

**Question de cours**

La réunion des événements A et B, notée  $A \cup B$ , est l'ensemble des issues qui réalisent l'un ou l'autre des événements A ou B (incluant les issues qui réalisent les deux événements). On a

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

**Exercice 1.**

On résout par la méthode d'addition. On cherche à éliminer l'inconnue  $y$ . Pour cela, on multiplie la deuxième équation par 2.

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = -5 \quad \times 2 \end{cases} \quad \oplus \quad \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 6x + 2y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7x &= -14 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

On reprend la deuxième équation pour exprimer  $y$  en fonction de  $x$ .

$$y = -5 - 3x = -5 + 6 = 1$$

donc

$$\mathcal{S} = \{(-2; 1)\}$$

**Exercice 2.**

1. L'univers correspond à chacune des 32 cartes du jeu : 8 cartes de pique du 7 à l'as, 8 cartes de trèfle, 8 cartes de carreau, 8 cartes de cœur.

Toutes les éventualités sont équiprobables puisqu'on tire la carte au hasard.

Comme il y a 32 cartes, la probabilité de chacune des issues est  $\frac{1}{32}$ .

2. – Il y a une seule carte correspondant au roi de cœur, donc

$$p(A) = \frac{1}{32}$$

– Il y a 16 cartes rouges, donc

$$p(B) = \frac{\text{nombre de cartes rouges}}{\text{nombre total de cartes}} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

– Il y a 4 as dans le jeu, donc

$$p(C) = \frac{\text{nombre d'as}}{\text{nombre total de cartes}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

– L'événement D correspond à  $B \cup C$ , donc

$$p(D) = p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C)$$

Or, l'événement  $B \cap C$  correspond à l'événement : « la carte tirée est un as rouge », qui est réalisé par deux issues : obtenir l'as de cœur, ou obtenir l'as de carreau. On a donc  $p(B \cap C) = \frac{2}{32}$ . Donc

$$p(D) = \frac{16}{32} + \frac{4}{32} - \frac{2}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

**Exercice 3.**

1. Il y a 6 façons différentes pour rendre les clés : il y a trois possibilités pour la clé que l'on peut donner au premier locataire, deux possibilités pour la clé que l'on peut donner au deuxième locataire (les deux clés restantes, puisque l'une a déjà été donnée au premier locataire), et une seule possibilité pour la clé à donner au troisième locataire : celle qui reste. Ce qui fait  $3 \times 2 \times 1 = 6$  possibilités.

Détaillons ces 6 possibilités pour mieux comprendre. Si on nomme  $C_1, C_2, C_3$  les clés respectives des locataires  $L_1, L_2, L_3$ , on peut avoir les répartitions suivantes :

$$\begin{array}{cc} L_1 & C_1 \\ L_2 & C_2 \\ L_3 & C_3 \end{array} \quad \begin{array}{cc} L_1 & C_1 \\ L_2 & C_3 \\ L_3 & C_2 \end{array} \quad \begin{array}{cc} L_1 & C_2 \\ L_2 & C_1 \\ L_3 & C_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} L_1 & C_2 \\ L_2 & C_3 \\ L_3 & C_1 \end{array} \quad \begin{array}{cc} L_1 & C_3 \\ L_2 & C_1 \\ L_3 & C_2 \end{array} \quad \begin{array}{cc} L_1 & C_3 \\ L_2 & C_2 \\ L_3 & C_1 \end{array}$$

2. Non, cela n'est pas possible. En effet, si les deux premiers locataires retrouvent chacun leur clé, cela signifie que la clé restante est forcément la clé du troisième locataire (puisque les deux premiers locataires ont la leur). Il est donc impossible qu'exactement deux locataires retrouvent leur clé et pas le troisième.

