



N°ENSC-2009/xx



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

David ODIÈVRE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Domaine :

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :

**Sur une stratégie de calcul en
dynamique transitoire en présence
de variabilité paramétrique**

Soutenue à Cachan le 23 septembre 2009 devant le jury composé de :

Daniel COUTELLIER	Université de Valenciennes	Rapporteur
Anthony GRAVOUIL	INSA de Lyon	Rapporteur
Zhi-Qiang FENG	Université d'Evry	Examineur
Stephane GUINARD	EADS Innovation Works	Examineur
Pierre-Alain BOUCARD	ENS de Cachan	Directeur de thèse
Fabrice GATUINGT	ENS de Cachan	Encadrant de thèse

LMT-Cachan

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Méthode de sous-structuration/multiéchelle en dynamique	5
1 Problème de référence	6
2 Méthode de décomposition de domaine	8
2.1 La méthode de Schwarz	10
2.2 La méthode de Schur primale	10
2.3 La méthode de Schur duale	11
2.4 Approches mixtes	13
3 Stratégies de calcul multiéchelle	15
3.1 La méthode Arlequin	15
3.2 Méthodes multi-pas de temps	17
2 La méthode LaTIn multiéchelle dédié à la dynamique	21
1 Problème de référence sous-structuré	23
1.1 Partitionnement en sous-structures et interfaces	23
1.2 Problème sous-structuré	24
2 Description multiéchelle introduit au niveau des interfaces	26
2.1 Définition des quantités macroscopiques	26
2.2 Choix des quantités macroscopiques	27
2.3 Admissibilité des quantités macroscopiques	28
3 Algorithme de résolution : la méthode LaTIn	30
3.1 Séparations des difficultés	30
3.2 Algorithme itératif à deux étapes	31
3.3 Ecriture des problèmes à résoudre	33
3 Mise en oeuvre numérique et informatique	35
1 Discrétisation	37

1.1	En espace	37
1.2	En temps	39
2	Traitement du schéma itératif	42
2.1	Etape locale	42
2.2	Etape linéaire	45
2.3	Algorithme de la stratégie	47
3	Une stratégie de calcul parallèle	48
3.1	Un code de calcul éléments finis	48
3.2	Parallélisation de la stratégie	51
4	Comportement de la stratégie	51
4.1	Comparaison entre les méthodes mono/multiéchelle	52
4.2	Extensibilité de la stratégie	56
4.3	Performance, Speed-up	59
4.4	Traitement du contact	60
4	Une stratégie de calcul dédiée aux études paramétriques	63
1	Etat de l'art : stratégie de calcul multirésolution	64
1.1	Préambule	64
1.2	Méthode de perturbation	65
1.3	Méthode de Neumann	67
1.4	Méthode spectrale	67
2	Stratégie multirésolution basée sur la méthode LaTin	69
2.1	Principe	69
2.2	Application à la dynamique transitoire	70
2.3	Comportement de la stratégie	72
5	Exemples de simulation et d'application	75
1	Exemple d'étude paramétrique sur un cas académique	76
2	Exemple d'assemblage - liaison "SSS"	82
2.1	Etude paramétrique	86
2.2	Calcul haute performance	89
3	Matériaux fortement hétérogène	91
3.1	Etude paramétrique	93
3.2	Calcul haute performance	95
	Conclusion	99
	Bibliographie	103

Introduction

La modélisation/simulation est plus que jamais au centre des activités de l'ingénieur, tout particulièrement en calcul de structures. Des progrès considérables ont été effectués ce dernier quart de siècle grâce à la recherche ; les prototypes virtuels exploités lors de la conception sont de plus en plus complexes et surtout représentent de mieux en mieux la réalité. De part l'augmentation toujours croissante de la puissance des ordinateurs, les calculs incluent aujourd'hui plus de détails sur les structures, tant du point de vue de la description de la géométrie que sur la complexité du matériau (métallique, béton, composite...). Le seul réel point noir, encore relativement peu étudié, est celui des conditions aux limites, et plus généralement des liaisons entre les pièces et l'environnement extérieur. Pourtant, ces liaisons jouent un rôle majeur dans le dimensionnement, car elles sont le lieu de phénomènes locaux fortement non linéaires : contact, frottement, plasticité...

De plus, contrairement aux informations géométriques et matérielles associées aux structures, les grandeurs physiques associées à ces liaisons (valeurs de coefficient de frottement, précision sur le serrage) sont entachées d'une grande méconnaissance. On peut légitimement se demander quelle influence a la variation d'un paramètre physique de la liaison sur la réponse d'un assemblage.

Aujourd'hui, un objectif industriel majeur est de faire un pas supplémentaire dans ces simulations complexes en prenant en compte la variabilité, en particulier aux liaisons entre les pièces (contact, frottement...) ou avec l'extérieur (charges par exemple). Que ce soit pour réaliser une étude de sensibilité, mettre en oeuvre une méthode d'optimisation, effectuer le recalage d'un modèle, mener une étude de fiabilité, obtenir des grandeurs statistiques à partir de technique de type Monte Carlo ou encore identifier des paramètres à partir de surfaces de réponses lorsque ceux-ci varient, l'étude d'une structure passe nécessairement par la réalisation de plusieurs calculs, leur nombre pouvant être très important. Si ces études sont envisageables en statique, même si elles ne sont pas sans poser certaines difficultés, la réalisation de ces mêmes études paramétriques en dynamique avec des codes industriels est à ce jour impossible en des temps de calcul raisonnables. En effet, la simulation d'un as-

semblage en dynamique pour un seul jeu de paramètres conduit déjà bien souvent à des temps de calculs importants voir très importants suivant le nombre d'interfaces de contact et la taille du problème considéré. Une étude paramétrique portant sur les propriétés des liaisons entre les pièces d'un assemblage complexe en dynamique n'est alors pas envisageable et constitue à ce jour un réel verrou scientifique.

Les difficultés pour mener ce type d'études paramétriques sont multiples. La prise en compte des non-linéarités de contact constitue une première difficulté, notamment lorsque le nombre de surfaces de contact est grand. Il existe de nombreuses méthodes dans la littérature pour traiter ce type de non-linéarités. Parmi ces méthodes, deux grandes familles se distinguent [Kikuchi et Oden 1988, Zhong et Mackerle 1992, Wriggers 1995] : les méthodes de pénalités et les méthodes basées sur l'utilisation de multiplicateur de Lagrange. Les méthodes de pénalités [Kikuchi 1982, Armero et Petcz 1998], méthodes primales, sont les plus employées du fait de leur simplicité de mise en place et de leur très grande efficacité. Ces méthodes ne traitent cependant pas le contact de façon exacte et peuvent conduire à la résolution d'un problème mal conditionné lorsque le coefficient de pénalisation est trop grand ou trop petit. La deuxième famille de méthodes [Arora *et al.* 1991] est basée sur l'utilisation de multiplicateur de Lagrange. Ces méthodes sont, elles, des méthodes duales. Elles vérifient strictement les conditions de contact mais entraînent généralement des surcoûts de calcul important lorsque le nombre de conditions de contact devient grand. Des techniques, plus récentes, traitant le problème de façon mixte, sont apparues (Lagrangien augmenté) [Klarbring 1992, Rabi *et al.* 1998]. Elles offrent une description très mécanique et précise du contact. Cette dernière façon de traiter le contact a donné lieu à de multiples variantes [Saxcé et Feng 1998, Champaney *et al.* 1999]

Une autre source de difficulté que l'on rencontre avec les simulations d'assemblage en dynamique transitoire est la taille des problèmes que l'on doit traiter. En effet lorsqu'il s'agit de simuler un assemblage complexe, la taille et donc le temps de calcul peut très vite devenir exorbitant. Il est donc nécessaire d'utiliser une stratégie de calcul performante, à même de résoudre un calcul de taille importante en un temps raisonnable. De nombreux travaux proposent des stratégies pour traiter ce type de problèmes, ils se basent le plus souvent sur des méthodes de décomposition de domaines [Mandel 1993, Farhat *et al.* 1994, Gravouil et Combescure 2003]. Ces méthodes permettent de réduire la taille associée à la représentation en espace. De plus elle contiennent un parallélisme naturel très adapté aux ordinateurs multi-processeurs. Elles permettent donc des gains en temps de calcul important.

De nombreux travaux s'inscrivent dans cette thématique au LMT Cachan, notamment ceux portant sur la méthode de décomposition de domaine mixte basée sur la stratégie de résolution itérative LaTIn [Ladevèze 1990]. Elle a été appliquée

dans de nombreux cas, notamment dans le cadre de la dynamique transitoire avec prise en compte de non-linéarité de contact [Lemoussu *et al.* 2002]. Cette méthode de décomposition de domaine mixte traite à la fois les vitesses et les inter-efforts sur les interfaces, et s'est avérée performante et efficace pour traiter les problèmes de contact. Le contact y est traité de façon mixte et locale, cette technique s'apparente ainsi aux méthodes basées sur l'utilisation de Lagrangien augmenté. Cependant lorsque le nombre de sous domaines est important, cette première version de la stratégie perd de son efficacité, elle nécessite dans ce cas un nombre important d'itérations pour converger. Ce défaut a été également constaté en statique et quasi-statique. Une vision à deux échelles a été alors introduite en statique et quasi-statique pour palier les précédents inconvénients [Ladevèze et Dureisseix 1999, Ladevèze *et al.* 2002]. Elle a rendu la méthode de décomposition de domaine extensible en espace et a permis d'améliorer de façon significative le taux de convergence de la méthode en statique et quasi-statique.

La méthode LaTIn s'est avérée également intéressante en matière de multirésolution. Le terme multirésolution désigne le fait de devoir mener la résolution de multiples problèmes, problèmes similaires par leur nature se différenciant les uns des autres par les variations de certains paramètres qui les décrivent. La méthode LaTIn permet de diminuer de façon drastique le coût de calcul nécessaire à une étude paramétrique par rapport aux approches conventionnelles. Cette technique a été appliquée dans différents cadres : flambage des structures, viscoplasticité, problèmes de contact et de frottement en statique et quasi-statique [Boucard et Champaney 2003, Champaney *et al.* 2008].

L'objet de ce travail est de proposer une stratégie de calcul en dynamique qui soit à la fois performante et adaptée à la multirésolution. Cette nouvelle stratégie de calcul se basera sur la méthode LaTIn en dynamique développée par le passé. Il s'agit ici d'y introduire les dernières avancées de la méthode LaTIn : d'une part la vision multiéchelle et d'autre part la stratégie de calcul multirésolution, toutes deux initialement introduites pour des problèmes de statique et quasi-statique. On obtiendra ainsi une méthode de décomposition de domaine multiéchelle mixte adaptée aux études paramétriques. Les applications visées ici concernent la simulation en dynamique d'assemblages ou des structures fortement hétérogènes avec prise en compte de non-linéarités d'interface. Ces applications peuvent, de part leur nature, comporter un très grand nombre de degrés de liberté et d'interfaces de contact.

Ce document est composé de cinq chapitres. Le premier chapitre présente tout d'abord le cadre scientifique dans lequel se place ce travail. Une présentation du problème de référence élémentaire, que l'on se propose de traiter, est réalisée. Le type de problème et ses hypothèses y sont mentionnés. Cette présentation est suivie d'une étude bibliographique sur les méthodes qui s'inscrivent dans cette probléma-

tique. Cette étude bibliographique présentera d'une part des méthodes de décomposition de domaines et d'autre part des méthodes multiéchelles.

Le deuxième chapitre expose le formalisme de la stratégie de calcul que l'on propose ici : la méthode LaTIn multiéchelle en dynamique. Nous rappelons les points importants de l'approche : la décomposition en sous-structures et interfaces, la séparation des échelles et l'algorithme de résolution itératif. Les spécificités introduites pour la dynamique dans cette approche seront détaillées, notamment les conditions d'admissibilité portant sur les inconnues macroscopiques (échelle grossière).

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la mise en oeuvre numérique et informatique de cette méthode. Différents points y seront présentés : les discrétisations spatiales et temporelles choisies, le traitement numérique des différentes étapes de la méthode et le cadre dans lequel a été programmé cette stratégie. Pour finir nous illustrerons le comportement de la stratégie sur des exemples académiques.

Le quatrième chapitre porte sur l'utilisation de la stratégie de calcul multirésolution dans le cadre d'un calcul en dynamique transitoire. Nous présenterons tout d'abord un bref état de l'art des méthodes de multirésolution. Puis nous présenterons comment la stratégie de calcul multirésolution proposée dans la méthode LaTIn a été adaptée au cas de la dynamique. Pour finir, nous illustrerons le comportement de cette stratégie en dynamique sur des études paramétriques simples.

Le dernier chapitre expose des exemples de simulation et d'études paramétriques que l'on peut mener avec cette stratégie. Cette partie a pour but de montrer les capacités de notre méthode. Elle permettra de présenter d'une part l'efficacité de la méthode de décomposition de domaine multiéchelle en dynamique et d'autre part l'efficacité de la stratégie de calcul multirésolution sur des cas industriels.

Méthode de sous-structuration/multiéchelle en dynamique

Ce chapitre expose tout d'abord le problème de référence que l'on traitera dans ce travail. Ensuite nous présenterons un état de l'art non exhaustif des méthodes rencontrées dans la littérature pour traiter ce type de problème. Deux familles de méthodes sont plus spécifiquement abordées ici : les méthodes de décomposition de domaine et les méthodes multiéchelles.

Sommaire

1	Problème de référence	6
2	Méthode de décomposition de domaine	8
2.1	La méthode de Schwarz	10
2.2	La méthode de Schur primale	10
2.3	La méthode de Schur duale	11
2.4	Approches mixtes	13
3	Stratégies de calcul multiéchelle	15
3.1	La méthode Arlequin	15
3.2	Méthodes multi-pas de temps	17

1 Problème de référence

Cette section précise les hypothèses et le type de problème traité dans ce travail. Nous nous plaçons dans le cadre des problèmes d'évolution élastiques en petites perturbations, dynamiques et isothermes. On considère l'évolution d'un assemblage (Figure 1.1) occupant le domaine Ω pendant un intervalle de temps $[0, T]$. Cet assemblage est composé de deux pièces occupant respectivement les domaines Ω_E et $\Omega_{E'}$ ($\Omega = \Omega_E \cup \Omega_{E'}$), ces pièces sont en contact sur une partie de leur bord $\Gamma_{EE'}$.

Cette structure est soumise à des forces de volume f_d et à des efforts surfacique

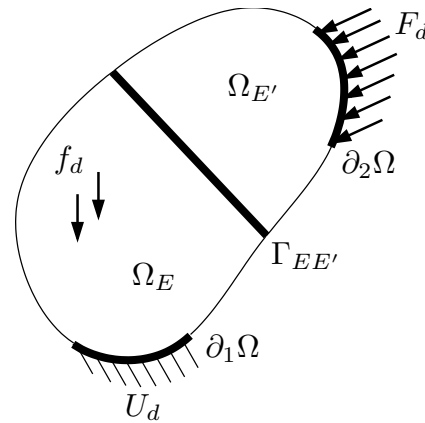


Figure 1.1: Problème de référence

F_d sur une partie $\partial_2\Omega$. Sur la partie complémentaire de $\partial\Omega$, noté $\partial_1\Omega$, des déplacements U_d (ou des vitesses V_d) peuvent être imposés. Le comportement des matériaux est linéaire. Le problème de référence est alors de trouver l'évolution des couples $(u_i(M, t), \sigma_i(M, t))$, de chacune des pièces de l'assemblage défini sur $\Omega_i \times [0, T]$, $i \in [E, E']$ vérifiant les équations suivantes :

■ **Admissibilité cinématique** : Les champs de déplacement u_i sont cinématiquement admissibles (CA, $u_i \in \mathcal{U}_{ad}^{[0, T]}$), c'est à dire :

- Régularité des champs de déplacements : $u_i \in \mathcal{U}^{[0, T]}$
- Conditions initiales : $\forall M \in \Omega_i$

$$u_i(t = 0) = U_i^0 \quad , \quad \frac{du_i}{dt}(t = 0) = V_i^0$$

- Equations de liaison : $\forall t \in [0, T], \forall M \in \partial_1\Omega$

$$u_i|_{\partial_1\Omega} = U_d$$

où $\mathcal{U}^{[0,T]}$ est l'espace des champs de déplacement réguliers (à énergie finie), sur $\Omega \times [0, T]$. On définira également $\mathcal{U}_{ad,0}^{[0,T]}$ l'espace des champs u_i cinématiquement admissible à zéro (CA à 0) :

$$\mathcal{U}_{ad,0}^{[0,T]} = \{u(M, t) \mid u \in \mathcal{U}^{[0,T]}, u|_{\partial_1\Omega} = 0\}$$

■ **Admissibilité dynamique** : Les champs de contrainte σ_i sont dynamiquement admissibles (DA, $\sigma_i \in \mathcal{S}_{ad}^{[0,T]}$), c'est à dire :

$$\forall t \in [0, T], \forall u^* \in \mathcal{U}_{ad,0}^{[0,T]}, \sigma_i \in \mathcal{S}^{[0,T]}$$

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} + f_d \right) u^* d\Omega + \int_{\Omega} Tr(\sigma_i \varepsilon(u^*)) d\Omega = \int_{\partial_2\Omega} F_d u^* d\Gamma$$

où $\mathcal{S}^{[0,T]}$ est l'espace des champs de contrainte symétriques et réguliers (à énergie finie).

■ **Relation de comportement** :

– Matériaux

$$\forall t \in [0, T], \forall M \in \Omega \quad \sigma_i = \mathbf{K}_i \varepsilon(u_i)$$

où \mathbf{K}_i est le tenseur de Hooke qui caractérise le matériau. $\varepsilon(u_i)$ désigne le tenseur de déformation, il est donné par :

$$\varepsilon(u_i) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial M} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial M} \right)^T \right]$$

– Interface de contact

Dans ce travail, nous considérons des interfaces de contact unilatéral avec frottement et éventuellement un jeu initial. La loi utilisée pour le frottement est la loi de Coulomb. Le comportement est caractérisé par le coefficient de frottement noté μ et par le jeu initial g (Figure 1.2).

On note \mathbf{n} le vecteur normal à $\Gamma_{EE'}$ sortant par rapport à Ω_E , et \mathbf{P} le projecteur tangentiel associé tel que $u_E = (\mathbf{n} \cdot u_E) \mathbf{n} + \mathbf{P} u_E$.

La relation de comportement d'interface est décrite par les conditions de contact unilatéral :

$$\text{Si } \mathbf{n} \cdot (u_E - u_{E'}) < g \quad \text{alors} \quad F_E = F_{E'} = 0 \quad (\text{décollement})$$

$$\text{Si } \mathbf{n} \cdot (u_E - u_{E'}) = g \quad \text{alors} \quad \begin{cases} F_E + F_{E'} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot F_E \leq 0 \end{cases} \quad (\text{contact})$$

et les conditions de frottement :

$$\text{Si } \|\mathbf{P} F_E\| < \mu |\mathbf{n} \cdot F_E| \quad \text{alors} \quad \mathbf{P}(u_{E'} - u_E) = 0 \quad (\text{adhérence})$$

$$\text{Si } \|\mathbf{P} F_E\| = \mu |\mathbf{n} \cdot F_E| \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \mathbf{P}(u_{E'} - u_E) \wedge \mathbf{P} F_E = 0 \\ \mathbf{P}(u_{E'} - u_E) \cdot \mathbf{P} F_E \geq 0 \end{cases} \quad (\text{glissement})$$

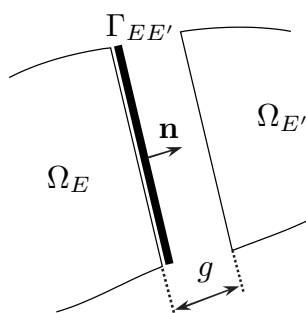


Figure 1.2: Interface de contact

2 Méthode de décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine ont été initialement introduites pour la résolution d'équations aux dérivées partielles par H.A. Schwarz [Schwarz 1869]. Elles se sont ensuite avérées très adaptées au calcul parallèle haute performance, notamment en mécanique des fluides, puis en calcul de structure. Elles ont été appliquées à la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques, paraboliques ou hyperboliques discrétisées par éléments finis, différence finie et méthodes spectrales. Ces techniques ont en commun la manière de traiter les problèmes de taille importante. En calcul de structure, il s'agit de diviser la structure à étudier et donc des équations associées. Ces méthodes se sont avérées très intéressantes pour traiter les problèmes de contact [Alart *et al.* 2000, Barboteu *et al.* 2001] ainsi que les problèmes de dynamique [Barboteu 2005]. Les différentes méthodes se caractérisent par le choix des inconnues aux interfaces et la nature de l'interface. On peut citer quatre familles principales de méthodes de décomposition de domaines :

- avec recouvrement éventuel des sous-domaines
 - méthodes de Schwarz [Schwarz 1869], [Lions 1990]
- sans recouvrement des sous-domaines
 - méthodes de Schur primale [Przemieniecki 1963], [Mandel 1993]
 - méthodes de Schur duale [Farhat et Roux 1994], [Roux 1990]
 - méthode mixtes [Le Tallec 1994], [Glowinski et Le Tallec 1990], [Ladevèze 1985a]

L'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine en dynamique transitoire ne pose pas de difficulté majeure supplémentaire par rapport à la version en statique. En effet, l'utilisation d'un schéma d'intégration temporel permet de se ramener à la résolution de problèmes à chaque piquet de temps du même type que ceux rencontrés en statique. Que ce soit pour un problème de statique ou de dyna-

mique, on se ramène toujours à la résolution d'un problème linéaire du type :

$$A x = b$$

où A est une matrice, x le vecteur inconnu et b le second membre.

$$\begin{aligned} \text{- en statique :} & \quad \begin{cases} A = K \\ x = u \\ b = f_{ext} \end{cases} \\ \text{- en dynamique :} & \quad \begin{cases} A = M + \beta \Delta t^2 K \\ x = \ddot{u}_{t+\Delta t} \\ b = f_{ext} - f(u_t, \dot{u}_t, \ddot{u}_t) \end{cases} \quad (\text{par exemple}) \end{aligned}$$

avec K et M , les matrices de rigidité et de masse, f_{ext} les efforts imposés.

Dans cette présentation, on s'intéressera aux problèmes linéaires rencontrés en calcul de structure discrétisés par éléments finis de la forme :

$$K u = f \quad (1.1)$$

où K est une matrice symétrique, définie positive. Ainsi, pour simplifier leurs écritures, les différentes méthodes présentées seront proposées en statique. Dans ce paragraphe, nous ne nous intéressons pas à la technique de résolution (directe ou itérative) mais aux propriétés des interfaces dans les différentes formulations. Le

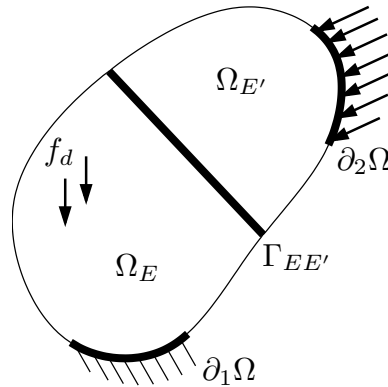


Figure 1.3: Méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement

domaine à étudier noté Ω est divisé en deux domaines distincts notés Ω_E et $\Omega_{E'}$, reliés par une interface $\Gamma_{EE'}$. La figure 1.3 illustre le problème modèle des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement.

2.1 La méthode de Schwarz

Dans cette approche, il y a recouvrement partiel des sous-domaines. Autrement dit, la dimension physique des interfaces est la même que celle des sous-domaines. De nombreux résultats mathématiques portent sur cette méthode [Lions 1990] et on trouve des applications en mécanique des structures notamment dans [Roux 1990, L.Badea 1991]. Cependant, les méthodes avec recouvrement restent à ce jour marginales. Elles sont beaucoup moins utilisées que les méthodes de Schur où la taille du problème d'interface est de dimension physique égale à 2 pour un problème 3D.

2.2 La méthode de Schur primale

Cette méthode, initialement présentée dans [Przemieniecki 1963], est reprise dans de nombreuses études comme [Mandel 1993], [De Roek *et al.* 1992] ou [Roux 1990]. Elle privilégie les quantités cinématiques. Les inconnues du problème sous-structuré sont les champs de déplacement des interfaces $\Gamma_{EE'}$ (Figure 1.3). Elles sont notées ici u_b . Le problème discrétisé (Eq. 1.1) peut s'écrire de la manière suivante après une légère contrainte de re-numérotation des noeuds du maillage :

$$\begin{bmatrix} K_E & 0 & K_{Eb} \\ 0 & K_E & K_{E'b} \\ K_{bE} & K_{bE'} & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E \\ u_{E'} \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_E \\ f_{E'} \\ f_b \end{Bmatrix}$$

Les matrices K_E et $K_{E'}$ ne sont pas exactement les matrices de raideur éléments finis des sous-structures puisqu'elles ne concernent que les inconnues u_E et $u_{E'}$ relatives aux noeuds intérieurs de chaque sous-structure. La matrice K_b correspond, quand à elle, à la matrice de rigidité de l'interface $\Gamma_{EE'}$. K_{bE} et K_{Eb} sont des matrices de couplages entre les noeuds intérieurs et les noeuds bords. La méthode de Schur primale propose une condensation du problème sur les inconnues nodales $\{u_b\}$ des interfaces $\Gamma_{EE'}$. La condition de continuité en déplacement à l'interface $\Gamma_{EE'}$ est implicitement traitée par choix d'un même degré de liberté de part et d'autre de celle-ci. En définissant la matrice du complément de Schur primal $[S_p]$, le problème à résoudre est alors :

$$[S_p]\{u_b\} = \{b_p\}$$

où $[S_p]$ et $\{b_p\}$ sont obtenues par substitution des inconnues u_E et $u_{E'}$:

$$\begin{aligned} [S_p] &= K_b - K_{bE}K_E^{-1}K_{Eb} - K_{bE'}K_{E'}^{-1}K_{E'b} \\ \{b_p\} &= f_b - K_{bE}K_E^{-1}f_E - K_{bE'}K_{E'}^{-1}f_{E'} \end{aligned}$$

Les inconnues cinématiques relatives aux sous-structures Ω_E et $\Omega_{E'}$ sont obtenues par post traitement :

$$\begin{aligned} u_E &= K_E^{-1}(f_E - K_{Eb}u_b) \\ u_{E'} &= K_{E'}^{-1}(f_{E'} - K_{E'b}u_b) \end{aligned}$$

Le problème a donc été réduit à la taille associée au nombre de noeuds des interfaces. Cependant la matrice $[S_p]$ est plus dense qu'une matrice éléments finis standard.

