

Exercice 1.

- $f(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 5 = 4x^2 - 12x + 4$
- $f(x) = \left[2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right]^2 - 5 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 5$. Ceci est la forme canonique de f .
 f est une fonction du second degré, sa courbe est une parabole tournée vers le bas. La fonction f admet donc un minimum, atteint en $x = \frac{3}{2}$. La valeur de ce minimum est 5.

Exercice 2.

- Pour un taux d'occupation de 40 %, le bénéfice est égal à 900 euros, ce qui signifie que $B(40) = 900$. On en déduit la valeur de c , car $B(40) = -40^2 + 160 \times 40 + c = -1\,600 + 6\,400 + c$. D'où l'équation

$$-1\,600 + 6\,400 + c = 900$$

$$c = 900 + 1\,600 - 6\,400$$

donc $c = -3\,900$. L'expression du bénéfice en fonction du taux d'occupation est alors

$$B(x) = -x^2 + 160x - 3\,900$$

- La fonction B est une fonction du second degré du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 160$ et $c = -3\,900$. Comme a est négatif, la fonction admet un maximum. Ce maximum est atteint en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{160}{-2} = 80$$

et vaut

$$B(80) = -80^2 + 160 \times 80 - 3\,900 = -6\,400 + 12\,800 - 3\,900 = 2\,500$$

D'où le tableau de variations de B :

x	20	80	90
B	-1 100	2 500	2 400

- D'après ce qui précède, le bénéfice est maximal lorsque $x = 80$, c'est-à-dire lorsque le taux d'occupation est égal à 80 %.

Le bénéfice maximum réalisé est $B(80) = 2\,500$ €.

Exercice 3.

- Pour commencer, étudions la fonction f . C'est une fonction du second degré. On sait que sa courbe représentative est une parabole, tournée vers le bas car $a = 1$ est positif, donc f admet un minimum. Comme la fonction est donnée sous la forme canonique, on lit directement que son minimum est atteint en $x = 1$, et qu'il vaut 2. Cela correspond à la courbe \mathcal{C}_3 .
- La fonction g est aussi une fonction du second degré, elle est donnée sous sa forme développée. $a = 1$ donc g admet un minimum, qui est atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0$. Le minimum vaut $g(0) = 2$. La fonction g est donc représentée par la courbe \mathcal{C}_2 .
- La fonction h est une fonction du second degré, qui admet un maximum car $a = -1$ est négatif. h est donc représentée par la courbe \mathcal{C}_1 . On vérifie : le maximum de h est atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$. Il vaut $h(1) = -1 + 2 + 3 = 4$. Ces deux informations correspondent bien à \mathcal{C}_1 .

Exercice 4.

- Pour comparer $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}-3}$, on compare d'abord $\sqrt{5}+2$ et $\sqrt{5}-3$. Or $\sqrt{5}+2$ est positif alors que $\sqrt{5}-3$ est négatif. Donc comme les nombres et leur inverse sont de même signe,

$$\frac{1}{\sqrt{5}+2} > \frac{1}{\sqrt{5}-3}$$

(un nombre positif est toujours plus grand qu'un nombre négatif).

- Pour comparer $\frac{1}{x^2+2}$ et $\frac{1}{x^2+1}$, on compare d'abord x^2+2 et x^2+1 . On sait que $x^2+2 > x^2+1$. De plus, ces deux nombres sont positifs, puisque x^2 est positif ou nul. Donc comme la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, on a

$$\frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{x^2+1}$$

Exercice 5.

- $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$ équivaut à x négatif (puisque dans ce cas, $\frac{1}{x}$ est négatif, donc plus petit que $\frac{3}{4}$) ou x positif et $x \geq \frac{1}{\frac{3}{4}}$, c'est-à-dire $x \geq \frac{4}{3}$.

Or $x < 0$ équivaut à $x \in]-\infty; 0[$, et $x \geq \frac{4}{3}$ équivaut à $x \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$.

Un nombre x est solution s'il vérifie l'une ou l'autre condition, donc s'il appartient à la réunion de ces deux intervalles.

$$\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{4}{3}; +\infty \right[$$

2. $\frac{1}{x} \leq -3$ équivaut à x négatif et $x \geq \frac{1}{-3}$, c'est-à-dire $x > 0$ et $x \geq -\frac{1}{3}$.

Pour que les deux conditions soient vérifiées simultanément, il faut que

$$x \in]-\infty; 0[\text{ et } x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty \right[, \text{ donc } x \text{ appartient à l'intersection de ces deux}$$

intervalles, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{3}; 0 \right[$.

3. $\frac{1}{x} > -2$ équivaut à x positif, ou x négatif et $x < \frac{1}{-2}$, c'est-à-dire x positif ou $x < -\frac{1}{2}$.

Pour que x soit solution, il doit vérifier l'une ou l'autre des deux conditions, donc soit $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$, soit $x \in]0; +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[$$

Exercice 6.

1. La fonction f est définie lorsque son dénominateur est non nul, c'est-à-dire $x+2 \neq 0$. Or, $x+2 = 0$ équivaut à $x = -2$. Donc la valeur interdite de f est -2 . Donc l'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$$

La fonction g est définie lorsque son dénominateur est non nul, c'est-à-dire

$$2-3x \neq 0. \text{ Or, } 2-3x = 0 \text{ équivaut à } -3x = -2, \text{ qui équivaut à } x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Donc la valeur interdite de h est $\frac{2}{3}$. Donc l'ensemble de définition de h est

$$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} =]-\infty; \frac{2}{3}[\cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$$

2. On part de l'expression du membre de droite, qu'on réduit au même dénominateur :

$$1 - \frac{3}{x+2} = \frac{1(x+2)}{x+2} - \frac{3}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = \frac{x-1}{x+2} = f(x)$$

Donc une autre expression de $f(x)$ est effectivement $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$.

On fait le même travail avec l'expression proposée pour g :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} - \frac{1}{3(2-3x)} &= -\frac{2-3x}{3(2-3x)} - \frac{1}{3(2-3x)} \\ &= \frac{-(2-3x)-1}{3(2-3x)} \\ &= \frac{-2+3x-1}{3(2-3x)} \\ &= \frac{3x-3}{3(2-3x)} \\ &= \frac{x-1}{2-3x} \quad (\text{en simplifiant par } 3) \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3(2-3x)} &= g(x) \end{aligned}$$

Donc une autre expression de $g(x)$ est $g(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3(2-3x)}$.