

Exercice 1.

On réécrit d'abord les termes concernant les opposés de vecteurs, puis on réorganise les termes de manière à pouvoir appliquer la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{SI} - \overrightarrow{RB} \\
 &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{BR} \quad (\text{vecteurs opposés}) \\
 &= \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CA} \\
 &= \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CA} \quad (\text{relation de Chasles}) \\
 &= \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CA} \quad (\text{relation de Chasles}) \\
 &= \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CA} \quad (\text{relation de Chasles}) \\
 &= \overrightarrow{SA} \quad (\text{relation de Chasles})
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{SA}}$.

Exercice 2.

On note O le centre du cercle \mathcal{C} . Comme $[AC]$ est un diamètre de \mathcal{C} , O est le milieu de $[AC]$. Pour la même raison, O est le milieu de $[BD]$. Le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ qui ont même milieu (le point O) : c'est donc un parallélogramme.

Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Remarque : On peut redémontrer ce dernier résultat à l'aide de la relation de Chasles. Le raisonnement est alors le suivant :

Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a l'égalité de vecteurs $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. D'où $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. CQFD. \square

Exercice 3.

On applique la règle du parallélogramme aux vecteurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ (voir figure).

Exercice 4.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

d'après la relation de Chasles, donc le point M est confondu avec le point C .

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

donc d'après la règle du parallélogramme, le quadrilatère $ABNC$ est un parallélogramme, ce qui permet de placer le point N .

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

On définit le point intermédiaire R tel que $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{CB}$ (le point R correspond en réalité au point Q de la question suivante). Alors, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AR}$ et on applique la règle du parallélogramme : le quadrilatère $ARPB$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

On a $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{CB}$, donc le quadrilatère $AQCB$ est un parallélogramme.

Exercice 5.

1. $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}$, donc le point C est construit à l'aide de la règle du parallélogramme : le quadrilatère $IACM$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}$: de la même manière, le quadrilatère $IBDM$ est un parallélogramme.

2. D'après la règle du parallélogramme, les quadrilatères $AIMC$ et $IBDM$ sont des parallélogrammes.

3. $AIMC$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{IA}$.

D'autre part, $IBDM$ est aussi un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DM}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{BI} && (\text{IBDM parallélogramme}) \\
 &= \overrightarrow{IA} && (I \text{ milieu de } [AB]) \\
 &= \overrightarrow{MC} && (\text{AIMC parallélogramme})
 \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MC}$, on en déduit que M est le milieu de $[DM]$. \square

4. Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. On remplace dans la définition du point C :

$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BM}$$

en utilisant la relation de Chasles pour la dernière égalité. On a donc bien montré que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BM}$.

5. (a) Comme E le symétrique de I par rapport à M , on peut dire que M est le milieu du segment $[EI]$, donc en vecteurs : $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ME}$.

(b) On calcule :

$$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IM}$$

Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ comme I est le milieu de $[AB]$.

Par ailleurs, $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{IE}$.

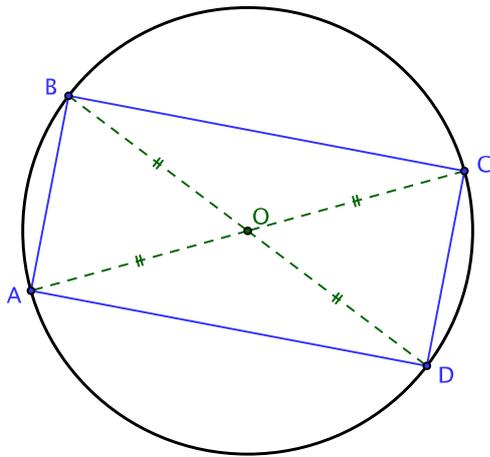
Donc

$$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IE} \quad (\text{CQFD})$$

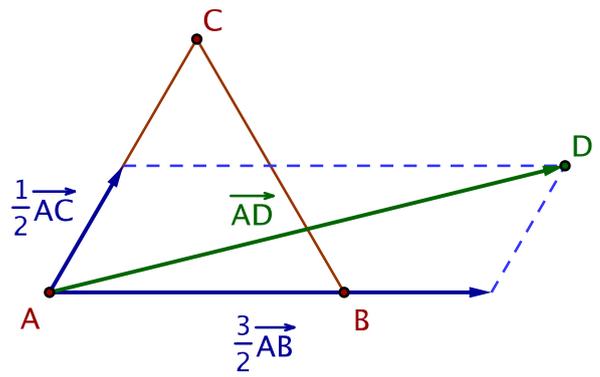
\square

Exercice 1.

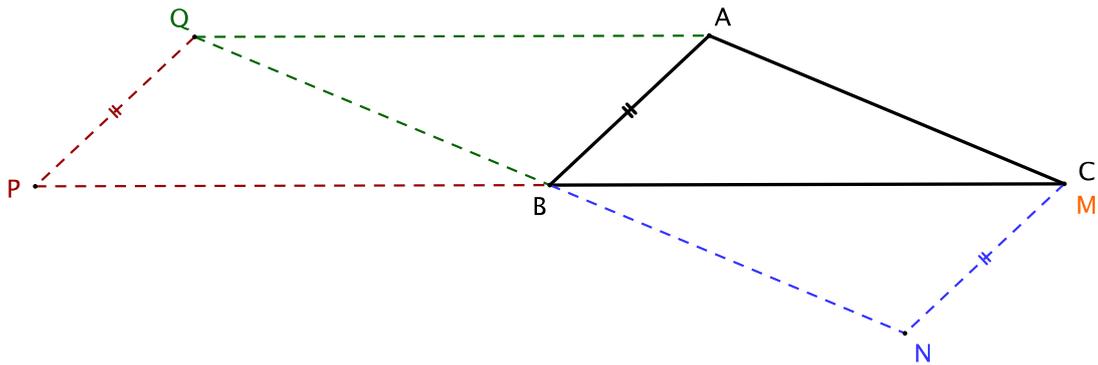
Exercice 2.



Exercice 3.



Exercice 4.



Exercice 5.