■ **La méthode BDD :** L'inversion des matrice K_E et $K_{E'}$ étant prohibitive, la résolution du problème nécessite un traitement spécifique des termes $K_{bE}K_E^{-1}K_{Eb}$ et $K_{bE'}^TK_{E'}^{-1}K_{E'b}$. Ainsi, même si la résolution directe du problème offre une grande robustesse et est aisément parallélisable, des méthodes de résolution itératives du type gradient conjugué sont employées pour éviter ces inversions coûteuses de matrice. La convergence des algorithmes de gradients conjugué est directement liée au conditionnement du problème à résoudre. Elle peut être fortement améliorée par l'utilisation d'un préconditionneur qui permet de diminuer le conditionnement du système. Il existe de multiples préconditionneurs efficaces dédiés à la méthode de Schur primale. On peut citer les travaux de [De Roek et Le Tallec 1990] ou encore les préconditionneurs de type "Neumann" [Le Tallec 1994]. L'approche "Balanced Domain Decomposition" (BDD [Mandel 1993]) propose une amélioration de la méthode. Cette méthode utilise d'une part un préconditionneur qui peut s'apparenter à celui de Neumann. D'autre part un problème global/grossier sur toute la structure est introduit dans la stratégie, ce problème permet de rendre la méthode extensible.

■ **Remarques :** Il faut noter que cette méthode repose sur le fait que les noeuds d'interface sont communs aux sous-domaines en vis-à-vis ; ainsi, on se place d'emblée dans un formalisme qui impose des liaisons parfaites et des maillages compatibles. La généralisation à des maillages incompatibles ou à des interfaces de contact nécessite de découpler les noeuds d'interface et d'introduire explicitement dans la formulation les équations des interfaces.

Dans le cadre d'une formulation de Schur primale, deux sous-domaines connectés par un coin ou une arête en 3D sont considérés comme voisins. Ainsi, si on utilise cet algorithme pour un calcul parallèle, le nombre de communications entre sous-domaines peut être important [Roux 1990].

2.3 La méthode de Schur duale

Cette approche est l'approche duale de la précédente. Ici, ce sont les efforts des interfaces qui sont privilégiés et sont les inconnues du problème condensé. Pour cela des multiplicateurs de Lagrange λ_b sont introduits sur chaque interface. Ici l'équilibre des sous-domaines est implicitement réalisé par l'introduction d'un unique multiplicateur de Lagrange par interface. Le problème discrétisé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_E & 0 & L_{Eb} \\ 0 & K_{E'} & L_{E'b} \\ L_{bE} & L_{bE'} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E \\ u_{E'} \\ \lambda_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_E \\ f_{E'} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cette fois, les matrices K_E et $K_{E'}$ sont bien les matrices de raideurs éléments finis des sous-structures. Les matrices L_{Eb} et $L_{E'b}$ sont des matrices de restriction aux noeuds bords. Par une condensation du problème sur les multiplicateurs de Lagrange, on obtient le problème suivant :

$$[S_d]\{\lambda_b\} = \{b_d\}$$

où $[S_d]$ et $\{b_d\}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} [S_d] &= L_{bE}K_E^{-1}L_{Eb} + L_{bE'}K_{E'}^{-1}L_{E'b} \\ \{b_d\} &= L_{bE}K_E^{-1}f_E + L_{bE'}K_{E'}^{-1}f_{E'} \end{aligned}$$

Pour les problèmes de statique, il se peut qu'un sous-domaine Ω_E n'ait pas de déplacement imposé sur le bord. Le sous-domaine est dit flottant. Dans ce cas, la matrice K_E n'est pas inversible, une matrice d'inverse généralisé K_E^+ est alors utilisée [Farhat et Roux 1994], le déplacement n'est alors connu qu'à un mouvement de solide rigide près :

$$u_E = K_E^+(f_E - L_{Eb}\lambda_b) + R_E\alpha_E$$

où R_E est l'ensemble des déplacements de solide rigide possibles du sous-domaine Ω_E et α_E les coefficients d'une combinaison linéaire entre eux. Le travail associé aux mouvements de corps rigides doit être égal à zéro, autrement dit :

$$R_E^T(f_E - L_{bE}^T\lambda_b) = 0$$

Le problème condensé à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} S_d & -L_{bE}R_E \\ -(L_{bE}R_E)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_b \\ \alpha_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_d \\ -R_E^T f_E \end{Bmatrix}$$

Comme pour la méthode primale, le problème se condense parfaitement sur l'interface et le problème réduit peut se résoudre en utilisant une approche directe ou itérative. Là encore, les inconnues relatives aux sous-structures sont obtenues par post-traitement. L'inversion des matrices K_E et $K_{E'}$ est en pratique bien souvent prohibitive, des méthodes de résolutions itératives de type gradient conjugué sont alors utilisées.

■ **La méthode FETI** pour *Finite Element Tearing and Interconnecting* [Farhat et Roux 1991 - 1994] est une méthode de décomposition de domaine basée sur la méthode du complément de Schur duale. Le problème condensé y est résolu par une méthode itérative du type gradient conjugué projeté. En présence de sous-domaine flottant, les matrices de rigidité associées ne sont pas inversibles. Une étape de projection permet alors d'obtenir les mouvements de solide rigide des sous-domaines

flottants ainsi qu'un résidu du gradient conjugué dont les mouvements de corps rigides ont été supprimés. La méthode FETI peut être alors vue comme une méthode à deux échelles. L'opérateur de changement d'échelle est R_E , opérateur contenant les mouvements de solide rigides des sous-domaines flottants. Cette approche à deux échelles qui pouvait être considérée comme un surcoût de calcul au départ est, en fait, à l'origine des excellentes performances de la méthode FETI en statique. De plus cette méthode utilise un préconditionneur pour améliorer la performance du gradient conjugué : préconditionneur de type Dirichlet (ou préconditionneur primal). Dans [Dostal *et al.* 2000, Dureisseix et Farhat 2001], on trouve des exemples d'applications de cette méthode aux problèmes de contact avec frottement.

Dans le cas de la dynamique, la formulation de Schur duale présente une différence fondamentale avec la formulation de schur primale : les champs discrétisés de déplacement, de vitesse et d'accélération sont généralement dépendants les uns des autres du fait de la discrétisation en temps. Ainsi pour une formulation discrétisée de Schur duale, on peut imposer arbitrairement aux interfaces la continuité de l'une de ces trois quantités. Dans [Farhat *et al.* 1993 - 1994 - 1995], on trouve une première étude de ce problème ainsi que l'extension la méthode FETI à la dynamique. En dynamique le concept de sous-domaine flottant n'existe plus, la résolution de l'équilibre d'un sous-domaine est donc toujours possible, et l'aspect à deux échelles de la méthode FETI n'est plus indispensable. Des préconditionneurs spécifiques à la dynamique ont été développés afin de retrouver les performances de la méthode.

■ **Remarques :** Utiliser une méthode duale impose de prendre en compte le cas particulier des points communs à plusieurs sous-domaines, ou *cross-points*. L'écriture systématique des relations de couplage en ces points génère des redondances et conduit à un opérateur d'interface singulier. Un solveur capable de lever cette singularité est donc indispensable.

2.4 Approches mixtes

L'idée de ces méthodes est de ne plus privilégier une quantité (cinématique ou statique) par rapport à une autre mais de les traiter à égalité par l'intermédiaire d'une dualité adaptée au problème à résoudre. Ces méthodes de décomposition de domaine mixte [Le Tallec 1994, Glowinski et Le Tallec 1990] s'appuient sur la méthode du Lagrangien augmenté [Fortin et Glowinski 1982]. Ici les inconnues sont une combinaison linéaire des inconnues cinématiques u_b et statiques λ_b des bords des sous-domaines :

$$\mu_b = \lambda_b + k u_b$$

avec k un opérateur symétrique défini positif appelé parfois raideur d'interface. Les conditions d'interface entre les sous-domaines ne sont pas à priori vérifiées. Le point de départ de ces méthodes consiste en une ré-écriture de ces conditions d'interfaces.

Pour une interface entre deux sous-domaines Ω_E et $\Omega_{E'}$, on obtient :

$$u_b^E - u_b^{E'} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_b^E + \lambda_b^{E'} = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \mu_b^E + \mu_b^E - (k^E + k^{E'})u_b^E = 0 \\ \mu_b^{E'} + \mu_b^{E'} - (k^E + k^{E'})u_b^{E'} = 0 \end{cases}$$

La seconde étape de la méthode est l'introduction de l'inconnue μ_b^E dans les équations d'équilibre condensées de chaque sous-domaine Ω_E ,

$$[S_p^E]u_b^E = \lambda_b^E + b_p^E$$

où $[S_p^E]$ est le complément de Schur primal du sous-domaine Ω_E . La nouvelle équation faisant intervenir l'inconnue μ_b^E est alors :

$$[S_p^E + k^E]u_b^E = \mu_b^E + b_p^E$$

Alors, en supposant que les opérateurs k^E sont choisis de telle sorte que les matrices $[S_p^E + k^E]$ soient inversibles, il est possible d'exprimer le déplacement u_b^E de chaque sous-domaine Ω_E à partir des équations d'équilibres et ainsi les substituer dans les équations de conditions d'interfaces. Pour une interface parfaite entre deux sous-domaines Ω_E et $\Omega_{E'}$, on obtient ainsi le problème condensé suivant :

$$\begin{bmatrix} I & I - (k^E + k^{E'})(S_p^{E'} + k^{E'})^{-1} \\ I - (k^E + k^{E'})(S_p^E + k^E)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_b^E \\ \mu_b^{E'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (k^E + k^{E'})(S_p^{E'} + k^{E'})^{-1}b_p^{E'} \\ (k^E + k^{E'})(S_p^E + k^E)^{-1}b_p^E \end{Bmatrix}$$

Ce type de méthode est parfaitement adapté à la prise en compte des comportements d'interface plus complexe comme du contact/frottement ou de l'endommagement du fait qu'elles sont basées sur une ré-écriture des conditions d'interfaces. Ces méthodes permettent d'obtenir des solutions de grande qualité pour des interfaces dont le comportement est non-linéaire. Ce type d'approche a donné lieu à plusieurs méthodes, LaTin [[Ladevèze 1990](#)] ou FETI-2-fields [[Series et al. 2003](#)].

3 Stratégies de calcul multiéchelle

3.1 La méthode Arlequin

La méthode Arlequin, introduite par H. Ben Dhia [Ben Dhia 1998, Ben Dhia et Rateau 2001], s'adresse à des problèmes de la mécanique dont le domaine d'étude peut être partagé suivant plusieurs zones distinctes. L'objectif de cette approche est de proposer une stratégie permettant de réaliser des niveaux d'analyses différents dans ces différentes zones. Cette approche permet ainsi de faire dialoguer des modèles différents tant au niveau de la discrétisation que de la nature des équations qui les régissent. Le raccord entre ces problèmes s'écrit de manière faible dans le volume des zones de jonction et non pas sur des interfaces comme cela se fait classiquement. Dans ces zones de raccord, chacun des travaux virtuels associés aux différents modèles est pondéré par des fonctions, dites fonctions de pondération ou de mélange de telle sorte que l'énergie totale du système global est conservée.

Considérons la situation où les deux modèles à superposer sont régis par les équations de l'élasticité linéaire. Le premier modèle est le modèle *grossier* et est associé au domaine Ω^M . Le deuxième modèle est le modèle *fin* et est associé au domaine d'intérêt Ω^m (Figure 1.4).

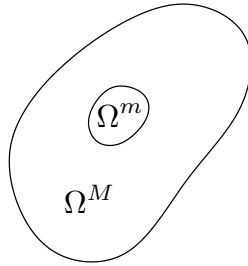


Figure 1.4: Définition du domaine d'intérêt $\Omega^m \subset \Omega$. Ici, on a $\Omega = \Omega^M$ et la zone de jonction $\Omega^{Mm} = \Omega^m$.

La méthode consiste à chercher un couple solution :

$$u = (u^M, u^m) \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \times \mathcal{U}^m \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{W}_{\text{ad}}$$

où la solution grossière u^M est définie sur tout le domaine $\Omega = \Omega^M$ et où la solution fine u^m est définie uniquement sur le domaine Ω^m . On précise que $\mathcal{U}^m = H^1(\Omega^m)$ et que les conditions limites ne sont appliquées que sur Ω^M pour simplifier. Le problème s'énonce alors comme suit : trouver $(u, \lambda) \in \mathcal{W}_{\text{ad}} \times \mathcal{U}^m$ tel que $\forall (u^*, \lambda^*) \in \mathcal{W}_{\text{ad},0} \times \mathcal{U}^m$:

$$\begin{aligned} a(u, u^*) + b(\lambda, u^*) &= l(u^*) \\ b(\lambda^*, u) &= 0 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
 a(u, u^*) &= \int_{\Omega=\Omega^M} \alpha \text{Tr}(\varepsilon(u^M) \mathbf{K} \varepsilon(u^{M*})) d\Omega + \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) \text{Tr}(\varepsilon(u^m) \mathbf{K} \varepsilon(u^{m*})) d\Omega \\
 b(\lambda^*, u) &= (\lambda^*, u^M - u^m)_{H^1(\Omega^m)} \\
 l(u^*) &= \int_{\Omega=\Omega^M} \alpha f_d \cdot u^{M*} d\Omega + \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) f_d \cdot u^{m*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_d \cdot u^{M*} d\Gamma
 \end{aligned}$$

Le paramètre scalaire de pondération α est un champ scalaire tel que $\alpha \in [0, 1]$ dans Ω et $\alpha = 1$ dans $\Omega \setminus \Omega^m$. $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega^m)}$ représente le produit scalaire classique sur $H^1(\Omega^m)$. Cette formulation est donc mixte et le multiplicateur de Lagrange λ permet de garantir l'égalité des champs u^M et u^m au sens faible sur la zone de jonction $\Omega^{Mm} = \Omega^m$. La solution est alors définie comme suit :

$$u = \begin{cases} u^M & \text{sur } \Omega \setminus \Omega^m \\ \alpha u^M + (1 - \alpha) u^m & \text{sur } \Omega^m \end{cases}$$

La qualité du raccord dans la zone de jonction dépend du choix de l'espace du multiplicateur de Lagrange λ appelé espace « médiateur ». La définition de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange dans la zone de jonction reste délicate et fait encore l'objet de travaux. Si ce choix ne pose pas de problèmes en continu, il est plus difficile à réaliser en discret. Notons également que le raccord réalisé ici dans le volume permet en général de faire dialoguer correctement les deux modèles, permettant ainsi « d'échanger beaucoup plus d'informations » qu'un raccord surfacique. Il faut cependant noter que l'intégration numérique dans le volume du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega^m)}$ peut engendrer des coûts de calculs importants lorsque les discrétisations de u^M et de u^m ne sont pas compatibles dans la zone de jonction.

■ **Remarques 1** : La méthode Arlequin repose sur trois principes : superposer différents modèles/domaines, les coupler de manière faible et répartir l'énergie globale entre les travaux virtuels correspondant. Cette méthode permet de réaliser trois types d'opérations de modélisation : la fonction *Zoom* qui permet de superposer un modèle fin sur une partie d'un modèle grossier, la fonction *Jonction* qui permet de relier des modèles/domaines différents qui se recouvrent partiellement et la fonction *Substitution* qui permet de modifier localement un modèle.

■ **Remarques 2** : La méthode Arlequin a été appliquée aux problèmes de contact en dynamique dans [Ben Dhia et Zammali 2007]. Dans ces travaux, un modèle fin est superposé à un modèle grossier au voisinage de la zone de contact. Cette technique permet premièrement d’opter pour des comportements différents dans les différentes zones et ainsi de prendre en compte la plasticité par exemple dans la zone proche du contact. Deuxièmement, cette technique permet d’avoir facilement un maillage fin dans la zone proche du contact pour pouvoir ainsi représenter le contenu haute fréquence dû au choc. Cette méthode permet une réelle analyse multiéchelle du problème de contact tout en garantissant la conservation de l’énergie dans la zone de raccord.

3.2 Méthodes multi-pas de temps

Certains travaux se sont intéressés à optimiser les méthodes de décomposition de domaine dans le cas des problèmes d’évolutions. Ces approches consistent d’une part à coupler différents schémas d’intégration temporelle au sein d’un même problème et d’autre part à utiliser des discrétisations temporelles différentes dans des régions séparées d’une structure. Ces techniques sont particulièrement utiles, voir même obligatoires dans certains cas, lorsque des zones de l’espace ne nécessitent pas la même description temporelle [Dureisseix *et al.* 2003, Combescure et Gravouil 2002].

Les premier travaux dans ce domaine sont les méthodes mixtes décrites dans [Hughes et Liu 1978]. Elles ont proposé de coupler différents schémas (par exemple explicite/implicite), le pas de temps Δt est cependant identique sur chaque sous-structure.

D’autres méthodes ont également été développées : les méthodes de sous-cyclage ou multi-pas en temps [Belytschko *et al.* 1979]. Elles permettent quand à elles de prendre en compte des discrétisations temporelles différentes.

Puis, des méthodes mixtes avec sous-cyclage combinant les deux approches précédentes ont été proposées [Belytschko *et al.* 1985, Gravouil et Combescure 2001, Combescure et Gravouil 2001]. Ces méthodes permettent alors d’utiliser une discrétisation temporelle fine dans certaines zones, afin de modéliser des phénomènes complexes, sans que cela devienne pénalisant pour le reste de la structure. Ces méthodes ont été appliquées à la simulation d’impact en dynamique transitoire [Combescure et Gravouil 2002], elles ont été ensuite associées à des méthodes multiéchelles en espace dans [Gravouil et Combescure 2003].

Dans [Combescure et Gravouil 2002], une méthode de décomposition de domaine en dynamique transitoire est proposée. Les sous-structures sont associées à des schémas d’intégration et des discrétisations temporelles différents. Pour illus-

trer la méthode, nous considérons deux sous-structures Ω_M et Ω_m séparées par une interface Γ (Figure 1.5).

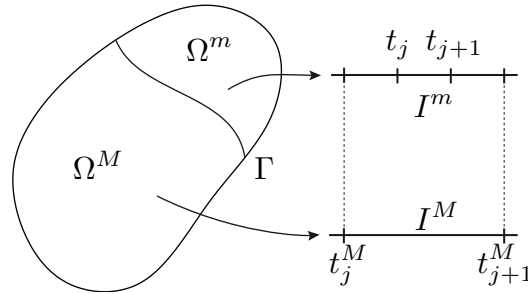


Figure 1.5: Définition des sous-structures et de leur discrétisation temporelle.

Le couplage des différents schémas d'intégration est réalisé en décomposant l'accélération en deux. Une première partie de l'accélération (*free*) vérifie l'équilibre sur chaque sous-structure et peut être calculée indépendamment sur chaque sous-structure. Une deuxième partie (*link*) prend en compte les liaisons entre les sous-structures. Ces liaisons sont écrites comme des relations de contraintes sur les déplacements. Des multiplicateurs de Lagrange λ sont introduits pour assurer ces contraintes de liaison. Ces multiplicateurs sont déduits à partir des accélérations calculées (*free*). Ensuite la deuxième partie de l'accélération due aux liaisons est déduite des multiplicateurs de Lagrange. Le problème discrétisé sur chaque sous-structure s'écrit de la manière suivante :

$$M\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{link} \quad \text{avec } \mathbf{F}^{link} = \mathbf{C}^T \lambda$$

$$\sum_s \mathbf{C}\mathbf{W} = 0$$

où \mathbf{W} est la restriction sur l'interface Γ du champ dont on impose la continuité sur l'interface. Ce champ peut être le déplacement, la vitesse ou l'accélération. On introduit ensuite la décomposition de l'accélération dans le système d'équation précédent : $\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}^{free} + \ddot{\mathbf{U}}^{link}$. On en déduit le système suivant :

$$M\ddot{\mathbf{U}}^{free} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{free} = \mathbf{F}^{ext} \quad (1.2)$$

$$M\ddot{\mathbf{U}}^{link} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{link} = \mathbf{F}^{link} \quad (1.3)$$

$$\sum_s \mathbf{C}\mathbf{W} = 0 \quad (1.4)$$

Dans le cas de discrétisations différentes, toutes les variables d'interface (\mathbf{W} et λ) sont définies sur la grille grossière. Un opérateur de prolongement qui peut être basé sur une interpolation linéaire ou continue par morceaux est utilisé pour transférer les champs sur la grille fine.

Chaque problème (*free* et *link*) est résolu par l'algorithme de Schur dual. A chaque pas de temps, ces problèmes sont résolus en suivant les étapes :

1. Résoudre les problèmes libres (1.2)
2. Résoudre le problème condensé d'interface (1.4)
3. Résoudre les problèmes liés (1.3)
4. En déduire la solution sur chaque sous-domaine.

La méthode LaTIn multiéchelle dédié à la dynamique

Dans ce chapitre, nous rappelons les points importants de la méthode LaTIn multi-échelle et présentons les apports introduits pour la dynamique (admissibilité des quantités macroscopiques). La stratégie est présentée dans le cadre de l'élasticité en présence de non-linéarité de contact. Ce travail fait suite aux thèses [[Lemoussu 2000](#)] et [[Gupta 2005](#)].

Sommaire

1	Problème de référence sous-structuré	23
1.1	Partitionnement en sous-structures et interfaces	23
1.2	Problème sous-structuré	24
2	Description multiéchelle introduit au niveau des interfaces	26
2.1	Définition des quantités macroscopiques	26
2.2	Choix des quantités macroscopiques	27
2.3	Admissibilité des quantités macroscopiques	28
3	Algorithme de résolution : la méthode LaTIn	30
3.1	Séparations des difficultés	30
3.2	Algorithme itératif à deux étapes	31

3.3 Ecriture des problèmes à résoudre 33

1 Problème de référence sous-structuré

1.1 Partitionnement en sous-structures et interfaces

L'idée de base de la méthode LaTin avec décomposition de domaine est de décrire la structure comme l'assemblage de composants simples : des sous-structures et des interfaces. Le premier point de la méthode consiste donc à décomposer la structure (Figure 2.1). Dans cette méthode, les sous-structures et interfaces possèdent leurs propres variables et équations (admissibilité, équilibre et relation de comportement). Une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures Ω_E et $\Omega_{E'}$ réalise le

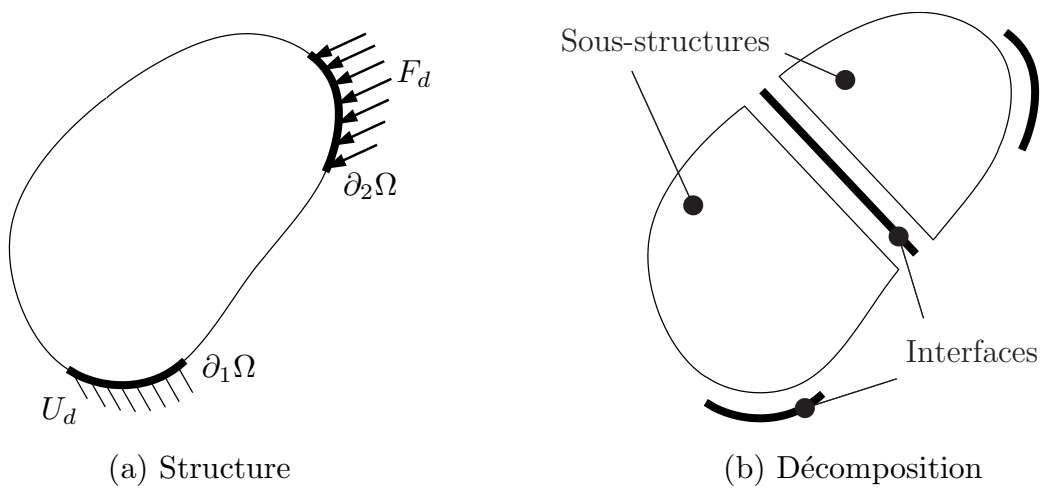


Figure 2.1: Décomposition d'une structure

lien entre les sous-structures. C'est une entité mécanique à part entière. Associées à un comportement, les interfaces contiennent toutes les informations du comportement non-linéaire de la structure (contact, frottement, ...). Elles sont également utilisées pour appliquer les différents chargements et prendre en compte les conditions aux limites. Sur une interface $\Gamma_{EE'}$, deux champs d'efforts F_E et $F_{E'}$ sont définis ainsi que deux champs de vitesses W_E et $W_{E'}$ (Figure 2.2). Par convention, les champs d'efforts F_E et $F_{E'}$ représentent l'action des interfaces sur les sous-structures et les champs de vitesses W_E et $W_{E'}$ sont les vitesses des sous-structures vues des interfaces. Une sous-structure Ω_E , est soumise à l'action de son environnement (les interfaces voisines $\Gamma_{EE'}$), définie par une distribution d'efforts F_E et de vitesses W_E sur sa frontière $\partial\Omega_E$. Le partitionnement du problème de référence en sous-structures et interfaces introduit de nouveaux problèmes sur chaque sous-structure Ω_E et interface $\Gamma_{EE'}$ de la structure couplés entre eux.

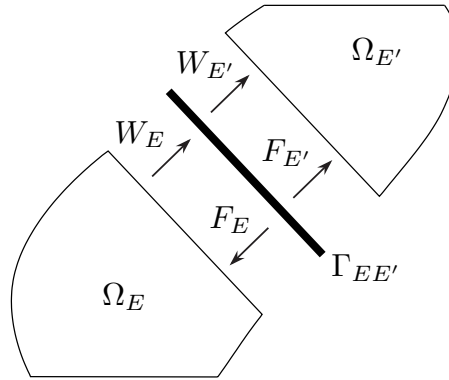


Figure 2.2: Echange sous-structures/Interfaces

1.2 Problème sous-structuré

Chaque sous-structure Ω_E est soumise à des forces de volumes f_d et à une densité d'efforts F_E sur la totalité de son bord $\partial\Omega_E$. Le champ de vitesse sur ce bord vaut W_E . Le problème est de trouver tous les couples (v_E, σ_E) définis sur $\Omega_E \times [0, T]$ et les couples (W_E, F_E) définis sur $\partial\Omega_E \times [0, T]$ qui vérifient les équations suivantes :

■ **Admissibilité cinématique** : les champs de vitesses v_E sont cinématiquement admissibles (CA , $v_E \in \mathcal{U}_{ad}^E$), c'est à dire :

- Régularité des champs de vitesses : $v_E \in \mathcal{U}^E$
- Conditions initiales : $\forall M \in \Omega_E$

$$u_E(t = 0) = U_E^0 \quad , \quad v_E(t = 0) = V_E^0 \quad (2.1)$$

- Equations de liaison : $\forall t \in [0, T], \forall M \in \partial\Omega_E$

$$v_E|_{\partial\Omega_E} = W_E \quad (2.2)$$

où \mathcal{U}^E est l'espace des champs de vitesses réguliers (à énergie finie), sur $\Omega_E \times [0, T]$. On définira également $\mathcal{U}_{ad,0}^E$ l'espace des champs v_E cinématiquement admissible à zéro (CA à 0) :

$$\mathcal{U}_{ad,0}^E = \{v_E(M, t) \mid v_E \in \mathcal{U}^E, v|_{\partial_1\Omega_E} = 0\}$$

■ **Admissibilité dynamique** : les champs de contrainte σ_E sont dynamiquement admissibles (DA , $\sigma_E \in \mathcal{S}_{ad}^E$), c'est à dire : $\forall t \in [0, T], \forall u^* \in \mathcal{U}_{ad,0}^E, \sigma_E \in \mathcal{S}^E$

$$\int_{\Omega_E} \left(\rho \frac{dv_E}{dt} + f_d \right) u^* d\Omega + \int_{\Omega_E} Tr(\sigma_E \varepsilon(u^*)) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} F_E u^* d\Gamma \quad (2.3)$$

où \mathcal{S}^E est l'ensemble des champs de contrainte σ symétriques et réguliers (à énergie finie).

