

Exercice 1.

On note x le plus petit côté (un des côtés de l'angle droit). L'autre côté de l'angle droit est égal à $x + 3$, et l'hypoténuse mesure 3 cm de plus que $x + 3$, donc $x + 6$.

Comme le triangle est rectangle, on sait que le théorème de Pythagore est vérifié. Donc

$$x^2 + (x + 3)^2 = (x + 6)^2$$

On développe tout :

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 12x + 36$$

et on se ramène à une équation à second membre nul

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 12x + 36) = 0$$

et on simplifie

$$x^2 - 6x - 27 = 0.$$

Le nombre x (positif, puisque c'est un longueur) doit vérifier cette équation pour que la configuration de l'énoncé soit possible. On cherche les racines du trinôme du second degré.

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-27) = 36 + 108 = 144$$

On a $\Delta > 0$, donc le trinôme a deux racines. Et $\Delta = 144 = 12^2$, ce qui nous permet de calculer plus facilement les racines :

$$x' = \frac{6 - 12}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{6 + 12}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

La seule solution convenable est $x = 9$ car il faut que x soit positif.

Conclusion : Les côtés du triangle mesurent 9 cm , 12 cm et 15 cm .

On vérifie que

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$$

Donc le triangle est bien rectangle.

Ne pas oublier de faire une figure.

Exercice 2.

1. (a) On calcule les racines pour déterminer si le trinôme $-2x^2 + 5x - 1$ admet une forme factorisée.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 25 - 8 = 17$$

$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines.

$$x' = \frac{-5 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-5 + \sqrt{17}}{-4} = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

Comme le trinôme a deux racines, la forme factorisée est $a(x - x')(x - x'')$:

$$-2x^2 + 5x - 1 = -2 \left(x - \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \right)$$

- (b) Les solutions de l'équation $-2x^2 + 5x - 1 = 0$ sont

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{4}; \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \right\}$$

- (c) On fait le tableau de signe associé à l'équation $-2x^2 + 5x - 1$. Comme $a = -2$ est négatif, le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5 - \sqrt{17}}{4}$	$\frac{5 + \sqrt{17}}{4}$	$+\infty$	
Signe de $-2x^2 + 5x - 1$	$-$	\emptyset	$+$	\emptyset	$-$

Conclusion :

Le trinôme est négatif ou nul à l'extérieur des racines, racines incluses.

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{17}}{4}; +\infty \right[.$$

2. **Méthode** : Calculer le discriminant, déterminer les racines s'il y en a, et faire le tableau de signes.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 = -3$$

Comme $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines. Or $a = 1$ est positif, donc pour tout x réel, $x^2 + 3x + 3 > 0$. Autrement dit, l'équation $x^2 + 3x + 3 \leq 0$ n'a pas de solution réelle. $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. Même méthode : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$.

$\Delta < 0$ donc le trinôme n'a pas de racine. Or $a = 1$ est positif, donc pour tout x réel, $x^2 - x + 1 > 0$. Conclusion : tout nombre réel x est solution. $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 3.

- On note f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 7x + 3$ et g la fonction définie par $g(x) = -x^2 + 2x - 1$.
- Graphiquement, les points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont pour abscisses environ 0,5 et 4.
- Méthode** : Pour déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g associées à f et à g , on résout l'équation $f(x) = g(x)$. Pour résoudre cette équation, il faut d'abord se ramener à un second membre nul. Ensuite, on peut appliquer le cours.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff x^2 - 7x + 3 = -x^2 + 2x - 1 \\ &\iff x^2 - 7x + 3 - (-x^2 + 2x - 1) = 0 \\ &\iff x^2 - 7x + 3 + x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff 2x^2 - 9x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont les racines du trinôme $2x^2 - 9x + 4$. On calcule son discriminant.

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 81 - 32 = 49 = 7^2$$

$\Delta > 0$, donc le trinôme a deux racines.

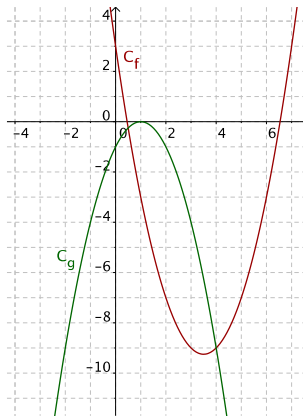
$$x' = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{9+7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

On en déduit que les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f et de \mathcal{C}_g sont $\frac{1}{2}$ et 4 (ce qui confirme la lecture de la question 2).

