

## Exercice 1.

On a :

$$\vec{u} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UH}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{HF} \quad (\text{réordonnement})$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{HF} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{RH} + \overrightarrow{HF} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{RF} \quad (\text{relation de Chasles})$$

et

$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$$

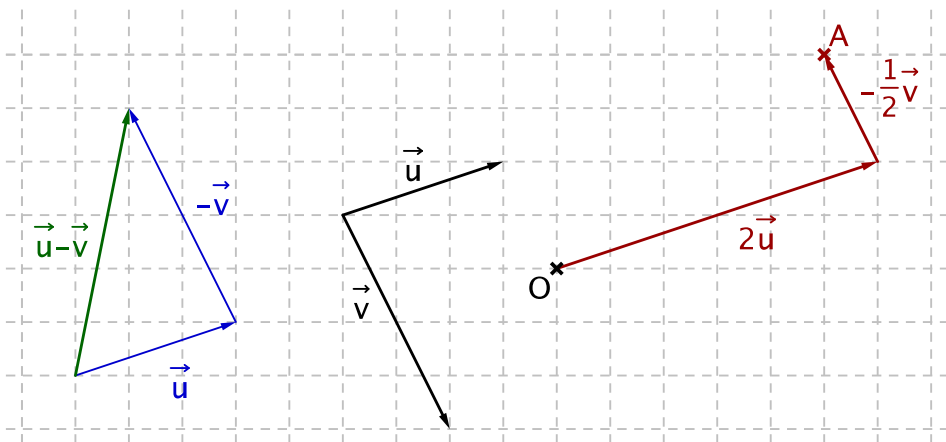
$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AB} \quad (\text{vecteurs opposés})$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} \quad (\text{réordonnement})$$

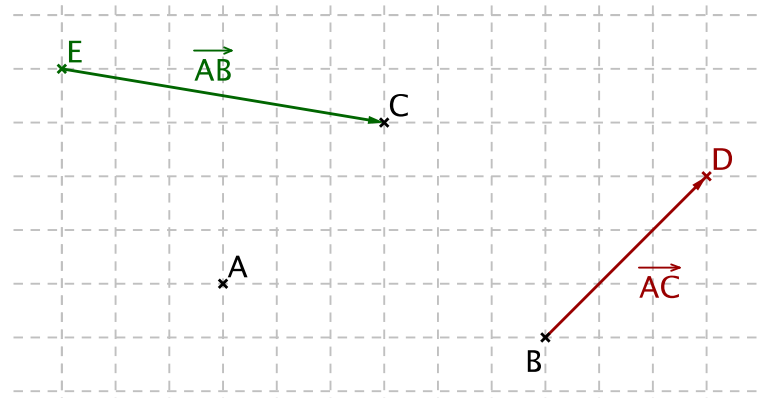
$$\vec{v} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{relation de Chasles})$$

## Exercice 2.



1.



2. (a)   
 (b) Démontrer que  $C$  est le milieu de  $[ED]$ . D'après la première égalité, on sait que  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ , donc le quadrilatère  $ABCD$  est un parallélogramme. On en déduit qu'on a une autre égalité de vecteurs :  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ . Or, d'après la deuxième égalité, on a  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$ . Ainsi,  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$  puisque ces deux vecteurs sont tous deux égaux à  $\overrightarrow{AB}$ . Or, l'égalité  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$  traduit le fait que  $C$  est le milieu de  $[ED]$ . CQFD.

## Exercice 3.

Comme  $ABCD$  est un parallélogramme, on sait que :

- a)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$   
 b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  (règle du parallélogramme).  
 c)  $O$  est le milieu de  $[AC]$  et de  $[BD]$ ,  
 ce qui se traduit par  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ .

On calcule :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC} && (\text{factorisation par 2}) \\ &= 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} && (\text{règle du parallélogramme}) \\ &= \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AO} && (\text{car } O \text{ milieu de } [AC]) \end{aligned}$$

Finalement, on a bien démontré l'égalité demandée.

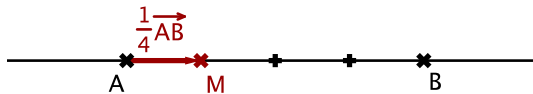
#### Exercice 4.

1. On réécrit la relation  $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$  en faisant intervenir le point  $A$  dans le deuxième terme, à l'aide de la relation de Chasles :  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ . On obtient :

$$\begin{aligned}
 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\
 \text{c'est-à-dire : } 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\
 4\overrightarrow{MA} &= -\overrightarrow{AB} \\
 -4\overrightarrow{AM} &= -\overrightarrow{AB} \\
 4\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} \\
 \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

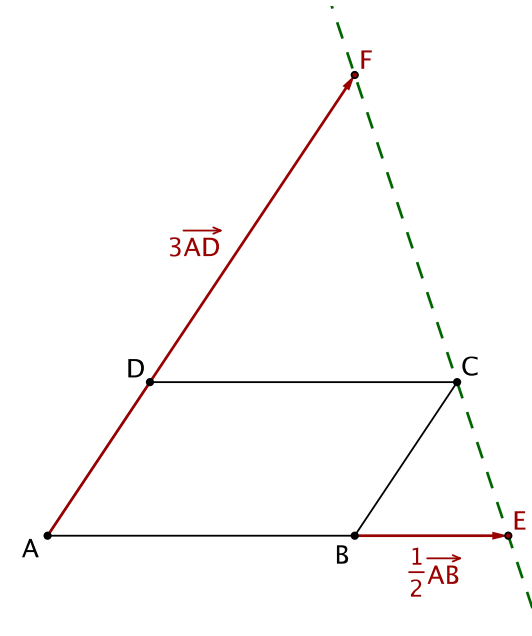
Ainsi, le point  $M$  se situe au quart du segment  $[AB]$ , en partant de  $A$  et en allant vers  $B$ .

2.



#### Exercice 5.

1. Figure :



2. D'après la relation de Chasles, on a  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$ . Or, comme  $ABCD$  est un parallélogramme,  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ . De plus,  $\overrightarrow{BE}$  est donné par l'énoncé. On a donc :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

D'autre part, toujours par la relation de Chasles, on a

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$$

Or,  $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$  par définition de  $E$ , et  $\overrightarrow{AF}$  est donné par l'énoncé en fonction de  $\overrightarrow{AD}$ . On a donc :

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} \quad (\text{CQFD})$$

3. On remarque que

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}\right) = -3\overrightarrow{CE}$$

Ainsi,  $\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{CE}$ .

4. D'après la question précédente, les vecteurs  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{CE}$  sont colinéaires.

On en déduit que les points  $C$ ,  $E$  et  $F$  sont alignés.