■ **Relation de comportement :**

– Matériaux

$$\forall t \in [0, T], \forall M \in \Omega_E \quad \sigma_E = \mathbf{K}_E \varepsilon(u_E) \quad (2.4)$$

où \mathbf{K}_E est le tenseur de Hooke qui caractérise le matériau. $\varepsilon(u_E)$ désigne le tenseur de déformation, il est donné par :

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial M} + \left(\frac{\partial u}{\partial M} \right)^T \right] \quad (2.5)$$

– Interface : $\forall t \in [0, T], \forall M \in \Gamma_{EE'}$

$$(F_E, F_{E'}) = A_{\Gamma_{EE'}}(W_E, W_{E'}) \quad (2.6)$$

où le comportement est exprimé comme une loi d'évolution $A_{\Gamma_{EE'}}$. Des exemples de relation de comportement d'interfaces sont présentés dans la section suivante.

2 Description multiéchelle introduit au niveau des interfaces

L'approche *multiéchelle* ou *micro/macro* consiste à introduire une description à deux échelles des inconnues du problème. Cette description à deux échelles est introduite pour obtenir l'extensibilité numérique de la méthode. Elle a été proposée en statique (et quasi-statique) dans [Ladevèze et Dureisseix 2000, Ladevèze *et al.* 2001]. L'idée est de résoudre un problème homogénéisé global à l'échelle de la structure qui vérifie partiellement le comportement des interfaces. Pour cela, il faut définir les quantités macroscopiques (échelle grossière) et un moyen de passage entre l'échelle "micro" et "macro". Une fois ce choix effectué, le fait d'imposer aux quantités "macro" de vérifier des contraintes d'admissibilité conduit à la mise en place d'un problème macroscopique.

2.1 Définition des quantités macroscopiques

Cette description à deux échelles est réalisée uniquement sur les quantités d'interfaces et avant même toute discrétisation. Sur chaque interface, les champs cinématiques et statiques sont séparés en une partie macroscopique notée \square^M et une partie microscopique notée \square^m . Les parties macroscopiques sont recherchées dans des sous-espaces de dimension finie, et les parties microscopiques sont leurs compléments :

$$W = W^M + W^m \quad \text{et} \quad F = F^M + F^m$$

Le découplage entre les parties macroscopiques et microscopiques est réalisé au sens des travaux d'interface : les parties macroscopiques (respectivement microscopiques) des efforts d'interface ne travaillent pas dans les déplacements microscopiques (macroscopiques) d'interface. Mathématiquement, cette définition s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{EE'}} F.W \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{EE'}} F^M.W^M \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{EE'}} F^m.W^m \, d\Gamma$$

où encore :

$$\begin{aligned} \forall F^{M*} \quad & \int_{\Gamma_{EE'}} F^{M*}.W^m \, d\Gamma = 0 \\ \forall W^{M*} \quad & \int_{\Gamma_{EE'}} W^{M*}.F^m \, d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Cette relation s'interprète comme une condition d'orthogonalité au sens du produit scalaire $\mathcal{L}^2(\Gamma_{EE'})$ entre les parties macroscopiques et microscopiques. Pour respecter cette condition, les parties macroscopiques cinématiques et statiques sont choisies dans le même espace.

2.2 Choix des quantités macroscopiques

Les parties macroscopiques sont définies à partir d'un projecteur : $\Pi_{EE'}$. Il permet d'extraire la partie macroscopique d'une quantité d'interface. L'expression du projecteur est obtenue grâce à une base orthonormée $e_{EE'}^M = \{\dots, e_i^M, \dots\}$.

$$F^M = \Pi_{EE'}^M(F) = \sum (e_i^M, F) e_i^M$$

$$W^M = \Pi_{EE'}^M(W) = \sum (e_i^M, W) e_i^M$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Gamma_{EE'})$. Les premier éléments de la base $e_{EE'}^M$ sont les résultantes et moments de l'interface $\Gamma_{EE'}$. Il est ensuite possible d'enrichir la base de départ avec des fonctions polynomiales de la variable associée à une direction principale de l'interface.

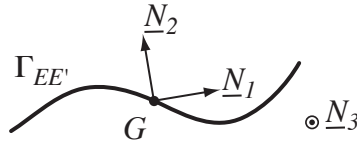


Figure 2.3: Interface linéique en deux dimensions.

■ **Cas bidimensionnel** : nous présentons ici la construction de la base $e_{EE'}^M$ dans le cas bidimensionnel. Pour cela nous considérons une interface linéique de centre de gravité G contenue dans le plan de normal N_3 telle que représentée figure 2.3. (N_1, N_2, N_3) désigne la base principale d'inertie de l'interface. Ces vecteurs sont ordonnés de telle manière que les moments d'inertie vérifient :

$$I_{(G,3)} = I_{(G,1)} + I_{(G,2)} \leq I_{(G,2)} \leq I_{(G,1)}$$

Les trois fonctions de base définies par la projection des résultantes et moments sont définies ci-dessous :

$$\begin{aligned} e_1^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} N_1 \\ e_2^M &= \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} N_2 \\ e_3^M &= \frac{1}{\sqrt{I_{(G,3)}}} (N_3 \wedge GM) \end{aligned}$$

Un choix classique consiste à utiliser un projecteur dit d'extraction de la « partie linéaire » des champs. Il nécessite l'introduction de la fonction de base supplémentaire suivante :

$$\tilde{e}_4^M = (N_1 \cdot GM) N_1$$

Cette fonction représente l'allongement de l'interface suivant la direction N_1 . Cette fonction de base n'est pas celle qui est ajoutée à la base, car elle n'est ni orthogonale aux autres fonctions de la base (au sens de la forme bilinéaire travail (\cdot, \cdot)), ni normée. La fonction ajoutée à la base est déduite de celle-ci par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. La figure 2.4 illustre cette base de fonctions affines.

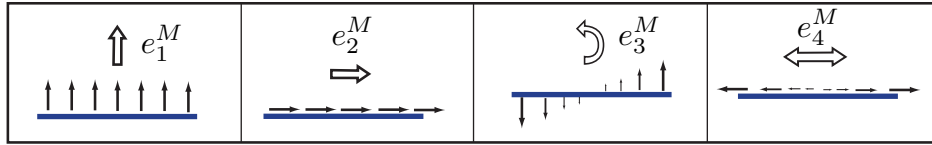


Figure 2.4: Base macro linéaire $\{e_i^M\}_{i=1..4}$

Par suite, les fonctions de degré plus élevé sont des polynômes de la même variable suivant les deux directions de l'espace [Loiseau 2001], on note leur définition pour tout $p \geq 2$:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{2p+1}^M &= (N_1 \cdot GM)^p N_2 \\ \tilde{e}_{2p+2}^M &= (N_1 \cdot GM)^p N_1\end{aligned}$$

De la même manière que pour \tilde{e}_4^M , la constitution d'une nouvelle base par ajout de fonctions de degrés plus élevés est complétée par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Les fonctions e_k^M sont ainsi déduites de \tilde{e}_k^M . On peut obtenir ainsi une base macroscopique définissant des projecteurs aptes à filtrer la partie polynomiale des champs d'interface d'un degré donné.

2.3 Admissibilité des quantités macroscopiques

Le dernier point important de l'approche *micro/macro* consiste à définir des conditions d'admissibilité sur les quantités macroscopiques. La condition la plus naturelle est d'imposer aux champs macroscopiques de vérifier le comportement d'interface. Cependant, il n'est pas toujours possible de définir une telle relation de comportement à l'échelle macroscopique.

■ **Rappel - Admissibilité macroscopique en statique/quasi-statique :** Dans [Ladevèze et Nouy 2003], il est proposé de n'imposer que la vérification de l'équilibre des efforts macroscopiques. Les efforts macroscopiques d'interface F^M sont

alors recherchés dans l'espace d'admissibilité suivant :

$$F^M \in \mathcal{F}_{ad}^M = \{F^M \mid \forall \Gamma_{EE'}, F_E^M + F_{E'}^M = 0\}$$

Ce type de condition d'admissibilité est valable quel que soit le type d'interfaces considérées (interface parfaite, de contact, cohésive, endommageable, ...). Ce choix permet de prendre en compte dans le problème macroscopique toutes les interfaces d'un problème. Associées à une base macroscopique contenant les résultantes et moments des interfaces, ces seules conditions d'admissibilité sont, de plus, suffisantes pour assurer l'extensibilité numérique de l'approche pour des problèmes de statique et de quasi-statique linéaire. Pour des problèmes de statique non-linéaire, l'absence de contrainte d'admissibilité portant sur les déplacements macroscopiques d'interface implique des difficultés numériques. Des solutions à ces problèmes sont détaillées dans [Kerfriden 2008].

En statique linéaire, le seul fait d'imposer l'équilibre des efforts macroscopiques de chaque interface (résultantes et moments) permet de construire un problème grossier qui permet la détermination de ces efforts macroscopiques sur toutes les interfaces en quelques itérations de la méthode, et ceci indépendamment du nombre de sous-structures. D'après le principe de Saint Venant, un effort à résultante et moment nuls a un effet localisé. Ainsi les parties microscopique ont un effet localisé et sont donc indépendantes d'une interface à l'autre. Dans ce cas, la convergence de l'approche est indépendante du nombre de sous-structures.

■ **Admissibilité macroscopique en dynamique** : en dynamique, le principe de Saint Venant ne s'applique plus, le raisonnement réalisé précédemment n'est donc plus valable. De plus, en dynamique, le fait de n'imposer que l'équilibre des efforts macroscopiques ne permet pas de les déterminer comme en statique. Ce type de condition d'admissibilité pour les quantités macroscopiques n'apporte aucune amélioration au niveau de la convergence de la méthode. Ce point est illustré dans le chapitre suivant (Chap 3.4).

En dynamique, les champs macroscopiques doivent donc vérifier le comportement d'interface. Pour les interfaces parfaites, nous recherchons les efforts F^M et vitesses macroscopiques W^M d'interface dans l'espace d'admissibilité suivant :

$$\begin{aligned} W^M \in \mathcal{W}_{ad}^M &= \{W^M \mid \forall \Gamma_{EE'}, W_E^M = W_{E'}^M\} \\ F^M \in \mathcal{F}_{ad}^M &= \{F^M \mid \forall \Gamma_{EE'}, F_E^M + F_{E'}^M = 0\} \end{aligned}$$

Ainsi le comportement à l'échelle macroscopique de chaque interface parfaite est vérifié strictement. Il est également possible de définir un espace d'admissibilité pour les champs macroscopiques des interfaces de type conditions aux limites. Cependant pour les interfaces de type contact avec ou sans frottement, il n'est pas

possible de définir une relation de comportement linéaire portant sur les quantités macroscopiques. Aucun traitement multiéchelle n'est réalisé sur ces interfaces de contact. En dynamique, nous reprenons la base macroscopique utilisée en statique composée des résultantes, moments et parties linéaires.

3 Algorithme de résolution : la méthode LaTIn

L'approche proposée ici s'appuie sur une technique de résolution de type LaTIn (LArge Time INcrément method). Proposée en 1985 dans [Ladevèze 1985c], elle s'inscrit dans un cadre général de résolution de problèmes non-linéaires d'évolution. Par itérations successives, l'état des inconnues est affiné jusqu'à convergence de la méthode. La convergence de la méthode a été démontrée pour un large type de matériaux dans [Ladevèze 1996].

Dans le cadre de cette étude, nous utilisons la méthode LaTIn pour résoudre le problème de dynamique sous-structuré avec prise en compte du contact avec frottement. Pour cela nous reprenons les deux premiers principes de la méthode :

- Séparation des difficultés
- Algorithme itératif à deux étapes

La méthode LaTIn comporte un troisième point (le point P3). Ce dernier point porte sur la représentation des inconnues : l'approximation radiale [Ladevèze 1985b] ou approximation PGD (Proper Generalized Decomposition). En quasi-statique, les champs inconnus sont décrits comme une somme de produits de fonctions du temps par des fonctions d'espace. Cette description des inconnues n'est pas adaptée au problème de dynamique. Le dernier point de la méthode LaTIn n'est donc pas utilisé dans ce travail.

On note $s = (W, F)$ l'ensemble des inconnues du problème. De part la technique de sous-structuration introduite, cet ensemble est composé de la somme des inconnues s_E définies sur $(\Omega_E, \Gamma_{EE'}) \times [0, T]$:

$$s = (W, F) = \sum_E (W_E, F_E)$$

3.1 Séparations des difficultés

La volonté est ici de ne pas traiter un problème qui soit à la fois global et non-linéaire. Ainsi, le premier point de la méthode propose un découpage des équations du problème en deux sous-espaces : \mathbf{A}_d et $\mathbf{\Gamma}$. Ces sous-espaces contiennent respectivement les solutions aux équations linéaires (éventuellement globales) et les solutions aux équations locales en variables d'espace (éventuellement non-linéaires).

Dans notre cas les ensembles \mathbf{A}_d et Γ sont définis par :

$$\mathbf{A}_d \left\| \begin{array}{l} - \text{L'admissibilité cinématique} \\ - \text{L'admissibilité dynamique} \\ - \text{Le comportement des sous-structures} \\ - \text{L'admissibilité de } F^M \text{ et } W^M \end{array} \right.$$

$$\Gamma \left\| \begin{array}{l} - \text{Le comportement des interfaces} \\ - \text{Les conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Ainsi on notera par la suite : $s = \sum_E (W_E, F_E)$, les champs d'interface solutions appartenant au premier sous-espace de solution \mathbf{A}_d , et $\hat{s} = \sum_E (\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$ les champs d'interface appartenant au deuxième sous-espace Γ . La solution de notre problème s_{ref} est l'intersection de ces deux sous-espaces :

$$s_{ref} = \mathbf{A}_d \cap \Gamma$$

3.2 Algorithme itératif à deux étapes

Le deuxième point de la méthode réside dans un algorithme itératif à deux étapes. L'algorithme détermine des approximations de la solution en recherchant successivement des éléments de \mathbf{A}_d et Γ , guidées par deux directions de recherche E^+ et E^- suivant que l'on vérifie l'un ou l'autre des groupes d'équations. La figure 2.5 propose une représentation graphique du processus itératif.

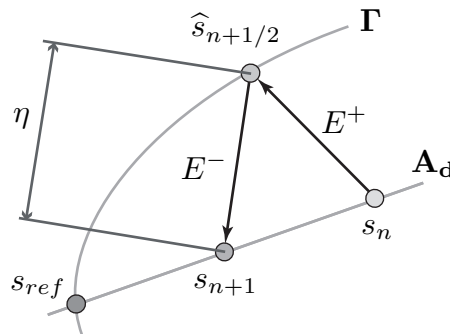


Figure 2.5: Une itération de la méthode LATIN

À l'itération $n + 1$ de la méthode, il s'agit de calculer s_{n+1} à partir de s_n . Pour cela deux étapes sont nécessaire :

- l'étape locale :

$$\text{trouver } \hat{s}_{n+1/2} \text{ connaissant } s_n \text{ vérifiant : } \left\{ \begin{array}{l} \hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma \\ \hat{s}_{n+1/2} - s_n \in E^+ \end{array} \right.$$

– l'étape linéaire :

$$\text{trouver } s_{n+1} \text{ connaissant } \widehat{s}_{n+1/2} \text{ vérifiant : } \begin{cases} s_{n+1} & \in \mathbf{A}_d \\ s_{n+1} - \widehat{s}_{n+1/2} & \in E^- \end{cases}$$

■ **Directions de recherche** : les directions de recherche relient les inconnues appartenant à Γ aux quantités appartenant à \mathbf{A}_d . Etant donné que seules les quantités d'interfaces interviennent à l'étape locale, les directions de recherche portent uniquement sur ces quantités. Pour une sous-structure Ω_E , les directions de recherche sont définies telles que :

– A l'étape locale :

$$\widehat{s}_{n+1/2} - s_n \in E^+ \iff \widehat{F}_E - F_E = \mathbb{k}^+(\widehat{W}_E - W_E) \quad (2.7)$$

– A l'étape linéaire :

$$s_{n+1} - \widehat{s}_{n+1/2} \in E^- \iff F_E - \widehat{F}_E = -\mathbb{k}^-(W_E - \widehat{W}_E) \quad (2.8)$$

où \mathbb{k}^+ et \mathbb{k}^- sont des opérateurs symétriques définis positifs qui sont des paramètres de la méthode.

■ **Contrôle et convergence de la stratégie** : la convergence de la stratégie monoéchelle (sans séparation d'échelle) a été démontrée dans [Ladevèze 1999] pour le type de problème que l'on traite dans ce travail. Le taux de convergence dépend cependant fortement des directions de recherche. Un seul paramètre scalaire est classiquement introduit pour les directions de recherche ; ainsi, chaque opérateur se résume à :

$$\mathbb{k}^+ = \mathbb{k}^- = \mathbf{k}_0 \mathbb{I}_d$$

Il a été montré dans [Lemoussu 2000] que la direction de recherche optimale en dynamique dans le cas 1D pour une interface parfaite était $\mathbf{k}_0 = \sqrt{\rho E}$ avec ρ la densité du matériau et E le module de Young du matériau. Cette valeur correspond à l'impédance du matériau qui, dans le cas d'un choc élastique, relie le saut de contrainte au saut de vitesse au niveau de l'interface. Cette valeur est également prise dans le cas 2D et 3D.

Un indicateur d'erreur η sert à contrôler la convergence de la méthode. Il permet d'interrompre le processus itératif lorsqu'un niveau d'erreur donné est atteint. A convergence la solution $\widehat{s}_{n+1/2}$ vérifie les équations du groupe Γ et s_n celle du groupe \mathbf{A}_d , aussi l'indicateur d'erreur est construit à partir du résidu entre les quantités s_{n+1} et $\widehat{s}_{n+1/2}$ à chaque itérations. L'indicateur d'erreur basé sur les directions de recherche est introduit de la façon suivante :

$$\eta^2 = \frac{\sum_{E \in \mathbf{E}} \|s_{n+1} - \widehat{s}_{n+1/2}\|_E^2}{\sum_{E \in \mathbf{E}} \|s_{n+1}\|_E^2 + \sum_{E \in \mathbf{E}} \|\widehat{s}_{n+1/2}\|_E^2}$$

où $\|s_{n+1}\|_E^2 = \int_0^T \int_{\partial\Omega_E} F_E \mathbf{k}_0^{-1} F_E + W_E \mathbf{k}_0 W_E dS dt$.

3.3 Ecriture des problèmes à résoudre

■ **Traitement de l'étape locale** : l'étape locale consiste à construire une solution $\hat{s}_{n+1/2}$ qui doit vérifier les équations du sous-espace Γ d'une part et d'autre part suivre la direction de recherche \mathbf{E}^+ ($\hat{s}_{n+1/2} - s_n \in \mathbf{E}^+$). A cette étape, la solution $s_n \in \mathbf{A}_d$ est connue. Dans notre cas, le sous-espace Γ contient uniquement les équations relatives aux interfaces et conditions aux limites. Ici les inconnues $\hat{s}_{n+1/2}$ sont les champs $(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_E, \widehat{F}_{E'})$ de chaque interface. Sur chaque interface $\Gamma_{EE'}$, le problème à résoudre est le suivant :

Trouver les champs $(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_E, \widehat{F}_{E'})$, tels que :

$$\forall t \in [0, T] \quad (\widehat{F}_E, \widehat{F}_{E'}) = A_{\Gamma_{EE'}}(\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'})$$

avec :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_E - F_E &= \mathbf{k}_0(\widehat{W}_E - W_E) \\ \widehat{F}_{E'} - F_{E'} &= \mathbf{k}_0(\widehat{W}_{E'} - W_{E'}) \end{aligned}$$

Cette étape conduit à la résolution de problèmes locaux en espace, éventuellement non-linéaires. La nature de ces problèmes dépend de la nature de l'interface considérée. Différents types d'interfaces sont détaillés dans le chapitre 3.2.

■ **Traitement de l'étape linéaire** : l'étape linéaire consiste à construire une solution s_{n+1} qui doit vérifier d'une part les équations du sous-espace \mathbf{A}_d et d'autre part suivre la direction de recherche \mathbf{E}^- ($s_{n+1} - \hat{s}_{n+1/2} \in \mathbf{E}^-$). A cette étape, la solution $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$ est connue. Ici les inconnues s_{n+1} sont les champs (W_E, F_E) de chaque sous-structure Ω_E . Ils peuvent être déterminés connaissant le champ de vitesse v_E :

$$\begin{aligned} W_E &= v_E|_{\partial\Omega_E} && \text{(champ de vitesse sur le bord)} \\ F_E &= \widehat{F}_E + \mathbf{k}_0(\widehat{W}_E - W_E) && \text{(direction de recherche)} \end{aligned}$$

Il s'agit donc à cette étape de déterminer les champs de vitesse v_E de chaque sous-structure. Les différentes équations que nous avons à notre disposition à cette étape sont : l'admissibilité dynamique (Eq. 2.3), la relation de comportement (Eq. 2.4), l'admissibilité cinématique (Eq. 2.1, 2.2), la direction de recherche \mathbf{E}^- (Eq. 2.8) et l'admissibilité des quantités macroscopiques $(W_E^M$ et $F_E^M)$. Le problème peut être résolu en variables cinématiques ou statiques. Le choix est porté ici sur une formulation en vitesse du problème.

En injectant les directions de recherche de l'étape linéaire, la relation de comportement des sous-structures et l'admissibilité cinématique dans l'équation d'équilibre de chaque sous-structure, des problèmes d'évolution sous-contraintes couplés sont à résoudre :

$$\text{Trouver } v_E \in \mathcal{V}^{[0,T]} \text{ tel que : } \forall t \in [0, T], \forall v^* \in \mathcal{U}_0^{[0,T]}, \sigma \in \mathcal{S}^{[0,T]},$$

$$\int_{\Omega_E} \left(\rho \frac{dv_E}{dt} + f_d \right) v^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \mathbf{k}_0 v_E v^* d\Gamma +$$

$$\int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(u_E) \varepsilon(v^*)) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{F}_E + \mathbf{k}_0 \widehat{W}_E) v^* d\Gamma \quad (2.9)$$

avec F^M et W^M admissibles :

pour chaque interface parfaite,

$$W_E^M = W_{E'}^M \quad \text{et} \quad F_E^M + F_{E'}^M = 0$$

pour chaque condition aux limites,

$$W_E^M = V_d^M \quad \text{ou bien} \quad F_E^M + F_d^M = 0$$

Nous présentons dans le chapitre suivant la technique employée pour résoudre ces problèmes couplés d'évolutions sous-contraintes.

Mise en oeuvre numérique et informatique

Ce chapitre présente les discrétisations spatiales et temporelles utilisées dans cette thèse ainsi que les différentes étapes de la stratégie sous forme discrète. Finalement différents exemples sont proposés pour illustrer le comportement de la stratégie.

Sommaire

1	Discrétisation	37
1.1	En espace	37
1.2	En temps	39
2	Traitement du schéma itératif	42
2.1	Etape locale	42
2.2	Etape linéaire	45
2.3	Algorithme de la stratégie	47
3	Une stratégie de calcul parallèle	48
3.1	Un code de calcul éléments finis	48
3.2	Parallélisation de la stratégie	51
4	Comportement de la stratégie	51
4.1	Comparaison entre les méthodes mono/multiéchelle	52

4.2	Extensibilité de la stratégie	56
4.3	Performance, Speed-up	59
4.4	Traitement du contact	60

1 Discrétisation

Dans cette section, nous exposons une écriture discrétisée des champs inconnus compatible avec une mise en oeuvre numérique et informatique du problème. Les champs étudiés ici dépendent à la fois de l'espace et du temps : pour les sous-structures $v_E(M, t) \in \Omega_E \times [0, T]$ et pour les interfaces $W_E(M, t) \in \Gamma_{EE'} \times [0, T]$.

1.1 En espace

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à l'approximation des fonctions d'espace. L'approximation en temps est traitée dans la partie suivante.

■ **Discrétisation des sous-structures** : les sous-structures du problème sont classiquement discrétisées par la technique des éléments finis. Ainsi leur champ déplacement u et leur tenseur de déformation $\varepsilon(u)$ sont représentés grâce à des fonctions approchées u^h . Ces fonctions d'espace approchées sont interpolées au moyen de fonctions de forme éléments finis standards :

$$\begin{aligned} u(M, t) &\approx u^h(M, t) = N^T U(t) \\ \varepsilon(u(M, t)) &\approx \varepsilon(u^h(M, t)) = [B] U(t) \end{aligned}$$

Avec ce choix d'approximation pour les fonctions d'espace, les problèmes sur les sous-structures (Eq. 2.9) sont équivalents à des problèmes d'évolution définis tels que :

$$[M_E] \ddot{U}_E(t) + [C_E] \dot{U}_E(t) + [K_E] U_E(t) = \widehat{F}_E(t) + \mathbf{k}_0 \widehat{W}_E(t) \quad (3.1)$$

où l'inconnue $U_E(t)$ est à cette étape un vecteur de fonctions du temps. Chaque fonction du temps caractérise l'évolution du déplacement d'un noeud du maillage. $[M_E]$ et $[K_E]$ sont les matrices de masse et de rigidité éléments finis classiques. La matrice $[C_E]$ est moins classique, elle est due à la direction de recherche (Eq. 2.8) qui relie l'effort F_E à une combinaison linéaire de la vitesse du bord W_E et des champs chapeaux $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$. Ces matrices sont définies par :

$$\begin{aligned} M_E &= \int_{\Omega_E} \rho_E N^T N d\Omega \\ C_E &= \int_{\partial\Omega_E} \mathbf{k}_0 N^T N dS \\ K_E &= \int_{\Omega_E} [B] \mathbf{K}_E [B] d\Omega \end{aligned}$$

avec ρ_E la masse volumique de la structure, \mathbf{k}_0 le paramètre de la méthode (direction de recherche) et \mathbf{K}_E le tenseur de Hooke de la sous-structure.

■ **Discrétisation des interfaces** : dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine mixte, un intérêt particulier doit être porté sur la discrétisation des quantités d'interfaces [Nouy 2003, Ladevèze *et al.* 2002].