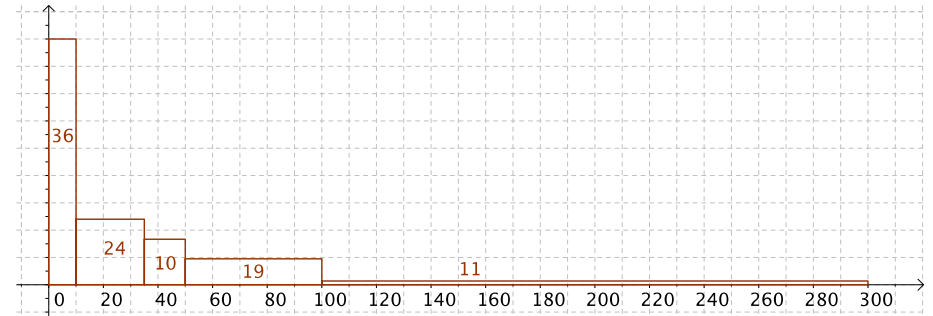
On calcule les ordonnées de ces points :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 7 \times \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(4) = 16 - 7 \times 4 + 3 = -9$$

Les points d'intersection de \mathcal{C}_f et de \mathcal{C}_g sont les points $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ et $B(4; -9)$.



2. En utilisant l'histogramme, il devient très clair que les petites entreprises sont très nettement majoritaires en France (ce qui n'était pas évident à lecture du tableau).



Exercice 5.

1. On sait que la moyenne arithmétique de cinq notes est égale à 12. De plus, dans une série triée de 5 notes, la médiane est la troisième note, et cette note est égale à 13. On cherche alors quatre valeurs x, y, z et t telles que

$$\frac{x + y + 13 + z + t}{5} = 12$$

autrement dit $x + y + 13 + z + t = 60$, avec x et y plus petits que 13, et z et t plus grands que 13.

On choisit $x = 7, y = 8, z = 14, t = 18$, soit un relevé de notes $\{7; 8; 13; 14; 18\}$.

2. Comme la médiane est égale à 12, la troisième note (dans la série ordonnée par ordre croissant) est égale à 12. On sait aussi que la quatrième ou la cinquième note est un 15. Il reste trois notes x, y, z à déterminer.

Comme la moyenne est égale à 13, on a la condition $x + y + 12 + 15 + z = 65$, d'où $x + y + z = 38$, avec x et y plus petits que 12, et z plus grand que 12.

On peut avoir $x = 10, y = 11, z = 17$. D'où un relevé de notes possible : $\{10; 11; 12; 15; 17\}$.

3. La médiane des cinq notes est 12, donc on cherche quatre notes x, y, z, t telles que $x + y + 12 + z + t = 40$. Autrement dit, $x + y + z + t = 28$, avec x et y plus petits que 12 et z et t plus grands que 12.

z et t sont plus grands que 12, donc $z + t \geq 24$, mais la somme $x + y + z + t$ ne doit pas dépasser 28. Il faut donc choisir z et t pas beaucoup plus grands que 12 (ils peuvent être égaux à 12), et x et y très petits. On peut prendre $x = 0, y = 3, z = 12, t = 13$.

Le relevé de notes $\{0; 3; 12; 12; 13\}$ ainsi constitué répond à la question, puisque sa médiane est 12, et la moyenne est $\frac{0 + 3 + 12 + 12 + 13}{5} = 8$.

Exercice 4.

1. Pour construire l'histogramme, on complète le tableau :

- D'après l'échelle donnée par l'énoncé, un carreau représente 4 %. L'aire, en carreaux, de chaque rectangle correspond donc à l'effectif en pourcentage, divisé par 4.
- On précise l'amplitude de chaque classe (amplitude entre la plus grande et la plus petite valeur). Attention, la largeur de la dernière classe est égale à 200, c'est-à-dire que la dernière classe représente les exploitations agricoles dont la surface est comprise entre 100 et 300 hectares.
- On fixe une largeur en carreaux L associée à chaque rectangle. Pour faire simple, on fixe un carreau pour 10 hectares.
- On en déduit la hauteur du rectangle, en carreaux, correspondant à chaque classe. C'est l'aire (le nombre de carreaux) divisée par la largeur L , en carreaux.

Surface (ha)	< 10	[10; 35[[35; 50[[50; 100[[100; 300[
Quantité en %	36	24	10	19	11
Aire \mathcal{A} en carreaux	9	6	2,5	4,75	2,75
Amplitude	10	25	15	50	200
Largeur L en carreaux	1	2,5	1,5	5	20
Hauteur $h = \frac{\mathcal{A}}{L}$ en carreaux	9	2,4	1,7	0,95	0,13