3. – Il y a une seule façon de rendre correctement les trois clés, parmi 6 possibilités en tout. Donc

$$p(F) = \frac{1}{6}$$

- Il y a trois possibilités pour qu'un seul des locataires retrouve sa clé : soit c'est le premier, soit c'est le deuxième, soit c'est le troisième. Une fois choisi le locataire qui retrouve sa clé, on n'a plus le choix pour attribuer les clés restantes : il faut obligatoirement échanger les clés des locataires restants. Donc

$$p(G) = \frac{\text{nombre de situations réalisant } G}{\text{nombre total de situations}} = \frac{3}{6}$$

donc

$$p(G) = \frac{1}{2}$$

- L'événement H est l'événement complémentaire de l'événement : « au moins un des locataires retrouve sa clé », qui correspond à la réunion de F et G. Or F et G sont incompatibles, donc

$$p(F \cup G) = p(F) + p(G) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Donc

$$p(H) = 1 - p(F \cup G) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p(H) = \frac{1}{3}$$

#### Exercice 4.

1. Oui on se trouve dans une situation d'équiprobabilité, car chaque boule a la même probabilité d'être tirée (on tire au hasard et les boules sont indiscernables les unes des autres).

Comme il y a 24 boules au total, la probabilité d'un événement élémentaire est

égale à  $\frac{1}{24}$ .

2. Il y a 4 résultats possibles correspondant aux quatre couleurs.  $E = \{\text{jaune; rouge; vert; bleu}\}$ , ou en abrégé,  $E = \{J; R; V; B\}$ .
3. – Il y a 9 boules jaunes, donc

$$p(F) = \frac{\text{nombre de boules jaunes}}{\text{nombre total de boules}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

- Il y a 7 boules rouges et 5 boules vertes, qui sont incompatibles, donc au total 12 boules qui sont soit rouges soit vertes. Donc

$$p(G) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

- Aucune des couleurs présentes dans l'urne ne correspond au noir, donc l'événement H est l'événement certain.

$$p(H) = 1$$

- L'événement K correspond à l'événement : « la boule tirée est rouge ou bleue ». Il y a 10 boules qui sont soit rouges, soit bleues (7 rouges et 3 bleues). Donc

$$p(K) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

4. (a) L'univers est désormais :

$$E = \{J_1; \dots; J_9; R_1; \dots; R_7; V_1; \dots; V_5; B_1; B_2; B_3\}$$

Il y a 24 issues différentes puisque toutes les boules sont désormais identifiables.

- (b) – Les boules portant un numéro supérieur ou égal à 5 sont les boules : jaunes numérotées de 5 à 9 (5 boules), rouges numérotées de 5 à 7 (3 boules), ou verte numérotée 5. Il n'y a pas de boule bleue concernée. Il y a donc 9 boules réalisant l'événement L. Donc

$$p(L) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

- Les boules portant un nombre impair sont au nombre de 14 : 5 boules jaunes impaires, 4 boules rouges impaires, 3 boules vertes impaires, 2 boules bleues impaires. Donc

$$p(M) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

- L'événement N correspond à  $\{\text{vert}\} \cup \{\text{pair}\}$ . On sait que

$$p(\{\text{vert}\} \cup \{\text{pair}\}) = p(\{\text{vert}\}) + p(\{\text{pair}\}) - p(\{\text{vert}\} \cap \{\text{pair}\})$$

Or la probabilité de tirer une boule verte est égale à  $p(\text{vert}) = \frac{5}{24}$  puisqu'il y a 5 boules vertes.

La probabilité de tirer un numéro pair est  $p(\{\text{pair}\}) = \frac{10}{24}$  puisqu'il y a 10 boules paires.

La probabilité de tirer une boule verte et portant un numéro pair est égale à  $p(\{\text{vert}\} \cap \{\text{pair}\}) = \frac{2}{24}$  (cela peut être la boule  $V_2$  ou la boule  $V_4$ ).

Finalement,

$$p(N) = \frac{5}{24} + \frac{10}{24} - \frac{2}{24} = \frac{13}{24}$$