Les champs de vitesse W_E et d'effort F_E d'une interface $\Gamma_{EE'}$ sont pris dans les espaces d'approximation $\mathcal{W}_{EE'}^h$ et $\mathcal{F}_{EE'}^h$. La démarche usuellement retenue dans le cadre de la méthode *micro/macro* est de choisir les champs F_E et W_E dans le même espace $\mathcal{W}_{EE'}^h = \mathcal{F}_{EE'}^h$. Le choix de ces espaces doit être réalisé avec soin. En effet, une distribution d'efforts F_E appartient a priori à l'espace $H^{-1/2}(\Gamma_{EE'})$ et, par conséquent, n'est pas nécessairement continue. Un choix classique consiste donc à interpolier les efforts de manière compatible avec la trace des contraintes sur le bord.

En pratique, cette discrétisation génère des modes oscillants d'interface dont l'énergie est très mal évaluée. Ces modes sont particulièrement visibles dans les zones à fort gradient ou à forte discontinuité. Pour plus de détails, on pourra se référer à [Nouy 2003] et [Ladevèze *et al.* 2002]. L'idée adoptée consiste alors à décrire les bords des sous-structures plus finement que les interfaces. On parle alors de sous-discrétisation des interfaces ou surdiscrétisation des sous-structures. Deux méthodes peuvent être envisagées. La méthode-p consiste à augmenter le degré d'interpolation des éléments de bord, en ajoutant, par exemple, des noeuds sur les arêtes de ces éléments. La méthode-h, quant à elle, nécessite le découpage des éléments de bord en sous-éléments, de manière à mettre en vis-a-vis un élément d'interface, avec plusieurs éléments de sous-structures. La figure 3.1 illustre ces deux méthodes.

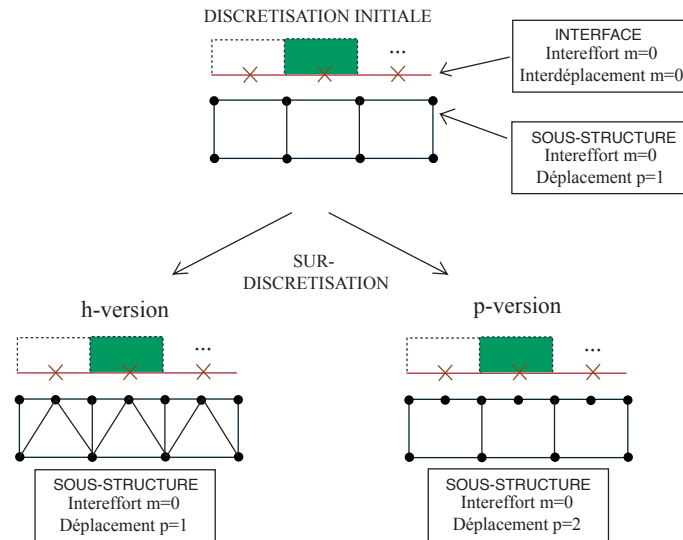


Figure 3.1: Modification des approximations classiques des interefforts et du déplacement bord des sous-structures pour une méthode éléments finis : « h- et p- versions »

1.2 En temps

Pour résoudre les problèmes d'évolution définis sur les sous-structures (Eq. 3.1), une approximation des dérivées par rapport au temps du champ de déplacement $U(t)$ doit être réalisée. Pour réaliser cette approximation, de nombreuses méthodes existent dans la littérature. On peut citer une première famille de méthodes qui se base sur l'utilisation de base réduite, elles décomposent les champs solutions sur une base modale de la structure étudiée. Cependant pour réaliser des simulations en dynamique rapide, ces méthodes nécessitent l'utilisation d'un nombre de modes très important pour pouvoir représenter les hautes fréquences présentes dans la solution. Le temps de calcul nécessaire à la construction d'une telle base devient alors exorbitant.

Dans ce travail, nous nous intéresserons uniquement aux méthodes d'intégration temporelle directes basées sur l'utilisation de schéma d'intégration temporelle incrémental. Les fonctions du temps sont interpolées à différents piquets de temps. Le pas de temps séparant deux piquets est pris ici constant, il est noté Δt . Le schéma d'intégration permet d'approximer les dérivées successives de ces fonctions. Ici, nous utilisons les schémas de type Newmark pour une intégration d'ordre 2. Ce type de schéma définit des relations linéaires entre les inconnues aux piquets de temps $t + \Delta t$ et t , en introduisant deux paramètres (β, γ) qui en fonction de leurs valeurs, vont définir les propriétés du schéma.

Les équations d'un schéma de type Newmark sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{U}(t + \Delta t) &= \dot{U}(t) + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{U}(t) + \Delta t\gamma\ddot{U}(t + \Delta t) \\ U(t + \Delta t) &= U(t) + \Delta t\dot{U}(t) + \Delta t^2(1/2 - \beta)\ddot{U}(t) + \Delta t^2\beta\ddot{U}(t + \Delta t)\end{aligned}$$

En associant les équations du schéma de Newmark au problème discrétisé en espace de chaque sous-structure (Eq. 3.1), on obtient des problèmes linéaires à résoudre à chaque piquet de temps :

$$\mathbb{S}_E \dot{U}_E(t + \Delta t) = \widehat{F}_E(t + \Delta t) + \mathbf{k}_0 \widehat{W}_E(t + \Delta t) + \mathbf{f}(t) \quad (3.2)$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_E &= \frac{1}{\gamma\Delta t}[M_E] + [C_E] + \frac{\beta\Delta t}{\gamma}[K_E] \\ \mathbf{f}(t) &= -[K_E]U(t) + \left(\frac{1}{\gamma\Delta t}[M_E] - \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\Delta t[K_E]\right)\dot{U}_E(t) \\ &\quad + \left(\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)[M_E] - \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma}\right)\Delta t^2[K_E]\right)\ddot{U}_E(t)\end{aligned}$$

De nombreuses études ont montré l'intérêt et l'importance de choisir avec soin le jeu de paramètres (β, γ) . Nous nous contenterons ici d'employer les schémas classiques suivant :

Schéma	γ	β
Différence centrée	$\frac{1}{2}$	0
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Accélération moyenne modifiée	$\frac{1}{2} + \alpha$	$\frac{(1+\alpha)^2}{4}$

Le choix d'un schéma d'intégration est généralement dicté par le contenu fréquentiel présent dans la solution. Les schémas précis du second ordre des différences centrées et de l'accélération moyenne sont le plus souvent utilisés pour leurs faibles erreurs d'amplitude et de périodicité qu'ils engendrent. Toutefois, ils conduisent à des difficultés lorsqu'il s'agit de représenter des fonctions qui ne sont plus suffisamment régulières, comme des fronts de choc. Il est dans ce cas nécessaire de filtrer les hautes fréquences qui perturbent la solution. Un amortissement numérique est alors ajouté. Le schéma de l'accélération moyenne modifiée permet d'introduire ce type d'amortissement, la valeur du paramètre α quantifie la valeur de l'amortissement introduit.

Dans ces travaux, nous avons développé notre méthode pour :

1. le schéma des différences centrées ($\beta = 0$). Ce schéma permet de résoudre des problèmes triviaux (diagonaux) à chaque piquet de temps, il est cependant conditionnellement stable.
2. des schémas de Newmark implicites ($\beta \neq 0$) comme cela avait déjà été réalisé dans [Lemoussu 2000]. Ces schémas ont la particularité d'être inconditionnellement stable. Ils permettent de plus d'utiliser une discrétisation temporelle relativement grossière lorsque les phénomènes étudiés le permettent (faible contenu fréquentiel).

En pratique le choix du schéma d'intégration dépendra du contenu fréquentiel de la solution et de la finesse du maillage employé. Le contenu fréquentiel de la solution impose une taille de pas de temps et une taille de maille minimale pour pouvoir représenter la solution. La finesse du maillage impose elle un autre pas de temps minimal pour que le schéma des différences centrées soit stable. Il s'agit donc de trouver le meilleur compromis entre coût de calcul (problèmes triviaux ou non) et le nombre de problèmes à résoudre (nombre de piquets de temps)

■ **Cas particulier du schéma des différences centrées** : en calcul de structure, le schéma des différences centrées est utilisé pour deux raisons. Premièrement en présence de non-linéarité matériau, le problème à résoudre à chaque pas de temps est explicite, aucun algorithme itératif de résolution n'est alors nécessaire. Deuxièmement il est possible d'utiliser une matrice de masse diagonalisée, les problèmes

à résoudre à chaque pas de temps sont alors triviaux (sans inversion de matrice).

Dans le cadre de notre stratégie de calcul, les problèmes que l'on doit résoudre à chaque pas de temps (Eq. 3.2) sont tous linéaires. Le seul intérêt du schéma des différences centrées est, dans notre cas, de l'utiliser en association avec une matrice de masse diagonalisée dans le but de rendre triviale la résolution de nos problèmes éléments finis. Pour atteindre cet objectif, il faut que les matrices \mathbb{S}_E soient diagonales. Il faut donc que les matrices C_E soient diagonales, comme les matrices de masse. Par défaut ces matrices, dues aux directions de recherche sur les interfaces, ne le sont pas. Il est cependant possible de les diagonaliser au même titre que la matrice de masse en utilisant des techniques similaires. Numériquement aucune dégradation de l'algorithme n'a été constatée, que ce soit au niveau de la convergence de la méthode ou bien au niveau de la taille du pas de temps critique.

Le schéma des différences centrées est conditionnellement stable. La condition de stabilité correspond à une taille de pas de temps qu'il ne faut pas dépasser. La valeur de ce pas de temps critique dépend d'un certain nombre de paramètres (taille des éléments, propriétés matériau, matrices de masse diagonalisée ou non, etc.). Dans notre cas, nous retrouvons les résultats classiques proposés dans [Belytschko *et al.* 2000] concernant la taille de pas de temps critique :

- en utilisant des matrices diagonalisées, le pas de temps critique est majoré par : $\Delta t_{crit} < l/c$ avec l la longueur du plus petit élément du maillage et c la vitesse des ondes longitudinales dans le matériau étudié.
- en utilisant des matrices consistantes pour M_E et C_E , le pas de temps critique est majoré par : $\Delta t_{crit} < l/\sqrt{3}c$, le pas de temps critique avec des matrices consistantes est plus petit qu'avec des matrices diagonales.

La stratégie de calcul que l'on propose ici est une méthode de décomposition de domaine mixte caractérisée par le paramètre de direction de recherche \mathbf{k}_0 , elle permet entre autre de gérer les non-linéarités de contact. Dans ce cas, elle s'apparente aux méthodes de type Lagrangien augmenté. Numériquement, aucune dégradation du pas de temps critique n'a été observée pour les valeurs de \mathbf{k}_0 préconisé en dynamique. Notre méthode permet donc de traiter des problèmes de contact avec le schéma des différences centrées sans dégrader le pas de temps critique. Ceci n'est pas le cas pour toutes les méthodes permettant de traiter des non-linéarité de contact comme par exemple : les méthodes de type pénalités. Dans le cas des méthodes de pénalités, le pas de temps critique peut décroître très fortement suivant la valeur du coefficient de pénalisation utilisée.

2 Traitement du schéma itératif

Nous exposons dans cette partie la forme discrétisée de l'approche en vue d'une implémentation informatique. Pour plus de clarté, l'indice renseignant le piquet de temps est omis dans les équations qui font intervenir uniquement des champs au même piquet de temps.

2.1 Etape locale

A l'étape locale, les problèmes à résoudre portent sur les interfaces, ils sont locaux éventuellement non-linéaires. Différents types d'interfaces sont détaillés dans la suite. Pour cela nous prenons le cas d'une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures Ω_E et $\Omega_{E'}$.

■ **Interface parfaite** : la solution $\widehat{s}_{n+1/2}$ doit vérifier d'une part la relation de comportement de l'interface parfaite ($\widehat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$) et d'autre part suivre la direction de recherche E^+ de chaque coté de l'interface (E et E'). Elle est donc solution du système suivant :

$$\begin{aligned} \widehat{W}_E &= \widehat{W}_{E'} && \text{(relation de comportement)} \\ \widehat{F}_E + \widehat{F}_{E'} &= 0 \\ \widehat{F}_E - F_E &= \mathbf{k}_0(\widehat{W}_E - W_E) && \text{(direction de recherche)} \\ \widehat{F}_{E'} - F_{E'} &= \mathbf{k}_0(\widehat{W}_{E'} - W_{E'}) \end{aligned}$$

Dans ce cas la solution à ces équations est triviale :

$$\begin{aligned} \widehat{W}_E &= \widehat{W}_{E'} = \frac{1}{2}[W_E + W_{E'} - \mathbf{k}_0^{-1}(F_E + F_{E'})] \\ \widehat{F}_E &= -\widehat{F}_{E'} = \frac{1}{2}[F_E - F_{E'} - \mathbf{k}_0(W_E - W_{E'})] \end{aligned} \quad (3.3)$$

■ **Interface avec l'extérieur** : ce type d'interface permet de généraliser la notion d'interface aux conditions aux limites. Prenons le cas d'une condition aux limites imposée sur une sous-structure Ω_E . Les inconnues sont alors $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$, elles doivent vérifier la condition aux limites imposée ainsi que la direction de recherche E^+ . La solution de ce problème est :

$$\left. \begin{aligned} \widehat{W}_E &= V_d \\ \widehat{F}_E &= F_E + \mathbf{k}_0(V_d - W_E) \end{aligned} \right\} \text{interface à vitesse imposée} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{F}_E &= F_d \\ \widehat{W}_E &= W_E + \mathbf{k}_0^{-1}(F_d - F_E) \end{aligned} \right\} \text{interface à effort imposé} \quad (3.5)$$

Avec cette technique, il est très facile de prendre en compte d'autre type de conditions aux limites (symétrie, vitesse normale imposé, ...).

■ **Interface de contact unilatéral avec frottement et jeu** : comme pour les autres types d'interface, la solution $\widehat{s}_{n+1/2}$ doit vérifier la relation de comportement de l'interface de contact avec frottement et jeu. Pour écrire ces conditions, les champs d'interfaces sont décomposés en une partie normale et une partie tangentielle : $X_E = (n_E \cdot X_E)n_E + \pi X_E$, où n_E est le vecteur normal unitaire orienté de E vers E' et π le projecteur tangentiel. Ainsi les conditions de contact unilatéral et de frottement s'écrivent :

$$\text{Si } n_E \cdot (\widehat{U}_E - \widehat{U}_{E'}) < g \text{ alors } \widehat{F}_E = \widehat{F}_{E'} = 0 \quad (\text{décollement})$$

$$\text{Si } n_E \cdot (\widehat{U}_E - \widehat{U}_{E'}) = g \text{ alors } \begin{cases} \widehat{F}_E + \widehat{F}_{E'} = 0 \\ n_E \cdot \widehat{F}_E \leq 0 \end{cases} \quad (\text{contact})$$

$$\text{Si } \|\pi \widehat{F}_E\| < \mu |n_E \cdot \widehat{F}_E| \text{ alors } \pi(\widehat{U}_E - \widehat{U}_{E'}) = 0 \quad (\text{adhérence})$$

$$\text{Si } \|\pi \widehat{F}_E\| = \mu |n_E \cdot \widehat{F}_E| \text{ alors } \begin{cases} \pi(\widehat{W}_E - \widehat{W}_{E'}) \wedge \pi \widehat{F}_E = 0 \\ \pi(\widehat{W}_E - \widehat{W}_{E'}) \cdot \pi \widehat{F}_E \geq 0 \end{cases} \quad (\text{glissement})$$

Deux indicateurs g_N and g_T [Champany *et al.* 1999] sont construits pour connaître l'état du contact (décollement, contact, glissement ou adhérence). Ils nous permettront de déterminer les composantes normales et tangentielles des champs inconnus $\widehat{W}_E, \widehat{W}_{E'}, \widehat{F}_E$ et $\widehat{F}_{E'}$

En chaque point de l'interface, l'**indicateur de contact normal** g_N est construit tel que :

$$2g_N = \frac{n_E \cdot (\widehat{U}_{E'} - \widehat{U}_E) + g}{\gamma \Delta t} + \frac{n_E \cdot (\widehat{F}_E - \widehat{F}_{E'})}{\mathbf{k}_0}$$

Ainsi, l'indicateur g_N permet de déterminer si il y a contact ou décollement. Si au point M on a :

$$\left. \begin{array}{l} n_E \cdot (\widehat{U}_{E'}(t) - \widehat{U}_E(t)) + g > 0 \\ n_E \cdot (\widehat{F}_E(t) - \widehat{F}_{E'}(t)) = 0 \end{array} \right\} \text{ alors on a décollement et } g_N(t) > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} n_E \cdot (\widehat{U}_{E'}(t) - \widehat{U}_E(t)) + g = 0 \\ n_E \cdot (\widehat{F}_E(t) - \widehat{F}_{E'}(t)) \leq 0 \end{array} \right\} \text{ alors on a contact et } g_N(t) \leq 0$$

Tel qu'il est défini précédemment, l'indicateur de contact g_N ne peut être calculé sous cette forme du fait qu'il est exprimé en fonction des champs inconnus. De plus

il fait intervenir les champs de déplacement \widehat{U}_E et $\widehat{U}_{E'}$ de l'interface, champs qui ne sont a priori ni des inconnues ni des données de l'étape locale. Un schéma du premier ordre est alors utilisé pour exprimer les champs de déplacement en fonction des champs de vitesses :

$$\widehat{U}_E(t) = \widehat{U}_E(t - \Delta t) + \Delta t(1 - \gamma)\widehat{W}_E(t - \Delta t) + \Delta t\gamma\widehat{W}_E(t)$$

L'utilisation du schéma d'intégration et des directions de recherche permet d'exprimer l'indicateur en fonction de quantités connues à cette étape :

$$2g_N(t) = n_E \cdot (P_{E'} - P_E) + \frac{n_E \cdot (F_E(t) - F_{E'}(t))}{\mathbf{k}_0}$$

avec $P_E = \widehat{U}_E(t - \Delta t) + (1 - \gamma)\Delta t\widehat{W}_E(t - \Delta t) + \gamma\Delta tW_{E'}(t)$.

Le calcul des composantes normales des champs inconnus est donc explicite :

- si $g_N(t) > 0$, on applique les équations d'une interface à efforts imposés (décollement, $n_E \cdot F_E = 0$).
- si $g_N(t) \leq 0$, on applique les équations d'une interface parfaite (contact).

En chaque point de l'interface, l'**indicateur de frottement tangentiel** g_T est construit tel que :

$$2g_T = \mathbf{k}_0\pi(\widehat{W}_{E'} - \widehat{W}_E) - \pi(\widehat{F}_{E'} - \widehat{F}_E)$$

A partir de la donnée $f = \mu|n_E \cdot \widehat{F}_E|$, on peut ainsi déterminer si on a adhérence ou glissement. Si au point M on a :

$$\left. \begin{array}{l} \|\pi(\widehat{W}_{E'} - \widehat{W}_E)\| = 0 \\ \|\pi\widehat{F}_{E'}\| = -\|\widehat{F}_E\| \leq f \end{array} \right\} \text{ alors on a adhérence et } \|g_T\| \leq f$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\pi(\widehat{W}_E - \widehat{W}_{E'}) \wedge \pi\widehat{F}_E\| = 0 \\ \|\pi\widehat{F}_{E'}\| = -\|\pi\widehat{F}_E\| = f \end{array} \right\} \text{ alors on a glissement et } \|g_T\| > f$$

De la même façon que précédemment, l'indicateur de frottement tangentiel ne peut être calculé sous cette forme. L'introduction de la direction de recherche dans l'expression précédente de l'indicateur permet de l'exprimer en fonction de champs connus :

$$2g_T = \mathbf{k}_0\pi(W_{E'} - W_E) - \pi(F_{E'} - F_E)$$

Le calcul des composantes tangentielles des champs inconnus est donc explicite :

- si $g_T > 0$, on applique les équations d'une interface à efforts imposés (glissement, $\pi F_E = f$).
- si $g_T \leq 0$, on applique les équations d'une interface parfaite (adhérence).

2.2 Etape linéaire

A l'étape linéaire, le problème consiste à construire s_{n+1} , cette solution est constituée des couples (W_E, F_E) de chaque sous-structure. W_E est la restriction sur le bord du champ de vitesse \dot{U}_E et F_E est obtenu grâce à la direction de recherche connaissant W_E . Le problème revient donc à déterminer le champ de vitesse \dot{U}_E de chaque sous-structure. Pour cela des problèmes d'évolution sous contrainte (Eq. 2.9) sont à résoudre. Après avoir réalisé une discrétisation spatiale et temporelle des problèmes sur les sous-structures (Eq. 3.2), le problème à résoudre est :

Trouver le champ de vitesse $\dot{U}_E(t)$ de chaque sous-structure : $\forall t \in [0, T]$,

$$\mathbb{S}_E \dot{U}_E(t) = \widehat{F}_E(t) + \mathbf{k}_0 \widehat{W}_E(t) + \mathbf{f}(t - \Delta t)$$

avec
$$\begin{cases} W_E^M = W_{E'}^M \\ F_E^M + F_{E'}^M = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce problème ne peut être résolu dans l'état. Pour assurer l'admissibilité des quantités macroscopiques, deux multiplicateurs de Lagrange \widetilde{W}_E^M et $\widetilde{W}_{E'}^M$ sont introduits sur chaque interface parfaite $\Gamma_{EE'}$ (Figure 3.2). L'introduction de ces multiplicateurs modifie d'une part la direction de recherche de l'étape linéaire :

$$F_E = \widehat{F}_E + \mathbf{k}_0 (\widehat{W}_E - W_E + \widetilde{W}_E^M) \quad (3.7)$$

D'autre part, elle donne lieu à de nouveaux problèmes que l'on appellera dans la suite problèmes "micro" :

$$\mathbb{S}_E \dot{U}_E(t) = \widehat{F}_E(t) + \mathbf{k}_0 (\widehat{W}_E(t) + \widetilde{W}_E^M(t)) + \mathbf{f}(t - \Delta t) \quad (3.8)$$

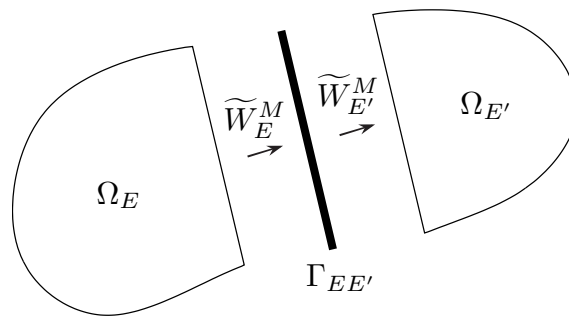


Figure 3.2: Multiplicateur de Lagrange

■ **Les problèmes "micro" :** l'équation 3.8 fait intervenir deux inconnues : le champ de vitesse \dot{U}_E et le multiplicateur \widetilde{W}_E^M et ne peut donc pas être résolu

directement. Nous décomposons alors le champ \dot{U}_E en deux champs \dot{U}_E^1 et \dot{U}_E^2 qui sont solutions du système suivant :

$$\mathbb{S}_E \dot{U}_E^1(t) = \widehat{F}_E(t) + \mathbf{k}_0 \widehat{W}_E(t) + \mathbb{f}(t - \Delta t) \quad (3.9)$$

$$\mathbb{S}_E \dot{U}_E^2(t) = \mathbf{k}_0 \widetilde{W}_E^M(t) \quad (3.10)$$

L'équation 3.9, que l'on appellera par la suite **problème "micro" 1**, peut être résolue après l'étape locale car il ne nécessite que la connaissance de l'histoire de la structure ($\mathbb{f}(t - \Delta t)$) et des champs \widehat{W}_E et \widehat{F}_E . L'équation 3.10, que l'on appellera par la suite **problème "micro" 2**, ne peut être résolue sans la connaissance de \widetilde{W}_E^M . Ce problème peut être cependant facilement inversé du fait du faible nombre de degré de liberté de \widetilde{W}_E^M . Alors on peut écrire la relation suivante :

$$W_E^{2,M} = \mathbf{L}_E^{W-1} \widetilde{W}_E^M \quad \text{avec} \quad W_E^{2,M} = \Pi_{\Gamma_{EE'}} \dot{U}_E^2|_{\Gamma_{EE'}}$$

où \mathbf{L}_E^W représente un opérateur de condensation sur les champs macroscopiques d'interface de la sous-structure Ω_E , il relie tous les multiplicateurs de la sous-structure aux vitesses macroscopiques de toutes les interfaces de la sous-structure. Ces opérateurs sont calculés une seule fois au début de l'algorithme pour toutes les sous-structures. $W_E^{2,M}$ est la partie macroscopique de la restriction sur le bord du champ de vitesse U_E^2 .

■ **Le problème "macro"** : l'admissibilité des quantités macroscopiques sur toutes les interfaces parfaites et l'opérateur de condensation de toutes les sous-structures donnent lieu à un problème à l'échelle de la structure entière que l'on appellera problème "macro".

Pour expliquer la construction de ce problème "macro", nous considérons une interface parfaite $\Gamma_{EE'}$ entre les sous-structures Ω_E et $\Omega_{E'}$. L'admissibilité des quantités macroscopiques de cette interface correspond à la continuité de la partie macroscopique du champ de vitesse de l'interface et de l'équilibre des parties macroscopiques des efforts de l'interface :

$$W_E^M = W_{E'}^M \quad \text{et} \quad F_E^M + F_{E'}^M = 0 \quad (3.11)$$

La décomposition du champ de vitesse de chaque sous-structure \dot{U}_E en $\dot{U}_E^1 + \dot{U}_E^2$ implique certaines relations sur les parties macroscopiques des champs d'interfaces.

$$\begin{aligned} W_E^M &= W_E^{1,M} + W_E^{2,M} \\ F_E^M &= F_E^{1,M} + F_E^{2,M} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si on introduit les relations précédentes (Eq. 3.12) dans l'équation de la direction de recherche modifié (Eq. 3.7), on obtient deux autres équations distinctes :

$$\begin{aligned} F_E^{1,M} - \widehat{F}_E^M + \mathbf{k}_0 (W_E^{1,M} - \widehat{W}_E^M) &= 0 \\ F_E^{2,M} + \mathbf{k}_0 (W_E^{2,M} - \widetilde{W}_E^M) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

■ **Remarque** : une seconde façon d'organiser le calcul est d'utiliser la méthode LaTIn en tant que solveur non-linéaire. Dans cette seconde version de la stratégie, l'obtention de la solution est réalisée de façon incrémentale. Les solutions de chaque piquet de temps sont déterminées les uns après les autres, l'équilibre de chaque piquet de temps est résolu en utilisant la méthode LaTIn. Cette seconde version de la stratégie (Algo. 2) sera appelée par la suite : **version incrémentale**.

3 Une stratégie de calcul parallèle

3.1 Un code de calcul éléments finis

La stratégie de calcul que nous présentons dans ce travail a été programmé et intégré dans un code de calcul existant. La base de ce code a été développée par D. Violeau au LMT Cachan durant sa thèse, ce code a ensuite connu diverses évolutions comme par exemple sa parallélisation (réalisé par A. Caignot durant sa thèse). Ce code de calcul, dédié à l'origine à la méthode LaTIn multiéchelle en statique puis quasi-statique, a été également utilisé comme base pour l'implémentation de modèle d'endommagement dans les composites, de modèle d'interaction fluide/structure, erreur en relation de comportement... Il a été programmé en C++/Python dans le cadre d'une plate-forme éléments finis développé par H. Leclerc [[Leclerc 2005](#)] au LMT Cachan. Dans cette plate-forme éléments finis, de multiples outils sont disponibles, notamment des procédures permettant :

- la lecture de fichiers de maillage,
- la génération de fichiers résultats,
- la génération de matrices éléments finis,
- l'utilisation de solveurs usuels,
- et bien d'autres encore ...

