

Exercice 1.

Pour déterminer si deux droites sont parallèles, il faut comparer leurs coefficients directeurs respectifs. Le cours indique que le coefficient directeur de (AB) est donné par $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, et celui de (CD) est donné par $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$. On applique ces expressions dans chacun des trois cas de figure.

$$1. (AB) \text{ a pour coefficient directeur : } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$(CD) \text{ a pour coefficient directeur : } \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{27 - 12}{10 - (-5)} = \frac{15}{15} = 1.$$

Conclusion : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$$2. (AB) \text{ a pour coefficient directeur : } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 6}{6 - (-2)} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

$$(CD) \text{ a pour coefficient directeur : } \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3 - (-12)}{-10 - 10} = \frac{15}{-20} = -\frac{3}{4}.$$

Conclusion : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$$3. (AB) \text{ a pour coefficient directeur : } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{1,3 - 0,8} = \frac{2}{0,5} = 4.$$

$$(CD) \text{ a pour coefficient directeur : } \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3,1 - 1,9}{5,3 - 5} = \frac{1,2}{0,3} = 4.$$

Conclusion : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 2.

Deux droites sont sécantes lorsque leurs coefficients directeurs sont différents.

1. Le coefficient directeur de Δ est 1, le coefficient directeur de Δ' est -3 : les deux droites sont donc sécantes, en un point qu'on appelle A .

Pour déterminer l'abscisse de A , on résout

$$x - 1 = -3x + 3$$

$$x + 3x = 3 + 1$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

Ainsi, $x_A = 1$. On obtient ensuite y_A en écrivant que le point A appartient à Δ , donc ses coordonnées $(x_A; y_A)$ vérifient l'équation de Δ .

$$y_A = x_A - 1 = 1 - 1 = 0$$

Finalement, le point A a pour coordonnées $(1; 0)$.

2. Le coefficient directeur de Δ est 5, le coefficient directeur de Δ' est -2 : les deux droites sont donc sécantes, en un point qu'on appelle B .

On résout

$$5x - 1 = -2x$$

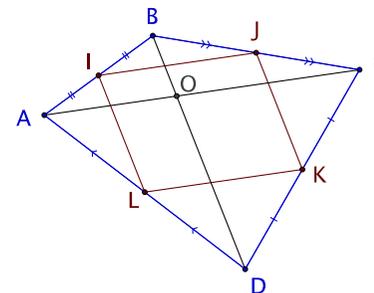
$$5x + 2x = 1$$

$$7x = 1$$

$$x = \frac{1}{7}$$

$$\text{Donc } x_B = \frac{1}{7}. \text{ Puis } y_B = 5x_B - 1 = 5 \times \frac{1}{7} - 1 = \frac{5}{7} - \frac{7}{7} = -\frac{2}{7}.$$

Le point B a pour coordonnées $(\frac{1}{7}; -\frac{2}{7})$.

Exercice 3.

1. Figure :

2. On applique le théorème des milieux dans un triangle, dans le triangle ABC , puis dans le triangle ACD .

Dans le triangle ABC ,

$$\left. \begin{array}{l} I \text{ est le milieu de } [AB] \\ J \text{ est le milieu de } [BC] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Le théorème des milieux assure que } (IJ) \text{ est parallèle à } (AC), \text{ et } IJ = \frac{1}{2}AC.$$

Dans le triangle ACD ,

$$\left. \begin{array}{l} L \text{ est le milieu de } [AD] \\ K \text{ est le milieu de } [CD] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Le théorème des milieux assure que } (KL) \text{ est parallèle à } (AC), \text{ et } KL = \frac{1}{2}AC.$$

Les droites (IJ) et (KL) sont toutes deux parallèles à la droite AC , elles sont donc parallèles entre elles. Donc $(IJ) \parallel (KL)$.

On a $IJ = \frac{1}{2}AC$ et $KL = \frac{1}{2}AC$, donc $IJ = KL$.

Le quadrilatère $IJKL$ a deux côtés opposés, $[IJ]$ et $[KL]$, qui sont parallèles et égaux. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme. CQFD □

Exercice 4.

L'énoncé affirme que $ABCD$ est un parallélogramme. Ce sera un losange si, et seulement si, on peut démontrer l'une des deux propriétés suivantes :

- ses diagonales sont perpendiculaires ;
- le quadrilatère a deux côtés consécutifs égaux.

On teste si les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires en appliquant le théorème de Pythagore.

$$AB^2 = (4\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$$

et

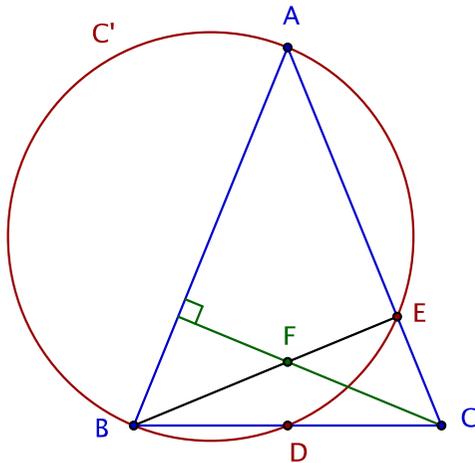
$$OA^2 + OB^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

On a $AB^2 = OA^2 + OB^2$, donc d'après le théorème de Pythagore, le triangle AOB est rectangle en O . On peut alors en déduire que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

Le parallélogramme $ABCD$ a ses diagonales (AC) et (BD) qui sont perpendiculaires, donc c'est un losange.

Exercice 5.

1. Figure contenant les informations de l'énoncé :



2. (a) $[AB]$ est un diamètre du cercle \mathcal{C} , et E est un point de \mathcal{C} , donc on peut affirmer que le triangle AEB est rectangle en E .
Le point D est également un point de \mathcal{C} , donc pour la même raison, le triangle ABD est rectangle en D .

- (b) D'après les résultats de la question précédente, la droite (BE) est perpendiculaire à (AE) . Comme le point E se trouve sur la droite (AC) , les droites (AE) et (AC) sont confondues, donc (BE) est en fait perpendiculaire à (AC) . Or le point E appartient à la droite (AC) . On en conclut que (BE) est la hauteur issue de B dans le triangle ABC .

Par ailleurs, F appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par C , c'est-à-dire par définition la hauteur issue de C .

Le point F appartient donc à la hauteur issue de C , et à (BE) qui est la hauteur issue de B . F est ainsi le point d'intersection de deux des trois hauteurs du triangle ABC : c'est donc l'orthocentre du triangle ABC .

- (c) Comme le triangle ABD est rectangle en D , on sait que (AD) est perpendiculaire à (BD) . On a en fait (AD) perpendiculaire à (BC) puisque B , C et D sont alignés. De plus, D appartient à (BC) , donc (AD) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

Comme le triangle ABC est isocèle en A , la hauteur issue de A et la médiatrice de $[BC]$ sont confondues. Donc (AD) est la médiatrice de $[BC]$.

3. (a) F est l'orthocentre du triangle ABC , donc F appartient à la hauteur issue de A . Or par définition, la hauteur issue de A est perpendiculaire à $[BC]$. Donc (AF) est perpendiculaire à $[BC]$.

- (b) La hauteur issue de A correspond, d'une part, à (AD) (question 2.(c)), et d'autre part, à (AF) (question 3.(a)). Les droites (AD) et (AF) sont donc confondues. Donc A , D et F sont alignés.

On a montré à la question 2.(c) que (AD) est la médiatrice de $[BC]$. Comment (AD) et (AF) sont confondues, on en déduit que (AF) est la médiatrice de $[BC]$.