$  et  $t$  pas beaucoup plus grands que 12 (ils peuvent être égaux à 12), et  $x$  et  $y$  très petits. On peut prendre  $x = 0, y = 3, z = 12, t = 13$ .

Le relevé de notes  $\{0; 3; 12; 12; 13\}$  ainsi constitué répond à la question, puisque sa médiane est 12, et la moyenne est  $\frac{0 + 3 + 12 + 12 + 13}{5} = 8$ .

### Exercice 4.

1. Pour construire l'histogramme, on complète le tableau :

- D'après l'échelle donnée par l'énoncé, un carreau représente 4 %. L'aire, en carreaux, de chaque rectangle correspond donc à l'effectif en pourcentage, divisé par 4.
- On précise l'amplitude de chaque classe (amplitude entre la plus grande et la plus petite valeur). Attention, la largeur de la dernière classe est égale à 200, c'est-à-dire que la dernière classe représente les exploitations agricoles dont la surface est comprise entre 100 et 300 hectares.
- On fixe une largeur en carreaux  $L$  associée à chaque rectangle. Pour faire simple, on fixe un carreau pour 10 hectares.
- On en déduit la hauteur du rectangle, en carreaux, correspondant à chaque classe. C'est l'aire (le nombre de carreaux) divisée par la largeur  $L$ , en carreaux.

Surface (ha)	< 10	[10; 35[	[35; 50[	[50; 100[	[100; 300[
Quantité en %	36	24	10	19	11
Aire $\mathcal{A}$ en carreaux	9	6	2,5	4,75	2,75
Amplitude	10	25	15	50	200
Largeur $L$ en carreaux	1	2,5	1,5	5	20
Hauteur $h = \frac{\mathcal{A}}{L}$ en carreaux	9	2,4	1,7	0,95	0,13