A l'issue de cette thèse, nous disposons ainsi d'un code de calcul performant permettant de simuler des problèmes de géométrie complexe en dynamique transitoire, et ceci en parallèle comme nous le verrons par la suite. Ce code propose diverses fonctionnalités :

- la prise en compte de condition initiale non-nulle (précharge),
- le choix entre deux types de schéma d'intégration temporelle (Newmark implicite et explicite),
- le choix entre deux versions de la stratégie LaTIn et incrémentale,
- de réaliser des calculs en parallèle (sur plusieurs processeurs),
- de réaliser des études paramétriques (Chap. 4).

Algorithme 1 La méthode LaTIn multiéchelle

Initialisation : $s_0 \in A_d$ **Itérer jusqu'à convergence****- Etape locale** (sur chaque processeur)**pour** $t = 0$ à T **faire**Détermination de $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$ connaissant (W_E, F_E)

(Eq. 3.3, 3.4 ...)

- Etape linéaire (pour tous les pas de temps)**pour** $t = 0$ à T **faire**

- Problème "micro" 1 (sur chaque processeur) :

Détermination de (\dot{U}_E^1, W_E^1) connaissant $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$

(Eq.3.9)

Calcul de $W_E^{1,M} = \Pi_{\gamma_{EE'}} W_E^1$,puis de $F_E^{1,M}$ (direction de recherche).

- Problème "macro" (sur un seul processeur) :

Détermination de $W_{EE'}^M$ connaissant $W_E^{1,M}$ et $F_E^{1,M}$

(Eq. 3.14)

Calcul de $\widetilde{W}_E^M = \mathbf{L}_E^W (W_{EE'}^M - W_E^{1,M})$

- Problème "micro" 2 (sur chaque processeur) :

Détermination de (\dot{U}_E^2, W_E^2) connaissant \widetilde{W}_E^M (Eq. 3.10)Calcul de $\dot{U}_E = \dot{U}_E^1 + \dot{U}_E^2$ puis $W_E = \dot{U}_E|_{\partial\Omega_E}$ et F_E (direction de recherche).**- Calcul de l'erreur**

Algorithme 2 La méthode LaTin multiéchelle (incrémentale)

pour $t = 0$ à T **faire**

Initialisation : $s_0 \in A_d$

Itérer jusqu'à convergence

- **Etape locale** (sur chaque processeur)

Détermination de $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$ connaissant (W_E, F_E)

(Eq. 3.3, 3.4 ...)

- **Etape linéaire**

• Problème "micro" 1 (sur chaque processeur) :

Détermination de (\dot{U}_E^1, W_E^1) connaissant $(\widehat{W}_E, \widehat{F}_E)$

(Eq.3.9)

Calcul de $W_E^{1,M} = \Pi_{\gamma_{EE'}} W_E^1$,

puis de $F_E^{1,M}$ (direction de recherche).

• Problème "macro" (sur un seul processeur) :

Détermination de $W_{EE'}^M$ connaissant $W_E^{1,M}$ et $F_E^{1,M}$

(Eq. 3.14)

Calcul de $\widetilde{W}_E^M = \mathbf{L}_E^W (W_{EE'}^M - W_E^{1,M})$

• Problème "micro" 2 (sur chaque processeur) :

Détermination de (\dot{U}_E^2, W_E^2) connaissant \widetilde{W}_E^M

(Eq. 3.10)

Calcul de $\dot{U}_E = \dot{U}_E^1 + \dot{U}_E^2$

puis $W_E = \dot{U}_E|_{\partial\Omega_E}$ et F_E (direction de recherche).

- **Calcul de l'erreur**

3.2 Parallélisation de la stratégie

La méthode LaTIn avec décomposition de domaine est par nature parfaitement adaptée aux architectures parallèles [Cognard *et al.* 1996, Champaney *et al.* 1997]. La parallélisation du code de calcul a été réalisée grâce aux bibliothèques MPI (Message Passing Interface). Ces bibliothèques permettent le transfert d'informations entre des machines appartenant à un réseau internet ou intranet. Ces bibliothèques ont permis de paralléliser le code : elles autorisent d'une part de pouvoir utiliser des architectures de type cluster de PC et d'autre part d'exécuter plusieurs sous-programmes en même temps sur une même machine et ainsi utiliser tous les coeurs disponibles sur une même machine.

■ **Répartition des données** : la première étape à réaliser dans la version parallèle de la stratégie est la répartition des sous-structures et interfaces sur les différents processeurs. Cette répartition est réalisée à l'aide de la bibliothèque METIS [Karypsis et Kumar 1998]. Cette bibliothèque permet de répartir la charge de calcul sur les différents processeurs et de minimiser le nombre de données qui doivent circuler entre les différents processeurs, et ceci dans le but d'obtenir de bonnes performances de l'algorithme parallèle (speed-up).

■ **Phase itérative** : une fois la répartition des sous-structures et interfaces effectuée, les différents opérateurs sont construits sur leur propre processeur. La phase itérative peut alors débuter. En ce qui concerne l'étape linéaire, les deux problèmes "micro" peuvent être résolus en parallèle (problèmes sur les sous-structures). Le problème "macro" est, quant à lui, un problème global sur toutes les interfaces. Il fait intervenir des données de tous les processeurs. Dans notre cas, ce problème n'est pas parallélisé. Il est résolu sur un seul processeur qui lui est dédié. Pendant cette résolution les autres processeurs attendent. En ce qui concerne l'assemblage du problème "macro", les contributions élémentaires de chaque sous-structure L_E^F sont assemblées sur les différents processeurs. Le problème "macro" (Eq. 3.14) est ensuite assemblé et factorisé sur le processeur qui lui est dédié. Des solutions ont été récemment développées pour traiter ce problème en parallèle [Kerfriden *et al.* 2009]. L'étape locale est également complètement parallélisée puisqu'il s'agit de résoudre des problèmes indépendants par interface.

4 Comportement de la stratégie

Nous allons illustrer le comportement de la stratégie de calcul présentée précédemment (version LaTIn) sur un exemple simple. Nous traitons le cas d'une onde de compression se propageant dans une poutre composée de deux lopins (Figure 3.3). On pourra traiter ce problème avec un modèle 1D, 2D ou bien 3D. Les dimensions

de la poutre sont : $1m$ pour la longueur (suivant \vec{x}) et $25cm$ pour la largeur (suivant \vec{y} et \vec{z}). Les propriétés matériau des lopins sont : $200GPa$ pour le module de Young, $7800kg/m^3$ pour la masse volumique et 0.3 pour le coefficient de poisson. La poutre est encadrée à une de ses extrémités et une vitesse normale à la surface est imposée sur son autre extrémité (suivant \vec{x}). L'évolution de cette vitesse imposée est présentée figure 3.3. Cette poutre est à l'instant initial au repos (tous ces champs sont nuls pour $t = 0$). L'étude de l'évolution de cette poutre est réalisée sur une durée de $400 \mu s$, ce temps d'étude représente approximativement un aller et retour de l'onde dans la poutre.

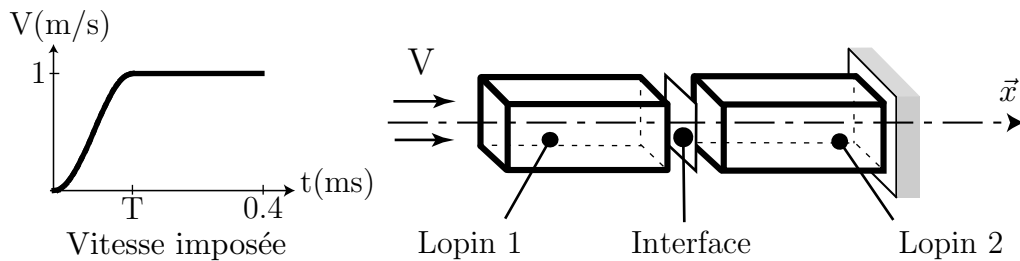


Figure 3.3: Problème académique

4.1 Comparaison entre les méthodes mono/multiéchelle

■ **Exemple 1D** : nous comparons ici les différentes versions de la méthode LaTIn sur l'exemple de la poutre 3.3 avec un modèle 1D. La barre est découpée en 4 sous-structures et toutes les interfaces sont parfaites. Nous utilisons ici les stratégies de calcul dans leurs versions LaTIn (non incrémentales, Chap. 3, Sec. 2.3).

Nous allons comparer la méthode LaTIn multiéchelle que l'on propose dans ce travail (équilibre des efforts macroscopiques et continuité des vitesses macroscopiques) d'une part à la méthode LaTIn monoéchelle ([Lemoussu 2000]) et d'autre part à la méthode LaTIn multiéchelle en effort ([Nouy 2003]). La version monoéchelle est similaire à la méthode développée ici excepté qu'il n'y a pas la séparation des échelles micro/macro, il n'y a donc pas de problème "macro" dans ce cas. La version multiéchelle en effort se différencie quand à elle au niveau des conditions d'admissibilité pour les quantités macroscopiques. Dans cette version, seul l'équilibre des efforts macroscopiques est imposé (Chap. 2, Sec. 2.3).

La figure 3.4 présente l'évolution du champ de vitesse dans la barre en fonction du temps aux 7 premières itérations de la méthode LaTIn monoéchelle. Cette figure explique le comportement de la stratégie monoéchelle qui a pu être constaté

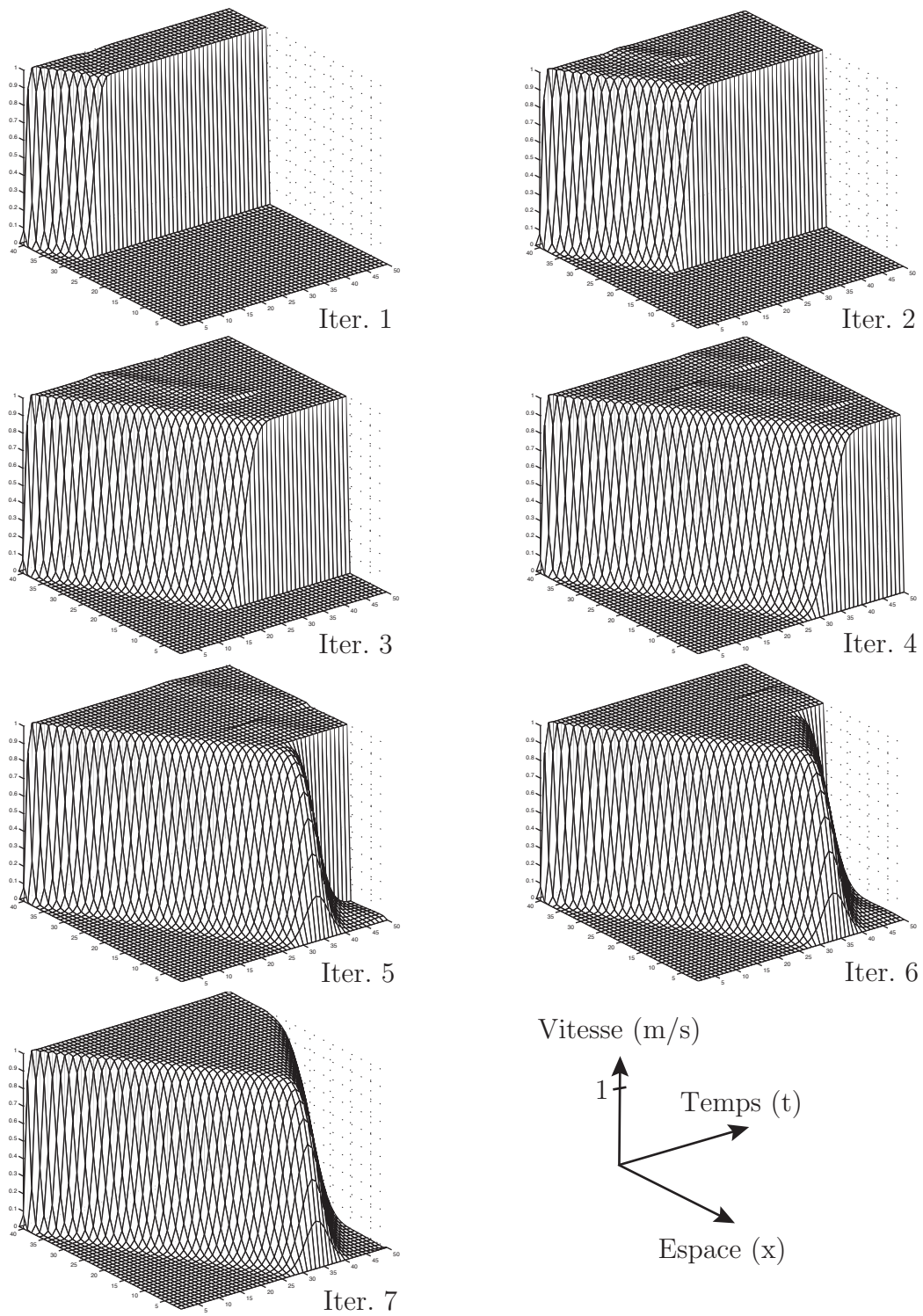


Figure 3.4: Les 7 premières itérations de la méthode monoéchelle

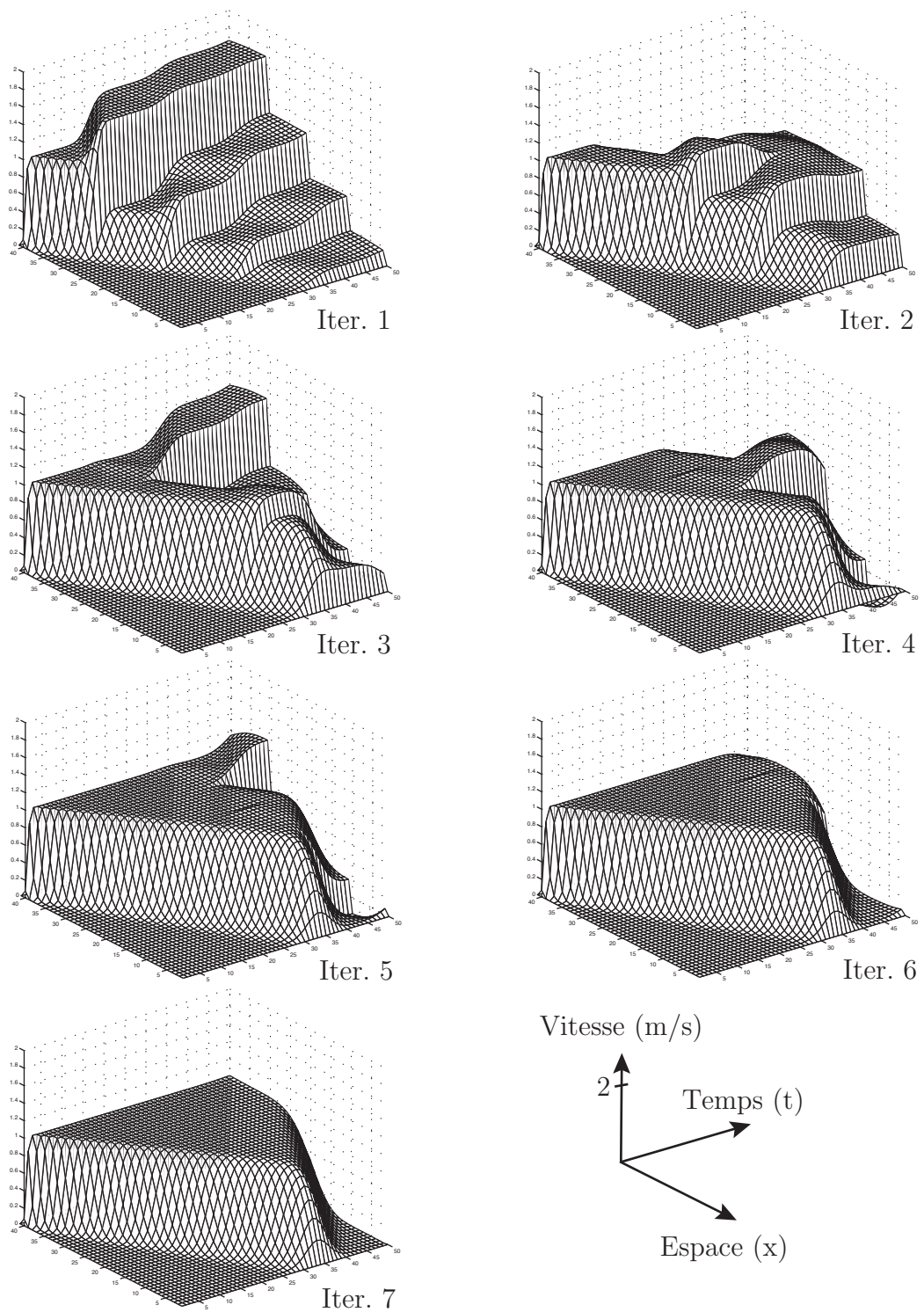


Figure 3.5: Les 7 premières itérations de la méthode multiéchelle en efforts

par le passé. Le signal se propage de sous-structure en sous-structure au cours des itérations. Ce comportement de la stratégie est la cause de la non-extensibilité en espace de la méthode monoéchelle, le taux de convergence de la méthode dépend ainsi fortement du nombre de sous-structures.

La figure 3.5 présente l'évolution du champ de vitesse dans la barre en fonction du temps aux 7 premières itérations de la méthode multiéchelle LaTIn en effort. Ici nous constatons qu'un des objectifs de la séparation des échelles est rempli, c'est à dire la propagation de l'information dans toute la structure dès la première itération. Cependant, bien qu'à chaque itération de la méthode les efforts de chaque interface

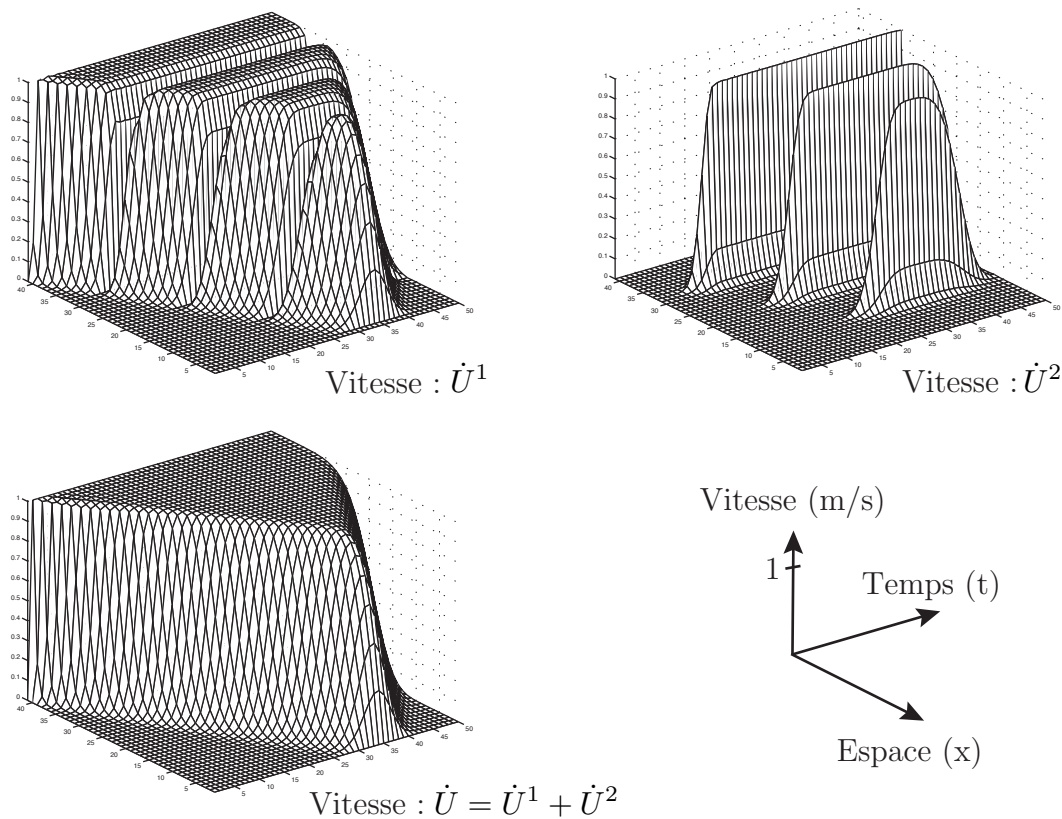


Figure 3.6: Résultat de la première itération de la méthode multiéchelle en efforts et vitesses

sont en équilibre, il faut le même nombre d'itérations que la méthode monoéchelle à cette stratégie pour converger. Ce petit exemple nous a permis de conclure que le seul équilibre des efforts macroscopiques ne permet pas, en dynamique, d'améliorer de quelque façon que ce soit la convergence la stratégie comme cela est le cas en statique et quasi-statique.

La figure 3.6 présente l'évolution du champ de vitesse (\dot{U}) dans la barre en fonction du temps à la première itération de la méthode LaTIn multiéchelle en effort et en vitesse que l'on propose ici. Cette figure présente également l'évolution des champs de vitesse \dot{U}^1 et \dot{U}^2 respectivement solutions des problèmes "micro" 1 et 2 de la première itération de la méthode (Eq. 3.9 et 3.10). Cette figure illustre le fait que pour un problème 1D, notre version de la méthode LaTIn multiéchelle converge en une seule itération. Dans le cas 1D, il n'y a qu'un seul degré de liberté par interface, le problème "macro" permet donc de vérifier de façon exacte le comportement de chaque interface parfaite. Le champ de vitesse \dot{U}^1 , solution du problème "micro" 1, est nul sur les interfaces. Ceci est dû au fait qu'à la première itération tous les champs d'interfaces sont initialisés à zéro. Le champ de vitesse \dot{U}^2 , solution du problème "micro" 2, n'est quand à lui non nul uniquement sur les interfaces. En effet le second membre du problème "micro" 2 n'est composé que des multiplicateurs de Lagrange, aucun effet d'histoire n'est alors pris en compte dans ce problème.

■ **Exemple 2D** : la figure 3.7 illustre le comportement de la stratégie de calcul multiéchelle dans un cas non dégénéré. Il s'agit du problème de la poutre 3.3 avec un modèle 2D. Ici la poutre est découpée en 8x4 sous-structures. Chaque sous-structure est composée de 400 ddls, le problème global représente 12,800 ddls. Il y a 52 interfaces parfaites et 8 interfaces de type condition au limite. Le problème "macro" comporte donc $(52+8)*4=240$ ddls. La figure présente le champ de vitesse dans la poutre à différents instants obtenu à la première itération (à gauche) et à convergence (à droite). On peut voir que le signal s'est propagé dès la première itération à l'ensemble de la structure et le champ de vitesse au niveau des interfaces est continu en moyenne (sur la base macroscopique).

4.2 Extensibilité de la stratégie

Un autre point important pour ce type de stratégie est la convergence de l'algorithme itératif. Pour une méthode de décomposition de domaine, son extensibilité est recherchée, elle caractérise la robustesse de l'approche lorsque le nombre de sous-structures augmente. La perte d'extensibilité se traduit par la dépendance du taux de convergence à la sous-structuration (nombre de sous-structures).

Pour illustrer ce point, nous traitons le problème (Figure 3.3) avec un modèle 3D pour différents nombres de sous-structures. Pour ces différents calculs, la discrétisation reste inchangée (même nombre de degrés de liberté total). Le maillage utilisé comporte environ 26,000 ddls. La figure 3.8 présente le maillage utilisé pour une décomposition du problème en 4 sous-structures. Le schéma des accélérations

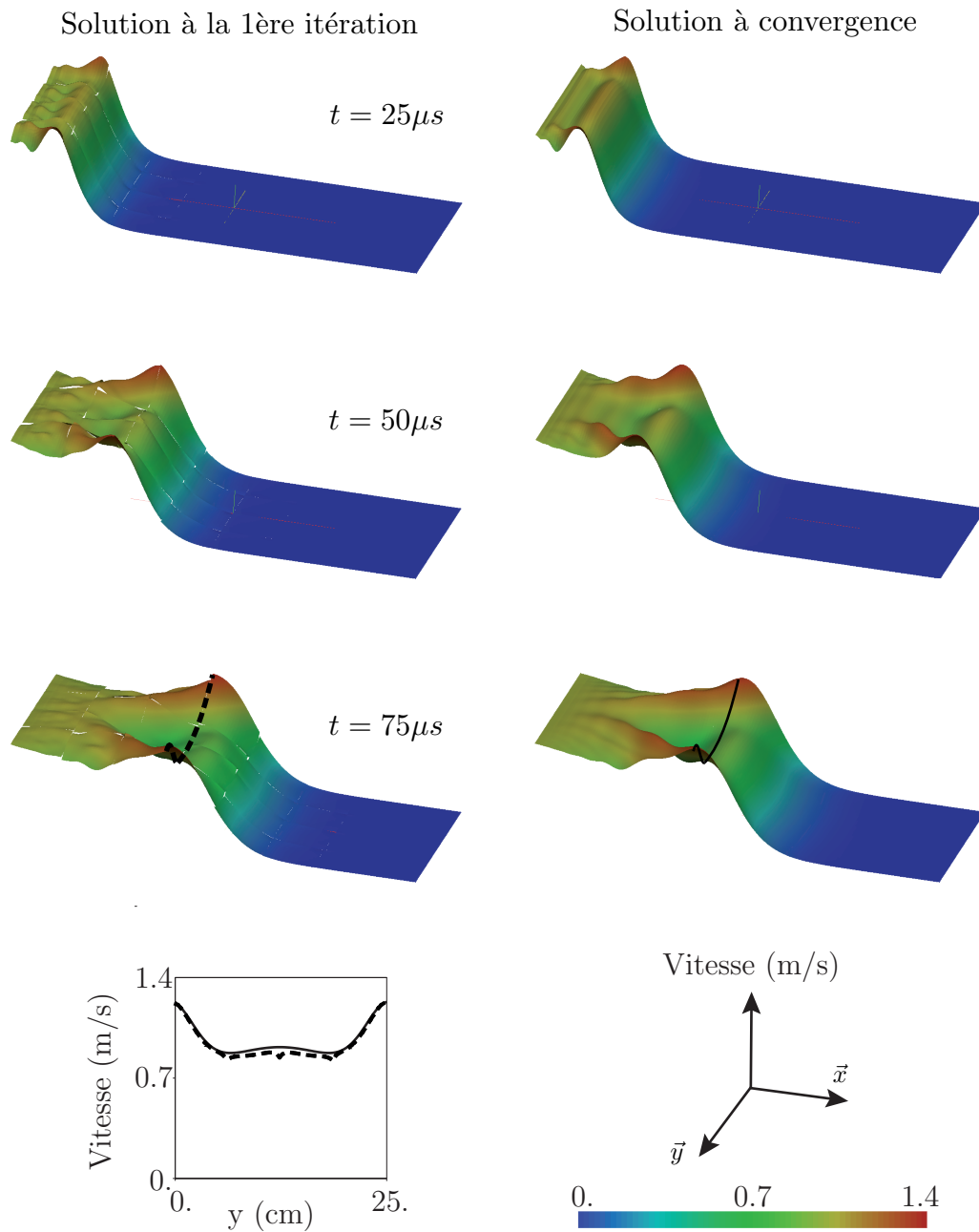


Figure 3.7: Champ de vitesse dans la poutre 2D

moyennes est utilisé avec 80 pas de temps de $5\mu s$ chacun.

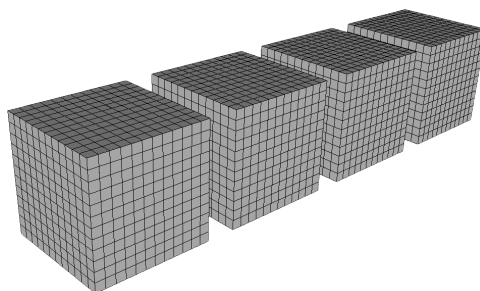


Figure 3.8: Maillage du problème académique avec quatre sous-structures

La figure 3.9 présente la convergence de la méthode monoéchelle pour différentes décompositions de la poutre : 4, 12 et 24 sous-structures. Les courbes montrent l'évolution de l'indicateur d'erreur LATIN au cours du processus itératif. On peut constater que le taux de convergence de la méthode monoéchelle dépend fortement du nombre de sous-structures. Ce type de comportement avait déjà été constaté par le passé [Lemoussu 2000].

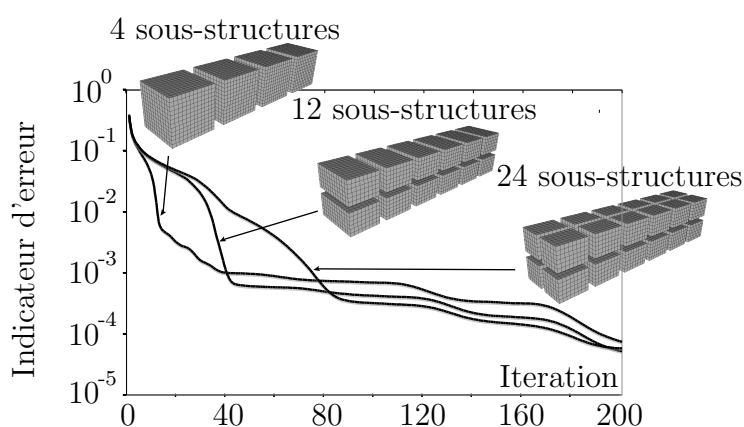


Figure 3.9: Taux de convergence de la méthode monoéchelle

La figure 3.10 présente, quand à elle, la convergence de la méthode multiéchelle pour les différentes décompositions. Ici le taux de convergence ne dépend pas de la sous-structuration. Ces courbes montrent que l'aspect multiéchelle introduit dans la méthode a permis de rendre la méthode de décomposition de domaine "extensible" numériquement.

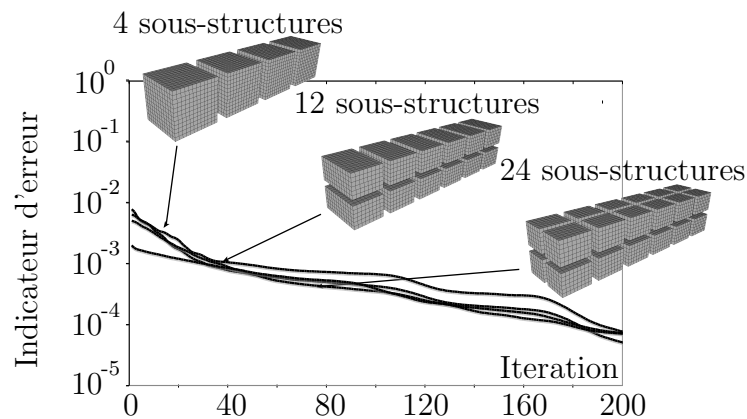


Figure 3.10: Taux de convergence de la méthode multiéchelle

4.3 Performance, Speed-up

La performance d'un algorithme parallèle est caractérisée par son speed-up. Le speed-up représente le gain en temps de calcul apporté par le parallélisme en fonction du nombre de processeurs utilisés pour résoudre le problème. La limite théorique est : si on prend n processeurs, le calcul sera n fois plus rapide. Dans la pratique, il y a des pertes de temps dues à des échanges d'informations nombreuses et répétées ou dues tout simplement à une mauvaise répartition des données et de la charge de calcul. L'avantage de la méthode LaTin est que les données échangées sont localisées uniquement sur les interfaces et sont donc d'une taille très faible.

La figure 3.11 représente le speed-up de la stratégie dans sa version LaTin obtenu pour le problème de la poutre (Figure 3.3) avec une modélisation 3D. Pour ce test, une décomposition en 144 sous-structures de la poutre est effectuée, des maillages de 1000 ddls sont utilisés pour chaque sous-structure et l'interface entre les deux lopins est considérée comme parfaite. Il faut tout d'abord remarquer que pour une résolution en parallèle, un processeur est réservé à la résolution du problème "macro" et à la centralisation des données. On peut constater que pour un nombre de processeurs faibles, le speed-up est très bon. Ce n'est plus le cas quand le nombre de processeurs augmente. Pour des nombres de processeurs élevés, le temps consacré à la résolution du problème "macro" est de moins en moins négligeable devant celui passé à la résolution des problèmes "micro". De plus, pour les nombres de processeurs élevés, les échanges entre les processeurs sont de plus en plus importants du fait qu'il y a de moins en moins de sous-structures par processeurs.

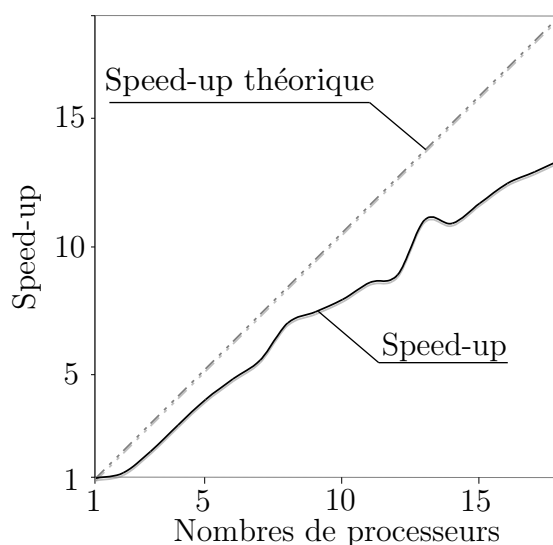


Figure 3.11: Speed-up pour le problème de la poutre.

4.4 Traitement du contact

La motivation de ce travail est d'étudier l'influence des propriétés d'interface de contact sur la réponse d'un assemblage en dynamique. Pour que ce type d'étude soit pertinente, il faut être en mesure de produire des simulations de qualité. La principale difficulté est ici la gestion des conditions de contact. Dans cette partie, nous illustrons la qualité que notre méthode permet d'obtenir au niveau des interfaces de contact. Pour cela nous comparons notre méthode à un code de calcul industriel LS-DYNA3D spécialisé dans les simulations en dynamique transitoire. Nous traitons le cas de la poutre (Figure 3.3). Chaque lopin est découpé en deux parties égales comme présenté figure 3.8. Nous considérons une interface de contact avec frottement et jeu initial entre les deux lopins. Le jeu initial est pris égal à $40 \mu m$. Ce jeu entre les deux lopins engendre une onde de choc lorsqu'ils entrent en contact. Nous utilisons les mêmes maillages pour les deux codes de calcul. Les discrétisations temporelles sont cependant différentes étant donné que LS-DYNA3D détermine lui-même la taille des pas de temps en fonction du maillage.

La figure 3.12 montre l'évolution au cours du temps du déplacement de deux points en vis à vis sur l'interface de contact. Pour ce qui concerne notre méthode : la méthode LATIN multiéchelle (Figure 3.12(a)), le comportement de l'interface de contact est vérifié. Le jeu initial est visible au début de l'étude, ensuite les deux lopins entre en contact. En revanche pour les résultats obtenus grâce au code calcul LS-DYNA3D (Figure 3.12(b)), le comportement de l'interface est mal vérifié. On peut constater que les deux parties de la poutre ne sont par moment pas en

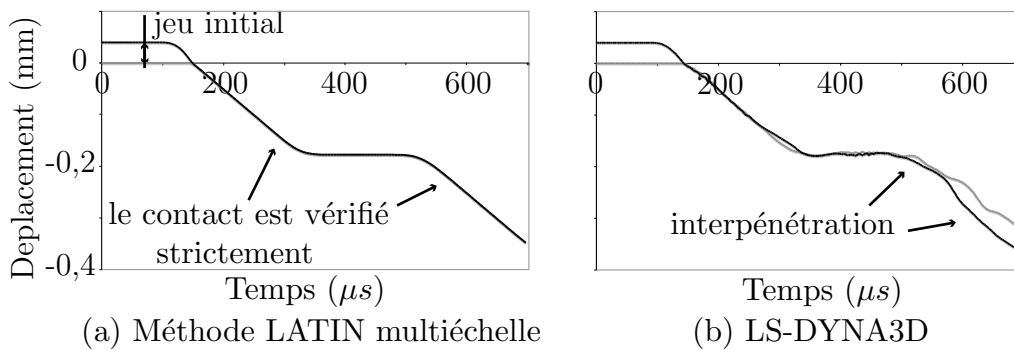


Figure 3.12: Déplacement de points de chaque coté de l'interface de contact.

contact alors qu'elles le devraient. On peut également observer de l'interpénétration des deux lopins à la fin de l'étude. Ces résultats montrent que contrairement à LS-DYNA3D, notre méthode est parfaitement adaptée à l'étude de l'influence des propriétés d'interface.

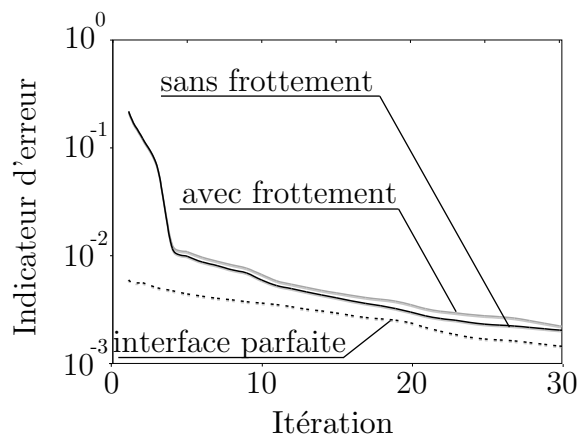


Figure 3.13: Convergence de la méthode (avec interface de contact)

La figure 3.13 montre l'évolution de l'indicateur d'erreur LATIN au cours des itérations pour différents types de calculs, l'interface entre les deux poutres est soit parfaite, soit de type contact sans frottement ou soit de type contact avec frottement. Ces courbes montrent que le taux de convergence pour les calculs avec contact et frottement et avec contact sans frottement sont sensiblement les mêmes. De plus, si on compare les taux de convergence du calcul avec interfaces parfaites et du calcul avec contact, on constate que la convergence de l'algorithme itératif n'est que très faiblement altérée par la prise en compte du contact ou du frottement. Cette différence de taux de convergence s'explique principalement par le fait qu'aucun traitement multiéchelle n'est réalisé sur l'interface de contact.

Le traitement du contact et du frottement ne détériore donc pas de façon excessive les propriétés de l'algorithme itératif comme cela peut être le cas avec d'autres méthodes. Ceci constitue un réel point fort de la méthode compte tenu de la complexité des équations qui régissent les conditions de contact et de frottement comparée aux équations d'interfaces parfaites.

Une stratégie de calcul dédiée aux études paramétriques

Ce chapitre expose tout d'abord un état de l'art non exhaustif des méthodes dédiées à la réalisation d'études paramétriques. Ensuite nous présentons une stratégie de calcul dédiée aux études paramétriques en dynamique portant sur les propriétés d'interfaces : la stratégie multirésolution basée sur la méthode LaTIn multiéchelle.

Sommaire

1	Etat de l'art : stratégie de calcul multirésolution	64
1.1	Préambule	64
1.2	Méthode de perturbation	65
1.3	Méthode de Neumann	67
1.4	Méthode spectrale	67
2	Stratégie multirésolution basée sur la méthode LaTIn	69
2.1	Principe	69
2.2	Application à la dynamique transitoire	70
2.3	Comportement de la stratégie	72

1 Etat de l'art : stratégie de calcul multirésolution

1.1 Préambule

Il existe plusieurs méthodes qui, à partir d'un calcul utilisant la Méthode des Éléments Finis, permettent :

- d'effectuer une *analyse paramétrique*,
- d'évaluer la variabilité de la réponse en fonction de données considérées comme déterministes ou aléatoires, c'est *l'analyse de sensibilité* [Lemaire et Macias 1997],
- d'évaluer une probabilité de défaillance pour une fonction de performance donnée, c'est *l'analyse de fiabilité* [Lemaire et Macias 1997].

Le terme de *Méthode des éléments Finis Stochastiques (SFEM-Stochastic Finite Element Method)* a été appliqué à la Méthode des éléments Finis (EF) dans laquelle les propriétés des matériaux, les données géométriques et/ou les charge-ments sont considérés comme des *processus stochastiques (champs aléatoires)*. Les deux grands types d'approches employés dans ces études sont :

- *Approche énumérative* : le domaine de variation de chaque paramètre étant subdivisé de façon déterministe, on effectue une analyse EF pour chaque cas (c'est-à-dire pour chaque valeur des paramètres). Elle est principalement employée dans des études d'optimisation pour lesquelles les répartitions des paramètres sont bien maîtrisées.
- *Simulation de Monte Carlo* [Rubinstein 1981] : les valeurs de chaque paramètre étant tirées aléatoirement (suivant leur répartition statistique respective), on effectue une analyse EF. Ce couple tirage-analyse est répété un certain nombre de fois dans le but d'avoir un ensemble de réponses représentatif. La difficulté de cette méthode porte sur le nombre de réalisations nécessaires, souvent élevé. Bien que coûteuse en terme de calcul, elle est robuste, et donne des résultats intéressants pour des problèmes linéaires et non linéaires.

Ces deux approches apparaissent gourmandes en temps de calculs. C'est pourquoi des techniques spécifiques ont été développées pour introduire au coeur d'une approche EF déterministe des caractéristiques aléatoires. On se limitera ici à la présentation des problèmes relatifs à la discrétisation des champs aléatoires et quelques techniques employées : *méthode de perturbation, méthode de Neumann* et *méthode spectrale*.

Il faut remarquer que la stratégie multirésolution proposée ici, couplée avec une technique de surface de réponses [Faravelli 1989, Schueller *et al.* 1991], permet de traiter plusieurs types de problèmes parmi ceux cités précédemment :

- analyse paramétrique,

- simulations de Monte-Carlo,
- analyse de fiabilité.

La stratégie multirésolution basée sur la méthode LaTIn permet d'étudier à moindre coût l'influence de la variation des paramètres décrivant une structure sur sa réponse. Les paramètres influençant cette réponse sont nombreux : géométrie, conditions aux limites, chargement, comportement du matériau... Pour pouvoir mener à bien une étude paramétrique, il faut connaître le domaine de variation de ces paramètres, domaine qui peut être décrit par une représentation déterministe ou aléatoire.

1.2 Méthode de perturbation

L'idée maîtresse de cette méthode [Shinozuka 1987, Hisada et Nakagiri 1985] est qu'en considérant petites les amplitudes de variations des différentes variables aléatoires de la structure, on développe en *série de Taylor*, autour de réalisations particulières de ces variables (le plus souvent leur moyenne), l'ensemble des paramètres structuraux (déplacements, rigidité, ...). Le comportement structural incertain est alors analysé en termes de moyenne et de variance. Ces techniques ont été principalement développées dans le cas linéaire, mais quelques extensions au non-linéaire existent.

■ **Cas linéaire** : considérons le cas d'un problème d'élasticité linéaire dans lequel seuls des paramètres matériaux (module d'Young, coefficient de Poisson) sont considérés comme des variables aléatoires. L'équation d'équilibre EF s'écrit alors :

$$\mathbb{K} \underline{q} = \underline{f}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \mathbb{K}(\nu_i) \\ \underline{q} &= \underline{q}(\nu_i) \\ \nu_i &= \bar{\nu}_i + \alpha_i \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

\mathbb{K} étant la matrice de rigidité globale de la structure, \underline{q} le vecteur des déplacements nodaux, \underline{f} le vecteur représentant les forces appliquées, ν_i les variables aléatoires décomposées en leur moyenne plus une variable aléatoire (α_i) à moyenne nulle. En

supposant petites les variations des α_i , \mathbb{K} et \underline{q} sont développés autour des $\bar{\nu}_i$:

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &= \mathbb{K}^0 + \sum_{k=1}^N \mathbb{K}_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbb{K}_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots \\ \underline{q} &= \underline{q}^0 + \sum_{k=1}^N \underline{q}_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \underline{q}_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^0 &= [\mathbb{K}]_{\alpha=0} & \mathbb{K}_k^I &= \left[\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \alpha_k} \right]_{\alpha=0} & \mathbb{K}_{kl}^{II} &= \left[\frac{\partial^2 \mathbb{K}}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} \right]_{\alpha=0} \\ \underline{q}^0 &= [\underline{q}]_{\alpha=0} & \underline{q}_k^I &= \left[\frac{\partial \underline{q}}{\partial \alpha_k} \right]_{\alpha=0} & \underline{q}_{kl}^{II} &= \left[\frac{\partial^2 \underline{q}}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} \right]_{\alpha=0}\end{aligned}$$

Les déplacements nodaux \underline{q}^0 , \underline{q}_k^I et \underline{q}_{kl}^{II} sont alors solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^0 \underline{q}^0 = \underline{f} \\ \mathbb{K}^0 \underline{q}_k^I = -\mathbb{K}_k^I \underline{q}^0 \\ \mathbb{K}^0 \underline{q}_{kl}^{II} = -(\mathbb{K}_k^I \underline{q}_l^I + \mathbb{K}_l^I \underline{q}_k^I + \mathbb{K}_{kl}^{II} \underline{q}^0) \\ \vdots \end{cases}$$

L'avantage de cette formulation est que la même matrice \mathbb{K}^0 (la partie dite déterministe) est utilisée pour toutes les résolutions. On se limite généralement à des développements d'ordre un, ou deux, des problèmes d'instabilités numériques apparaissant pour des ordres supérieurs. On peut facilement extraire les moyennes et covariances des déplacements, déformations, et contraintes. Les principaux inconvénients sont la nécessité d'évaluer des gradients, la limitation aux petites variations des variables aléatoires, et certains problèmes de convergence [Yamazaki *et al.* 1988].

■ **Autres Cas** : toujours basées sur les mêmes principes, les quelques rares méthodes de perturbations [Hisada 1988, Frangopol *et al.* 1996] développées dans le cas non linéaire nécessitent, le plus souvent, le calcul du gradient de la matrice de rigidité tangente à chaque pas. Il apparaît de plus certains problèmes pour la prise en compte correcte des décharges [Hisada 1988]. Seules quelques techniques donnent des résultats dans des cas très spécifiques [Deodatis et Shinozuka 1988, Teigen *et al.* 1991a -b]. Cette méthode a été également appliquée avec succès au cas de la dynamique [Liu *et al.* 1988, Qiu et Wang 2005].

1.3 Méthode de Neumann

Cette technique [Shinozuka 1987, Yamazaki *et al.* 1988], limitée au cas linéaire et appliquée à la dynamique dans [Zhao et Qiu 2000], tire partie d'un théorème mathématique : *le développement de Neumann*. La matrice de rigidité globale \mathbb{K} est décomposée en une partie dite déterministe, \mathbb{K}^0 , et une partie dite aléatoire, $\Delta\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^0 + \Delta\mathbb{K}$$

Le développement de Neumann de \mathbb{K}^{-1} a alors la forme suivante :

$$\mathbb{K}^{-1} = (\mathbb{K}^0 + \Delta\mathbb{K})^{-1} = (\mathbb{I} - \mathbb{P} + \mathbb{P}^2 + \mathbb{P}^3 - \dots)\mathbb{K}^{0^{-1}}$$

où :

$$\mathbb{P} = \mathbb{K}^{0^{-1}}\Delta\mathbb{K}$$

Le vecteur des déplacements nodaux \underline{q} est alors donné par la série :

$$\underline{q} = \underline{q}^0 - \underline{q}^1 + \underline{q}^2 - \underline{q}^3 + \dots$$

où :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^0 \underline{q}^0 &= \underline{f} \\ \mathbb{K}^0 \underline{q}^i &= \Delta\mathbb{K} \underline{q}^{i-1} \quad i = 1, \dots\end{aligned}$$

La convergence du développement de Neumann est assurée si les valeurs absolues de toutes les valeurs propres de \mathbb{P} sont plus petites que 1, ce qui nécessite des adaptations [Shinozuka et Yamazaki 1988]. La caractéristique la plus marquante de cette méthode, dans le cas de l'approche de Monte Carlo [Yamazaki *et al.* 1988], est la factorisation de \mathbb{K}^0 qu'il ne faut faire qu'une seule fois pour tous les échantillons, les tirages aléatoires modifiant seulement $\Delta\mathbb{K}$.

1.4 Méthode spectrale

Cette technique [Ghanem et Spanos 1991, Spanos *et al.* 1988], utilise la discrétisation des champs aléatoires par l'approche spectrale. Un champ est alors représenté par un ensemble de variables aléatoires. Supposons qu'un paramètre matériau local noté k_i soit aléatoire, on a alors :

$$k(\theta)_i = \bar{k}_i (1 + \delta\xi_i(\theta))$$

avec \bar{k}_i , valeur moyenne, ξ_i caractérise la variable aléatoire (typiquement donnée par sa fonction densité de probabilité), et δ un paramètre scalaire qui permet d'avoir

une distribution centrée réduite (moyenne nulle, écart type valant 1). En utilisant les fonctions du Chaos Polynomial à l'ordre p , on discrétise le champ dans l'espace de la variable aléatoire, soit par exemple pour le déplacement :

$$\underline{q}(\theta) = \sum_{j=0}^p q_j \psi_j(\theta) \text{ avec } \langle \psi_i(\theta) \psi_j(\theta) \rangle = c_i \delta_{ij}$$

$\langle \rangle$ désignant la covariance. Pour introduire la variabilité spatiale de k_i , on utilise la décomposition de Karhunen-Loeve [Loeve 1977]. L'expression de la matrice de raideur EF, qui dépend des paramètres aléatoire ξ_i , est alors :

$$\mathbb{K} = \sum_{i=0}^l \xi_i \mathbb{K}_i$$

En supposant de plus que le chargement est déterministe, alors, l'écriture de l'équilibre conduit à :

$$\sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^l \xi_i \psi_j \mathbb{K}_i q_j = f$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions ψ , on a alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}^{(00)} & \mathbb{K}^{(01)} & \dots & \dots & \mathbb{K}^{(0p)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbb{K}^{(jk)} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \mathbb{K}^{(p0)} & \mathbb{K}^{(p1)} & \dots & \dots & \mathbb{K}^{(pp)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \cdot \\ q_k \\ \cdot \\ q_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\mathbb{K}^{(jk)} = \sum_{i=0}^l \langle \xi_i \psi_j(\theta) \psi_k(\theta) \rangle \mathbb{K}_i$$

Le système à résoudre est de grande taille ($p \times$ nombre de degrés de libertés). Il permet d'obtenir les coefficients $q_0 \dots q_p$ associés à la décomposition sur la base du Chaos Polynomial à l'ordre p .

2 Stratégie multirésolution basée sur la méthode LaTIn

2.1 Principe

Le principe de la stratégie de calcul multirésolution basée sur la méthode LaTIn est de réutiliser la solution d'un problème, que l'on appellera problème "initial", pour résoudre un autre problème proche de part sa nature, que l'on qualifiera de "perturbé". Le but de cette stratégie de calcul est de réduire le coût de calcul nécessaire à la résolution du second problème grâce à la connaissance de la solution d'une autre simulation proche. En pratique, l'objectif est de réduire le nombre d'itérations nécessaire au deuxième problème grâce à une initialisation de la méthode que l'on espère de meilleure qualité qu'une simple initialisation à zéro (réalisée classiquement).

Il faut noter ici que la méthode LaTIn a été déclinée en un certain nombre de version suivant la nature du problème à traiter : avec ou sans décomposition de domaine, avec ou sans approximation PGD (Proper Generalized Decomposition, point P3 de la méthode), non-linéarité matériaux, non-linéarité d'interface... De ce fait la stratégie de calcul multirésolution de la méthode LaTIn s'est elle-même déclinée en plusieurs versions. Parmi les variantes de la méthode multirésolution, on peut distinguer deux grandes familles de méthodes :

- les approches qui utilisent l'approximation PGD (avec le point P3),
- les approches qui utilisent une représentation classique des inconnues (sans le point P3).

■ **Multirésolution avec le point P3** : lorsque l'approximation PGD est utilisée au sein de la méthode LaTIn, la méthode permet d'obtenir une représentation de la solution du problème sous forme d'une somme de produits de fonctions du temps par des fonctions de l'espace. L'idée de l'approche multirésolution est alors d'utiliser la base de fonction de l'espace du problème "initial" pour déterminer la solution du problème "perturbé". Cette base de fonctions de l'espace est utilisée en premier lieu pour déterminer des fonctions du temps pour le problème "perturbé". Cette initialisation étant plus riche, on s'attend à ce que pour chaque calcul, la méthode LaTIn n'effectue que peu d'itérations et ne génère que peu de nouvelles fonctions d'espace (qui est la partie la plus coûteuse du calcul).

■ **Multirésolution sans le point P3** : lorsque l'on utilise une représentation classique des inconnues, la stratégie de calcul multirésolution utilise le fait que la méthode LaTIn peut être initialisée par n'importe quelle solution qui vérifie les conditions d'admissibilité. Dans ce cas, on suppose que tous les problèmes à ré-

soudre ont les mêmes conditions limites. L'idée est alors de réutiliser la solution du problème "initial" pour initialiser la méthode lors de la résolution du problème "perturbé". Il n'est pas obligatoire de réutiliser la solution complète du problème "initial". Lors d'un calcul en décomposition de domaine, il est possible de ne réutiliser que les champs d'interfaces par exemple. Pour des calculs avec des non-linéarités matériaux, une initialisation portant uniquement sur la partie élastique de la solution est possible.

De manière générale, si la solution du problème "initial" et du problème "perturbé" sont assez proches, cette technique permet d'obtenir la solution du problème "perturbé" à moindre coût. En effet dans les meilleurs cas, seules quelques itérations de la méthode LaTIn sont nécessaires pour obtenir la solution du problème "perturbé". Cette stratégie a déjà été appliquée avec succès à de multiples problèmes statiques et quasi-statiques [Champany *et al.* 2008].

2.2 Application à la dynamique transitoire

Dans le cadre de cette thèse, la stratégie multirésolution que l'on propose se restreint aux cas où seuls les paramètres d'interfaces varient (coefficient de frottement, jeu initial). Nous utilisons ici la méthode LaTIn dans sa version décomposition de domaine sans approximation PGD (sans le point P3). La stratégie multirésolution consiste alors à initialiser la méthode LaTIn par la solution d'un précédent calcul. Pour réaliser cette initialisation, plusieurs choix s'offrent à nous.

1) L'initialisation peut être réalisée sur les champs d'interface ou bien sur les champs de sous-structure. Le choix s'est porté sur les champs d'interface pour deux raisons. La première est que les champs d'interfaces sont de tailles réduites par rapport aux champs de sous-structure, il est donc plus facile de les manipuler, stocker... La deuxième raison est que tout le comportement non-linéaire du problème est localisé dans les interfaces. La réponse des sous-structures étant linéaire, toute l'information du problème est donc inscrite dans les champs d'interface.

2) Lorsque l'on mène une étude paramétrique qui prend en compte plusieurs variables, l'organisation du calcul avec multirésolution peut poser certaines difficultés. L'efficacité de l'approche multirésolution étant directement liée au fait que les deux calculs consécutifs sont proches, il est nécessaire d'imposer une évolution des variables adaptée. A ce sujet, des techniques utilisant des métamodèles ont été développées pour optimiser le choix du calcul qui est utilisé pour l'initialisation [Soulie *et Boucard* 2009]. Il peut donc être judicieux de sauvegarder certains calculs. Dans notre cas, nous nous contentons d'imposer de faibles variations des paramètres d'un calcul à l'autre.

Algorithme 3 Etude paramétrique avec la méthode LaTin

Initialisation (pour la résolution du premier calcul) :

pour toutes les interfaces $\Gamma_{EE'}$ **faire** **si** c'est un bord **alors**

$\widehat{W}_E^0 = U_d$ ou $\widehat{F}_E^0 = F_d$

sinon

$\widehat{W}_E^0 = \widehat{W}_{E'}^0 = 0$

$\widehat{F}_E^0 = \widehat{F}_{E'}^0 = 0$

fin si**fin pour**Calcul des N problèmes :**pour** $k = 1$ à N **faire** Initialisation à partir du $(k - 1)$ ème problème : **pour toutes** les sous-structures Ω_E **faire**

$\widehat{W}_E^k = \widehat{W}_E^{k-1}$

$\widehat{F}_E^k = \widehat{F}_E^{k-1}$

fin pour Calcul de k ème problème : **tant que** l'erreur $> \epsilon$ **faire**

Etape locale

Etape linéaire

Calcul de l'erreur

fin tant que Sauvegarder la solution du k ème paramètre $(\widehat{W}_E^k, \widehat{F}_E^k)$ **fin pour**

En pratique, les champs (W_E, F_E) de toutes les interfaces sont initialisés. Cela permet dès la première itération d'un calcul pour un nouveau jeu de paramètre, de prendre en compte le changement de comportement des interfaces lors d'une étape locale. Le développement de la stratégie multirésolution s'appuie sur l'algorithme général présenté ci-après (Algorithme 3). Dans ce cas, seule la solution pour le dernier jeu de paramètre est sauvegardée. Le critère d'arrêt des calculs pour chaque jeu de paramètre correspond à un niveau d'erreur à atteindre (indicateur d'erreur $LaTIn$). Dans l'algorithme suivant, il est fixé à ϵ . D'un point de vue informatique, cette version de la stratégie multirésolution ne pose aucune difficulté majeure. Il s'agit uniquement d'être capable de reprendre un calcul en modifiant certains paramètres.

2.3 Comportement de la stratégie

A l'issue de cette présentation générale de la stratégie multirésolution proposée, nous allons maintenant la mettre en pratique sur un exemple d'application simple. Des exemples d'applications plus complexes sont présentés au chapitre 5. Ils permettront d'apprécier les qualités de la méthode, et à titre d'illustration, on montrera également son application pour la détermination de surfaces de réponses. Lorsque cela sera nécessaire, des précisions seront apportées sur les spécificités de chaque cas.

■ **Exemple d'application :** nous considérons tout d'abord un exemple académique : la propagation d'une onde de compression dans deux lopins 3D de matériaux différents (Figure 4.1), celui à gauche (module d'Young $E = 200 \text{ GPa}$, coefficient de poisson 0,3 et densité 7800 Kg/m^3) et celui à droite (module d'Young $E = 70 \text{ GPa}$, coefficient de poisson 0,34 et densité 2700 Kg/m^3). Le choc est généré en imposant une vitesse sur un des deux lopins. Nous considérons une interface de type contact unilatéral avec frottement entre les deux lopins.

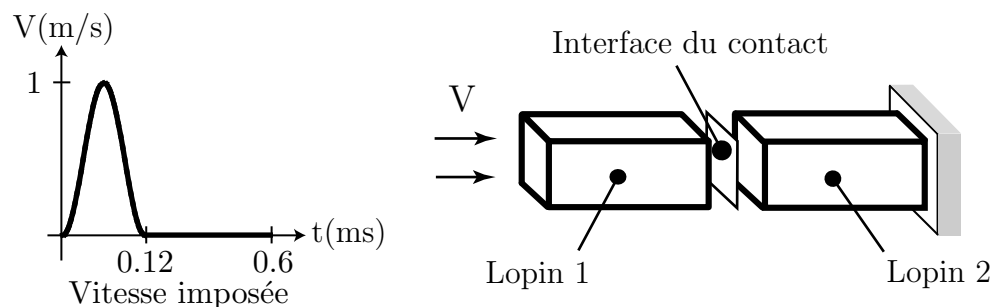


Figure 4.1: Deux lopins en contact.

L'étude paramétrique porte sur l'influence de la valeur du coefficient de frottement de l'interface entre les deux lopins sur la réponse de la structure. Nous allons réaliser cette étude pour 11 valeurs du coefficient de frottement f allant de 0. à 0.5 par pas de 0.05. Le temps de l'étude (0.6 ms) correspond à un aller et retour de l'onde dans la structure. Un schéma d'intégration temporel implicite et 200 pas de temps ont été utilisés.

Pour cette étude paramétrique, le critère d'arrêt pour chaque calcul a été fixé à 10^{-3} (indicateur d'erreur LaTIn). La figure 4.2 montre le champ de vitesse dans les deux lopins pour une valeur de f de 0.15 à l'instant où l'onde se transmet d'un lopin à l'autre. A cet instant, on peut constater un glissement au niveau de l'interface de contact. Ceci est dû au fait que les coefficients de poisson des deux lopins sont différents. La valeur du coefficient de frottement a donc réellement une influence sur la réponse de la structure. A d'autres instants de l'intervalle d'étude, du décollement s'opère également. Ces phénomènes sont dus au fait que les deux lopins ont des propriétés matériaux différents ce qui implique ici que leur impédance est différente. Ainsi lorsque l'onde arrive au niveau de l'interface, une partie de l'onde se transmet et l'autre se réfléchit.

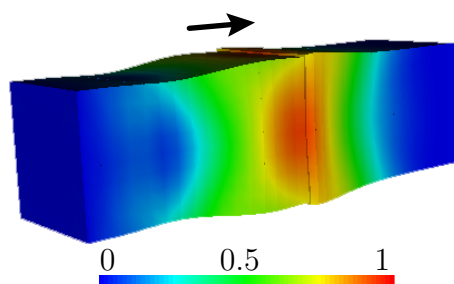


Figure 4.2: Champ de vitesse à $t = 0.15 \text{ ms}$ pour $f = 0.15 \text{ (m/s)}$.

■ **Comportement de la stratégie** : la figure 4.3 montre l'évolution de l'indicateur d'erreur LaTIn pendant l'étude paramétrique. Cette courbe permet de dresser plusieurs conclusions sur la stratégie multirésolution :

- l'initialisation d'un nouveau calcul par la solution d'un calcul précédent proche diminue l'erreur initiale du nouveau calcul. Ainsi, l'erreur initiale pour tous les calculs est inférieure à 10^{-2} alors que l'erreur initiale du premier calcul est de 10^{-1} .
- grâce à la stratégie multirésolution, le nombre d'itération pour atteindre le niveau d'erreur fixé est inférieur à celui nécessaire par une approche directe. 395 itérations sont nécessaires pour $f = 0$ (approche directe sans multirésolution) alors que le calcul pour $f = 0.05$ ne nécessite que 50 itérations. Cette

remarque est également vraie lorsque l'on fait croire progressivement f .

Pour réaliser cette étude paramétrique, 565 itérations ont été nécessaires. Une approche directe aurait nécessitée plus de 4300 itérations (11×395 itérations). L'approche multirésolution a permis pour cet exemple un gain en temps de calcul de 8 par rapport à une approche directe (11 calculs indépendants).

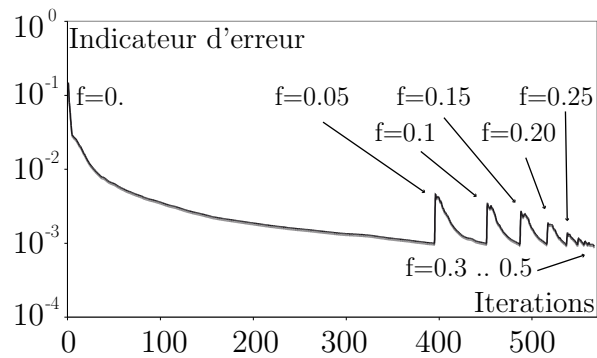


Figure 4.3: Erreur en fonction des itérations.

Exemples de simulation et d'application

Nous proposons ici des simulations d'assemblages réalisées par le code de calcul développé au cours de cette thèse. Ce chapitre présente d'une part des exemples d'étude paramétrique : le premier porte sur un exemple académique, le deuxième concerne une liaison boulonnée représentative d'une liaison du SYLDA5 d'Ariane 5 et le dernier l'étude d'un matériau hétérogène. D'autre part l'exemple de la liaison boulonnée ainsi que l'étude du matériau hétérogène illustreront les capacités du code de calcul en terme de performance et de taille de problème qu'il est maintenant envisageable de traiter.

Sommaire

1	Exemple d'étude paramétrique sur un cas académique	76
2	Exemple d'assemblage - liaison "SSS"	82
2.1	Etude paramétrique	86
2.2	Calcul haute performance	89
3	Matériaux fortement hétérogène	91
3.1	Etude paramétrique	93
3.2	Calcul haute performance	95

1 Exemple d'étude paramétrique sur un cas académique

Pour cette première application de la stratégie de calcul multirésolution, on s'intéresse à un exemple tiré d'un benchmark proposé par le groupe de travail CSMA. Ce groupe de travail s'intéresse aux méthodes numériques de résolution des problèmes de contact unilatéral et de frottement. Pour cette étude paramétrique, il s'agit de regarder l'influence du coefficient de frottement sur deux zones de contact.

■ **Présentation du problème :** le problème est présenté sur la figure 5.1. La structure étudiée est composée de trois lopins parallélépipédiques de 30 mm de long pour 15 mm de large chacun : le lopin central (module d'Young $E = 150\text{ GPa}$, coefficient de poisson $0,45$ et densité 7800 Kg/m^3) et les deux autres lopins (module d'Young $E = 200\text{ GPa}$, coefficient de poisson $0,3$ et densité 7800 Kg/m^3).

Du contact unilatéral avec frottement est considéré entre les lopins. Les coefficients de frottement associés à la loi de Coulomb aux interfaces 1 et 2 sont notés f_1 et f_2 . Le chargement se compose d'un déplacement vertical ($U = -0,1\text{ mm}$, suivant \vec{z}) imposé tout au long de l'étude sur la partie supérieure de la structure. Il permet de créer une pression sur les zones de contact et correspond à une précharge statique de la structure. L'autre partie du chargement est une pression latérale (voir Figure 5.1) appliquée sur le lopin central qui provoque le glissement de celui-ci suivant \vec{x} .

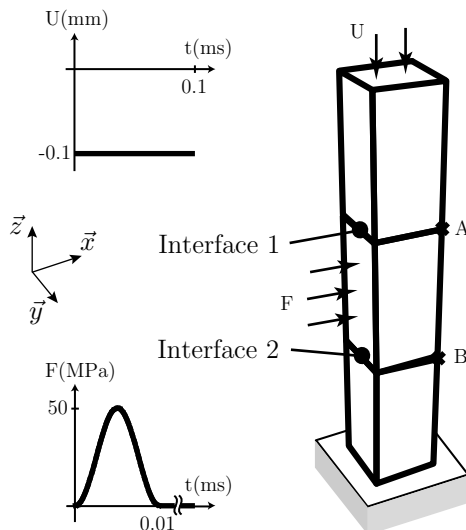


Figure 5.1: Description de l'exemple

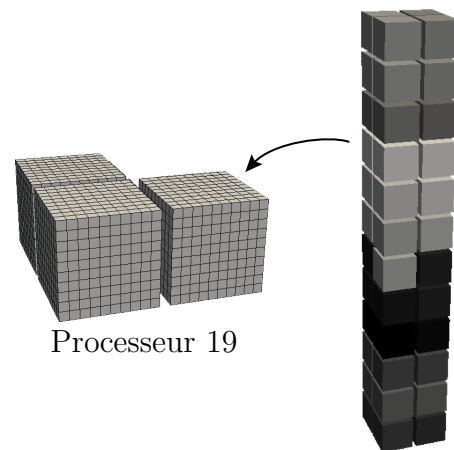


Figure 5.2: Répartition processeur

Les caractéristiques des matériaux et les paramètres de ce problème (le temps d'application de la pression, la valeur de la précharge, ...) ont été choisis de telle sorte que l'onde de pression latérale provoque un glissement du lopin central durant l'étude et qu'il soit en adhérence à la fin de l'étude. Cela permet ainsi d'avoir un exemple qui est entièrement piloté par les valeurs des différents coefficients de frottement. Dans la suite, il s'agira d'étudier l'influence des coefficients de frottement sur le glissement résiduel à la fin de l'étude aux points A et B.

Chaque lopin est constitué de 16 sous-structures dont le maillage éléments-finis représente $10 \times 10 \times 10$ éléments (éléments linéaires à 8 noeuds, Figure 5.2). Le nombre total d'éléments est de 48,000 pour 191,000 degrés de liberté. Ce maillage permet une représentation correcte des différents champs du problème (champ de contrainte, vitesse de glissement des interfaces de contact, ...) comme nous le verrons dans la suite. Le temps d'étude est de 0.1 ms, 50 pas de temps et un schéma d'intégration implicite sont utilisés. Chaque calcul élémentaire (pour un jeu de paramètre) est réalisé en parallèle sur 16 processeurs avec la stratégie dans sa version LaTin. La figure 5.2 présente la répartition des sous-structures sur les différents processeurs.

■ **Résultats** ($f_1 = 0,1$ et $f_2 = 0,1$) : la figure 5.3 montre l'évolution du déplacement et de la vitesse au point A de chaque côté de l'interface de contact, en noir les champs du lopin supérieur et en gris les champs du lopin central. Le glissement correspond à la différence entre les deux courbes de déplacement et la vitesse de glissement à la différence entre les deux courbes de vitesse. On constate ainsi qu'au point A, le glissement n'apparaît en fait qu'entre 0,04 ms et 0,05 ms. Le glissement résiduel à la fin de l'étude en ce point est donc uniquement dû à cette phase de glissement.

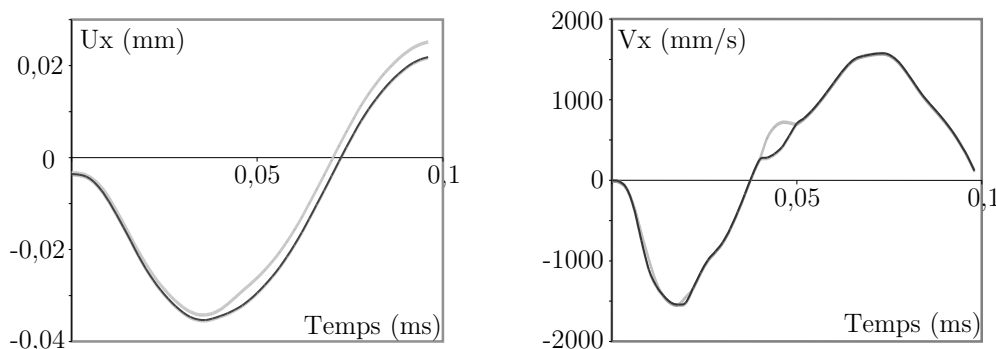


Figure 5.3: Evolution du déplacement et de la vitesse au point A (suivant \vec{x})

La figure 5.4 présente la valeur de la vitesse de glissement sur l'interface 1 pendant la phase de glissement du point A. Ces trois cartes de glissement permettent de vérifier que la discrétisation choisie pour le problème permet de représenter correctement le glissement qui se produit sur les interfaces de contact.

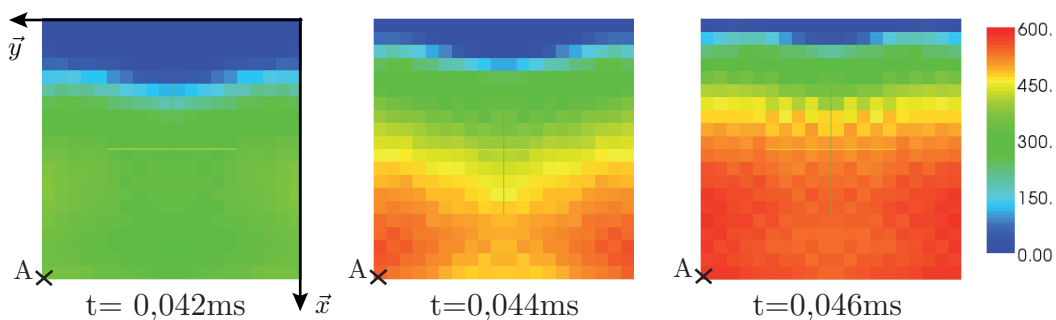


Figure 5.4: Vitesse de glissement sur l'interface 1 (mm/s)

Pour finir, la figure 5.5 présente le champ de contrainte de Von Mises dans la structure à différents instants de l'étude (au début). Ces figures permettent d'une part de confirmer le fait que la discrétisation en espace du problème permet de représenter correctement les phénomènes mis en jeu dans les trois lopins (flexion et compression). D'autre part, ces figures permettent de donner l'allure générale de la solution du problème. A cette échelle, ce problème peut s'assimiler à une poutre en compression, excitée suivant son premier mode de flexion.

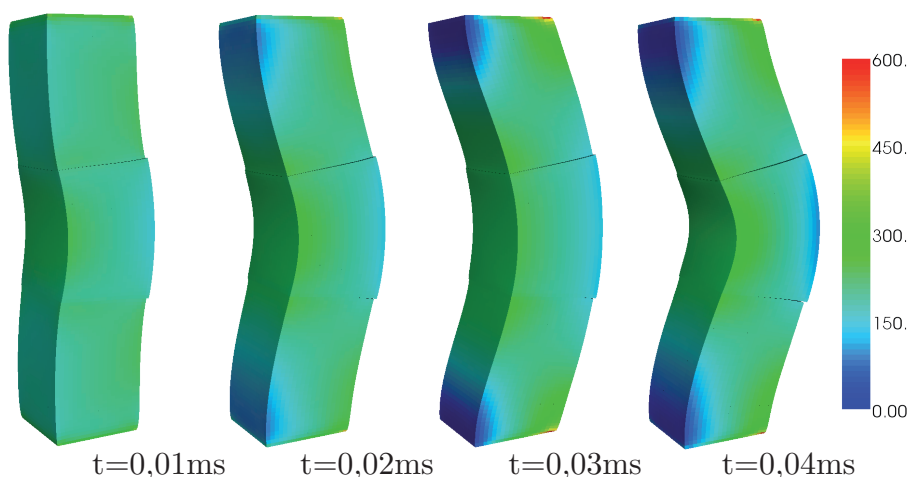


Figure 5.5: Evolution de la contrainte de Von Mises (MPa)

■ **Etude paramétrique** : pour l'étude paramétrique et la mise en oeuvre de la stratégie multirésolution, les coefficients de frottement f_1 et f_2 prennent 11 valeurs différentes entre 0, 1 et 0, 2 par pas de 0, 01. Pour chaque jeu de paramètres, le glissement au point A et B est sauvegardé à la fin du calcul. L'enjeu de cette étude paramétrique est de réaliser **121 simulations** d'un problème de dynamique transitoire qui comporte environ **200,000 ddls** en espace sur **50 pas de temps**.

L'étude paramétrique a été menée de la manière suivante : pour chaque valeur de f_1 (en commençant par 0, 1), la stratégie de calcul multirésolution (Algorithme 3) est appliquée pour réaliser les 11 simulations associées à chaque valeur de f_2 (en commençant par 0, 1). Nous avons ensuite appliqué la stratégie de calcul multirésolution pour chaque valeur de f_1 . Pour optimiser également les premiers calculs de chaque multirésolution (pour $f_2 = 0, 1$), ces résultats sont sauvegardés pour initialiser le premier calcul de la prochaine multirésolution.

La figure 5.6 montrent l'évolution de l'indicateur d'erreur LaTIn pour la première multirésolution ($f_1 = 0, 1$), le nombre d'itérations réalisé ainsi que le temps CPU associé à chaque calcul de la multirésolution est résumé dans le tableau 5.1. Le critère d'arrêt correspond à un niveau d'erreur de $2 \cdot 10^{-4}$. On peut constater que le nombre d'itérations nécessaires pour converger diminue au fur et à mesure de l'avancement de la multirésolution. Ceci s'explique par le fait que les solutions sont de plus en plus proche pour les valeurs élevées du coefficient de frottement f_2 et nécessitent donc de moins en moins d'itérations pour converger.

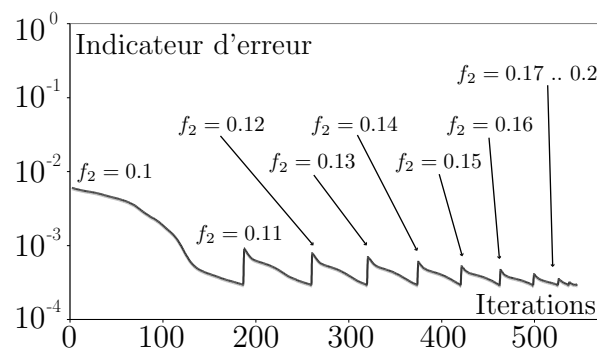


Figure 5.6: Evolution de l'indicateur d'erreur au cours des itérations pour $f_1 = 0, 1$

Le tableau 5.2 propose une comparaison du coût de calcul pour différentes stratégies LaTIn que l'on peut utiliser pour mener cette étude paramétrique. Ce tableau propose tout d'abord le coût de calcul de l'approche directe menée sur un seul processeur ("monoproc") et en parallèle (sur 16 processeurs). Ces deux temps de calcul sont des temps estimés, ils correspondent à 121 fois le temps d'un calcul élémentaire.

μ_1	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18 .. 0.20
Iterations	194	76	62	56	48	43	37	27	< 10
Temps (min)	26.4	10.3	8.4	7.6	6.5	5.8	5	3.7	< 1.5

Tableau 5.1: Coût de l'étude paramétrique

taire (pour un jeu de paramètre). Ce tableau propose également les temps de calcul obtenus en utilisant la stratégie de calcul multirésolution sur un seul processeur et sur 16 processeurs. A partir des résultats obtenus, on peut déterminer d'une part le gain en temps de calcul apporté par le parallélisme pour cet exemple : environ 11 (pour 16 processeurs), et d'autre part le gain en temps de calcul apporté par la stratégie de calcul multirésolution : 4,4. Il faut remarquer ici que la stratégie de calcul multirésolution et le parallélisme de l'approche rendent ce type d'étude paramétrique envisageable et ceci pour un temps de calcul tout à fait raisonnable (gain de l'ordre de 48 par rapport à l'approche directe "monoproc" LaTIn).

Stratégies	Coût (h)	Coût (jours)
Approche directe "monoproc" LaTIn (estimé)	588	24.5
Approche directe parallèle LaTIn (estimé)	53.3	2.2
Approche multirésolution "monoproc" LaTIn	133.5	5.5
Approche multirésolution parallèle LaTIn	12.1	0.5

Tableau 5.2: Comparaison des coûts de calcul pour différentes stratégies

■ **Résultats de l'étude paramétrique** : cette étude paramétrique permet de déterminer (par interpolation linéaire) les surfaces de réponse qui décrivent l'évolution du glissement au point A et B à la fin de l'étude en fonction des coefficients de frottements f_1 et f_2 (Figures 5.7 et 5.8). Elles permettent ainsi de déterminer l'influence des coefficients de frottement sur la grandeur étudiée. Par exemple, le glissement du point A (sur l'interface 1) dépend principalement du coefficient de frottement f_1 et cette dépendance est fortement non-linéaire. Ces surfaces de réponse permettent également de justifier l'intervalle d'étude pris pour les coefficients de frottement. Au delà de $f = 0,2$, les glissements de l'interface considérée sont quasiment nuls. En dessous de $f = 0,1$, il n'est plus possible de définir un glissement résiduel. Dans ce cas, la vitesse de glissement est non nulle à la fin de l'étude, les forces de frottements ne permettent pas de retenir le lopin central. Les surfaces de réponse ainsi obtenues peuvent également être utilisées pour identifier les coefficients de frottements à partir de résultats expérimentaux ou bien permettre de réaliser des études probabilistes sur la valeur de ces glissements en procédant à des tirages de Monte-Carlo.

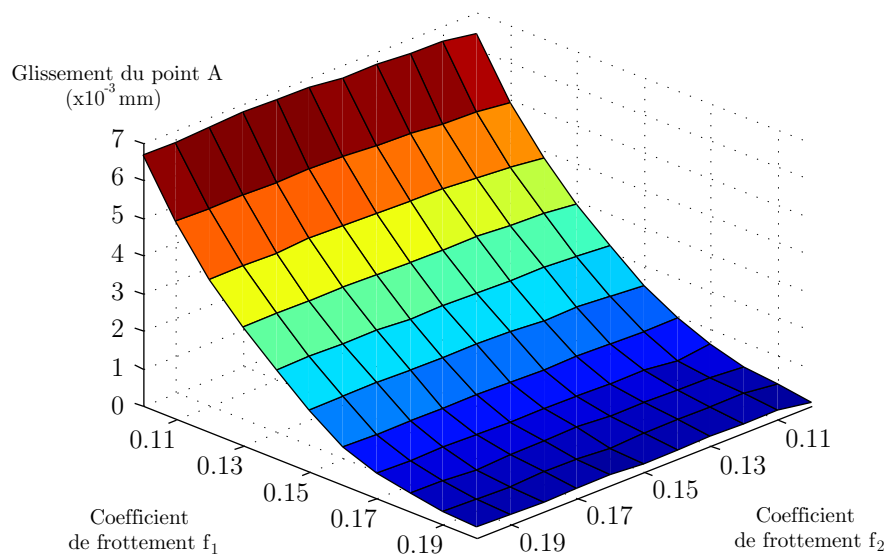


Figure 5.7: Surface de réponse - Glissement aux points A

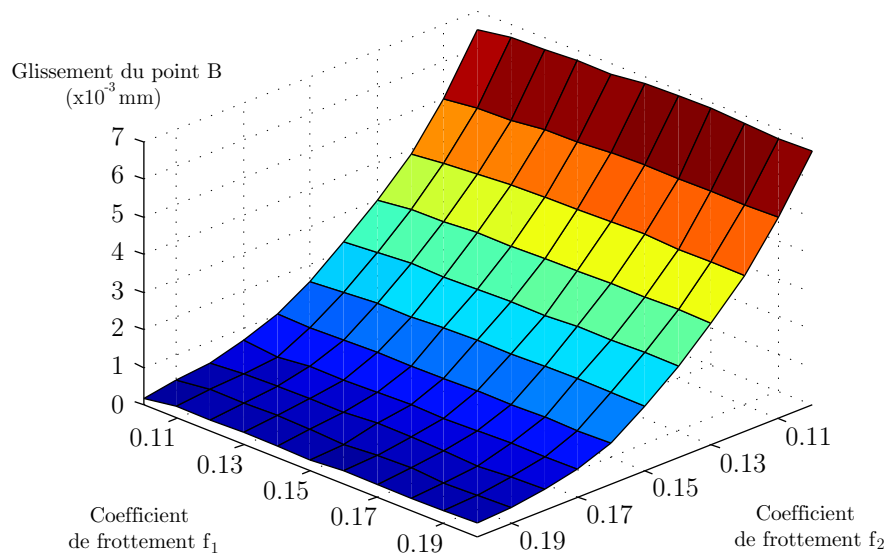


Figure 5.8: Surface de réponse - Glissement aux points B

2 Exemple d'assemblage - liaison "SSS"

Dans ce deuxième exemple d'application, on s'intéresse à un modèle tridimensionnel de liaison boulonnée présente sur le lanceur Ariane 5. Cet assemblage boulonné a été présenté dans [Caignot *et al.* 2005].

Cette étude permettra d'illustrer à la fois le comportement de la stratégie multirésolution et le comportement de la méthode LaTin multiéchelle en dynamique sur un cas industriel.

■ **Contexte industriel - la liaison "SSS" d'Ariane 5** : de nombreux travaux ont été menés au LMT-Cachan sur l'étude de l'amortissement des modes propres du lanceur Ariane 5. Parmi ces travaux, certains ont cherché à caractériser la dissipation due au frottement dans la liaison boulonnée "SSS" du SYLDA5, SYstème de Lancement Double du lanceur Ariane 5 (Figure 5.9). La liaison "SSS" contient un cordon pyrotechnique qui permet de séparer le SYLDA5 du lanceur avant le lancement de la charge utile. Pour caractériser cette dissipation, des simulations de la liaison "SSS" ont été menées en quasi-statique avec prise en compte du contact et du frottement. Elles ont permis de quantifier l'amortissement dû aux frottements dans la liaison. L'identification de l'amortissement en dynamique pose certaines difficultés supplémentaires par rapport à des simulations en quasi-statique, un exemple d'identification est proposé dans [Feng *et al.* 2008]. On propose ici de réaliser les simulations de la liaison "SSS" en dynamique. Ici l'objectif est uniquement de montrer la faisabilité sur un cas industriel d'une telle étude en dynamique. Outre l'identification de l'amortissement dans la liaison, cette étude pourrait également permettre l'élaboration d'un modèle simplifié de la liaison comme cela a pu être réalisé dans [Lamouroux *et al.* 2007].

■ **Présentation du problème** : comme cela a été réalisé dans les études précédentes (quasi-statique), nous prenons un modèle simplifié de la liaison où une seule rangée de boulons est considérée. La figure 5.10 présente la géométrie de l'assemblage étudié. Cette liaison permet de relier deux panneaux composites sandwich : peaux en composite stratifié carbone/epoxy et âme en nid d'abeille d'aluminium. Chaque panneau composite est boulonné et collé à une pièce en alliage d'aluminium. Les interfaces collées entre les peaux composites et les pièces en alliage d'aluminium sont considérées parfaites pour cette simulation. Les deux pièces en alliage d'aluminium sont assemblées grâce à des boulons. Du contact avec frottement de type Coulomb est pris en compte pour les interfaces entre les deux pièces en aluminium, au niveau des têtes de vis, écrous et des tiges de vis dans les trous des plaques (Figure 5.12). Pour cette simulation, tous les matériaux sont élastiques, isotropes et homogènes. Leurs caractéristiques mécaniques sont résumées dans le tableau 5.3. Pour cette simulation, le serrage des boulons est réalisé en imposant

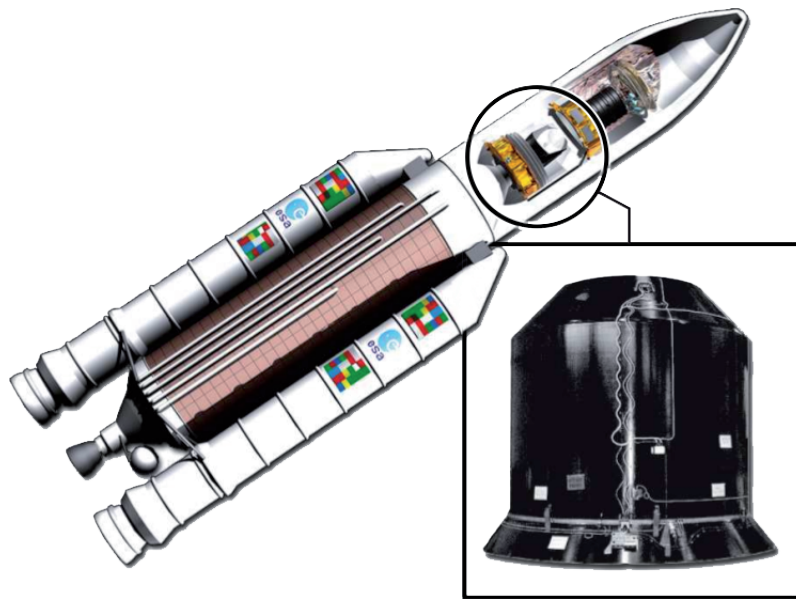


Figure 5.9: Lanceur Ariane 5 et SYLDA5 (EADS)

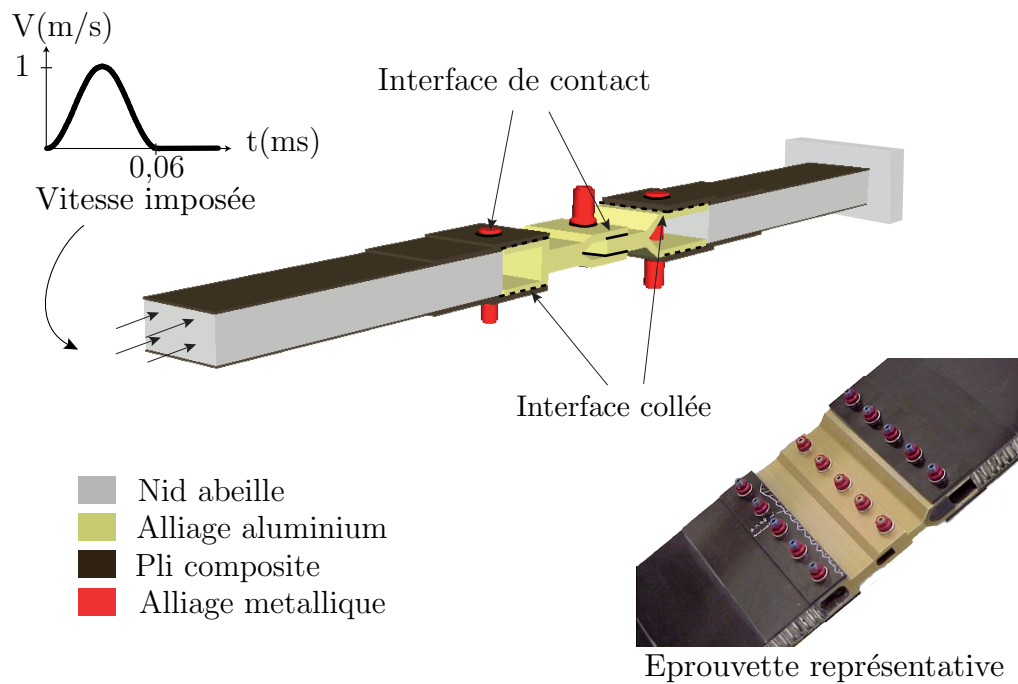


Figure 5.10: Modélisation de la liaison "SSS"

un déplacement entre la tige de la vis et l'écrou. Dans ce cas de figure, il existe une relation linéaire entre le déplacement imposé et l'effort de serrage (contrainte dans la vis). Ce serrage sera donc exprimé en millimètre. Le cas de chargement pris correspond à une vitesse imposée sur le coté gauche de l'éprouvette dont l'évolution est présentée sur la figure 5.10. L'autre extrémité de l'éprouvette est encastree. Ce chargement permet de simuler la propagation d'une onde de compression dans la liaison. Ici les conditions initiales sont non-nulles, elles correspondent à la précharge dans les boulons. Cette précharge est présente tout au long de l'étude. Une simulation en statique est donc nécessaire pour déterminer ces conditions initiales. Le temps de l'étude dynamique est de 0,24 ms, 40 pas de temps et un schéma d'intégration implicite sont utilisés. Ce temps d'étude correspond à un aller de l'onde dans l'assemblage.

	Peaux composites	Ames (nid d'abeille)	Alliage d'aluminium	Ecrou/vis
Module de Young (<i>GPa</i>)	139	0.26	70	100
Coef. Poisson	0.3	0.3	0.32	0.3
Densité (<i>kg/m³</i>)	3000	100	6000	7800

Tableau 5.3: Propriétés matériaux

■ **Maillage et décomposition** : la géométrie étudiée est relativement simple. En effet ce problème comporte seulement 14 pièces différentes et leur géométrie a été simplifiée au maximum. De ce fait, on peut estimer que le temps utilisateur nécessaire à la préparation d'un tel maillage à l'aide d'outil de maillage standard (GMSH, CATIA) n'excédera pas la demi journée. Or pour mettre notre stratégie de calcul dans les meilleures conditions possibles, c'est à dire qu'elle soit le plus efficace, il est nécessaire de découper les différentes pièces pour qu'à la fois la taille des problèmes ne soit pas trop importante et qu'il soit possible de répartir la charge de calcul sur différents processeurs de façon équilibrée. Nous avons donc cherché à générer un nombre suffisamment important de sous-structures et réaliser des sous-structures de taille similaire (en terme de nombre de degrés de liberté) pour pouvoir utiliser au mieux l'aspect parallèle de la stratégie. Avec ces contraintes supplémentaires, la génération des maillages et des fichiers qui décrivent le problème se complexifie et ceci de façon très importante. A cela, il faut rappeler que la stratégie impose que les maillages entre les sous-structures soient compatibles et que les interfaces aient une forme simple (plane), il n'est donc pas possible dans notre cas d'utiliser des outils standards tel que METIS pour le découpage des maillages. Dans ces conditions, plusieurs jours ont été nécessaire à la préparation des maillages.

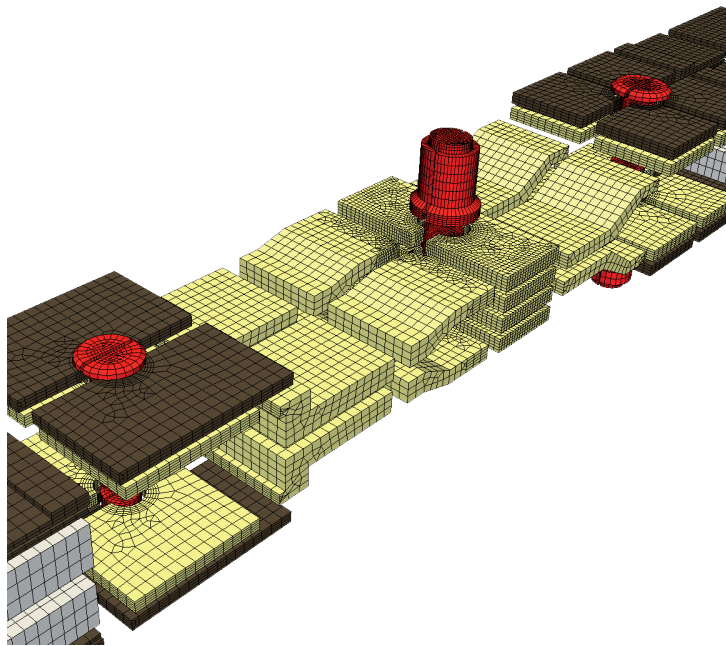


Figure 5.11: Décomposition de l'assemblage (maillage grossier)

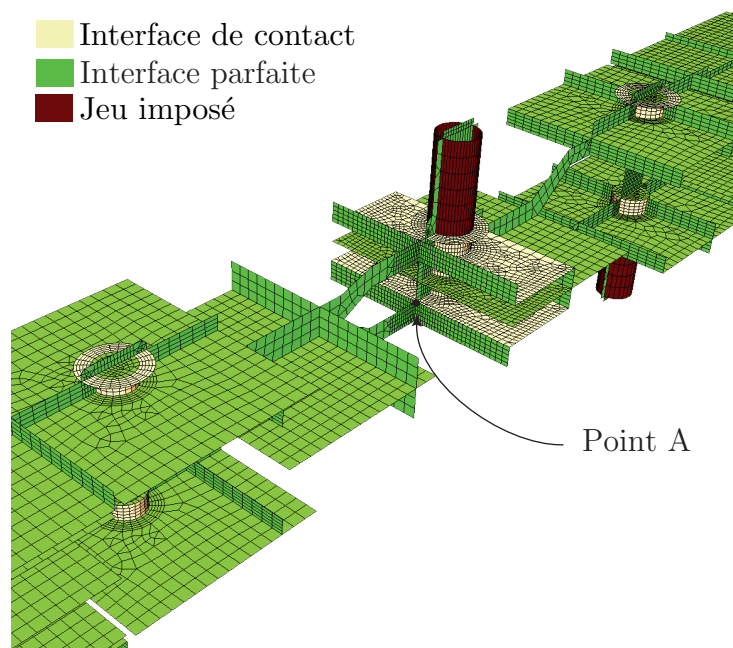


Figure 5.12: Interfaces de l'assemblage (maillage grossier)

2.1 Etude paramétrique

Un premier maillage (grossier) a été généré à l'aide du logiciel Cast3M, il comporte 450,000 degrés de liberté et 100,000 éléments. Il est composé de 194 sous-structures pour 433 interfaces dont 60 de type contact avec frottement. La figure 5.11 présente ce maillage sur une partie de l'assemblage. La figure 5.12 présente le maillage des interfaces du problème sur cette même partie de l'assemblage, on y retrouve des interfaces parfaites, des interfaces de contact avec frottement et les interfaces où l'on impose un déplacement entre les pièces qui permettent le serrage des boulons.

Pour l'étude paramétrique, nous cherchons à étudier l'influence de la valeur de la précharge dans le boulon central et la valeur du coefficient de frottement de l'interface de contact entre les deux pièces en aluminium. Le coefficient de frottement prend 11 valeurs différentes entre 0,2 et 0,4 par pas de 0,02. La précharge dans le boulon central prend également 11 valeurs entre 0,02 mm et 0,04 mm par pas de 0,002 mm. Pour chaque jeu de paramètre, le glissement au point A (Figure 5.12) est sauvegardé à la fin du calcul. Pour cette étude paramétrique, il s'agit de réaliser **121 simulations** d'un problème comportant environ **450,000 ddls** en espace sur **40 pas de temps**.

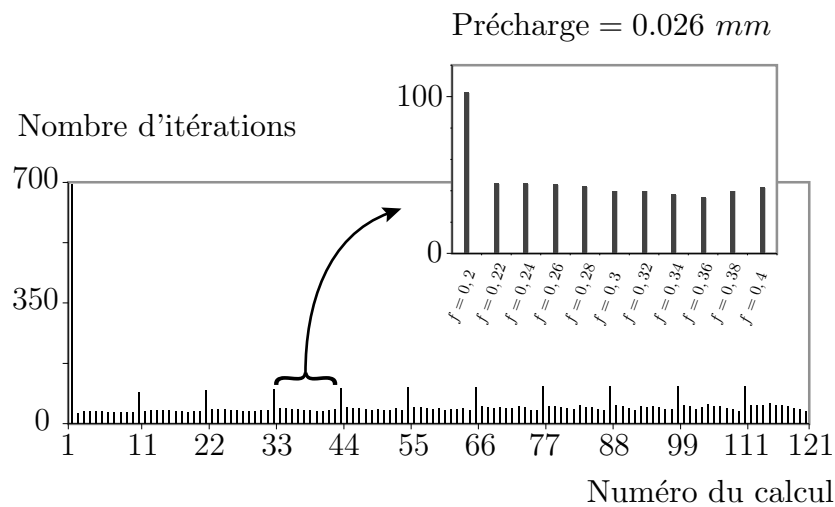


Figure 5.13: Nombre d'itérations nécessaire par calcul pour converger

Pour chaque valeur de la précharge en commençant par 0,02 mm, la stratégie de calcul multirésolution a été appliquée pour déterminer la solution associée à chaque valeur du coefficient de frottement. Les différentes phases de calcul multirésolution

(pour chaque valeur de la précharge) sont menées les unes à la suite des autres. La figure 5.13 montre le nombre d'itérations nécessaires pour que chaque simulation converge (pour chaque jeu de paramètre). Ce graphique montre le gain en itération apporté par la stratégie multirésolution, alors qu'il faut 695 itérations à la première simulation pour atteindre le niveau d'erreur demandé (10^{-3}), les autres simulations nécessitent moins de 100 itérations.

Le tableau 5.4 propose une comparaison des coûts de calcul pour différentes stratégies de calcul LaTIn que l'on peut utiliser pour mener cette étude paramétrique. Il donne tout d'abord le temps de calcul de l'approche directe menée sur un seul processeur, ce temps correspond à 121 fois le temps du premier calcul. Le second temps correspond à l'approche directe menée sur 16 processeurs (121 fois le temps du premier calcul réalisé sur 16 processeurs). Le dernier temps de calcul correspond à la stratégie de calcul multirésolution menée sur 16 processeurs. A partir de ces résultats, on peut déterminer que dans ce cas, le gain apporté par le parallélisme est de 9.6 (pour 16 processeurs) et le gain apporté par la stratégie multirésolution est de 5.8. Ainsi, par rapport à une approche directe menée sur un seul processeur, le gain total est de l'ordre de 55.

Stratégies	Coût (h)	Coût (jours)
Approche directe "monoproc" LaTIn (estimé)	1354	56.4
Approche directe parallèle LaTIn (estimé)	141.1	5.9
Approche multirésolution parallèle LaTIn	24.4	1

Tableau 5.4: Comparaison des coûts de calcul pour différentes stratégies

Cette étude paramétrique nous a permis de déterminer (par interpolation linéaire) les surfaces de réponse qui décrivent l'évolution du glissement (suivant l'axe de la structure) au point A au début et à la fin du calcul en fonction du coefficients de frottements et de la valeur de la précharge (Figure 5.14 et 5.15). La valeur de ce glissement augmente lorsque le coefficient de frottement et la valeur de la précharge diminue et ceci que ce soit au premier ou au dernier pas de temps. Cependant, au premier pas de temps, on constate que pour une certaine plage de paramètre (serpage et frottement élevé), le glissement est nul. Les deux pièces en aluminium sont donc en adhérence au point A pour ces valeurs de paramètres. En ce qui concerne le glissement au dernier pas de temps, sa dépendance aux différents paramètres reste sensiblement linéaire dans toute la plage de variation étudiée.

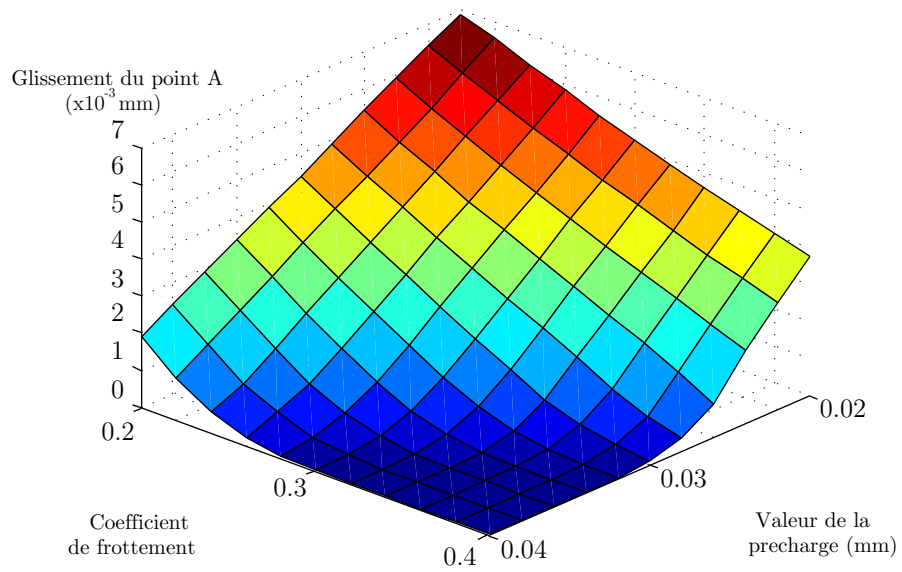


Figure 5.14: Surface de réponse - Glissement aux points A au premier pas de temps

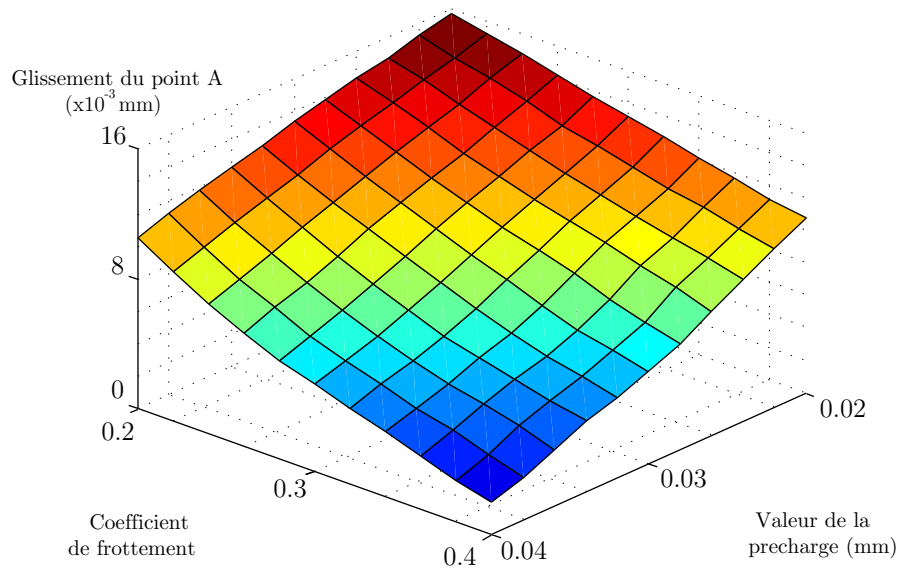


Figure 5.15: Surface de réponse - Glissement aux points A au dernier pas de temps

2.2 Calcul haute performance

Un second maillage (fin) a été généré, également à l'aide du logiciel Cast3M. Il comporte 2, 200, 000 degrés de liberté et 600, 000 éléments. Il reprend la même décomposition en sous-structure et interface que le précédent maillage, c'est à dire 194 sous-structures pour 433 interfaces. Pour ce maillage, nous avons réalisé la simulation de la liaison en dynamique pour une valeur de précharge de 0,02 mm et une valeur de coefficient de frottement de 0,02. La figure 5.16 présente l'évolution du déplacement et de la vitesse du point A (voir figure 5.12) de chaque coté de l'interface de contact entre les deux pièces en aluminium pour le maillage fin. La valeur du glissement en ce point correspond à la différence entre les deux courbes de déplacement et la vitesse de glissement correspond à la différence entre les deux courbes de vitesse. Pour ces valeurs de paramètres, on peut constater que le glissement est non nul dès le début de l'étude. Cette valeur correspond au glissement due à la précharge dans le boulon (calcul statique). Ensuite, lors de l'étude en dynamique, le glissement augmente pour ensuite se stabiliser. Ce second glissement est causé par le passage de l'onde dans les pièces en aluminium.

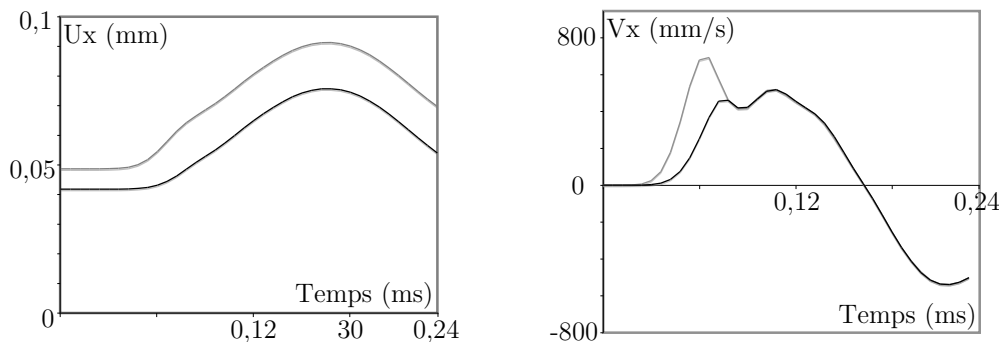


Figure 5.16: Evolution du déplacement et de la vitesse horizontale au point A

La figure 5.17 présente la carte d'effort tangentiel (force de frottement) et la carte de décollement au premier pas de temps sur l'interface de contact entre les deux pièces en alliage d'aluminium. Chaque carte présente à gauche le résultat obtenu avec le maillage grossier et à droite le résultat obtenu avec le maillage fin. Ces cartes permettent de visualiser la zone en contact au premier pas de temps, cette zone correspond aux éléments où le décollement est nul et l'effort tangentiel est non nul. Que ce soit pour le maillage fin ou pour le maillage grossier, la zone de contact est identique. De plus les valeurs obtenues sont très proches. On peut en conclure que la discrétisation choisie pour l'étude paramétrique (maillage grossier) permet de représenter correctement les phénomènes en jeu sur cette interface de contact et valide ainsi les résultats obtenus lors de l'étude paramétrique.

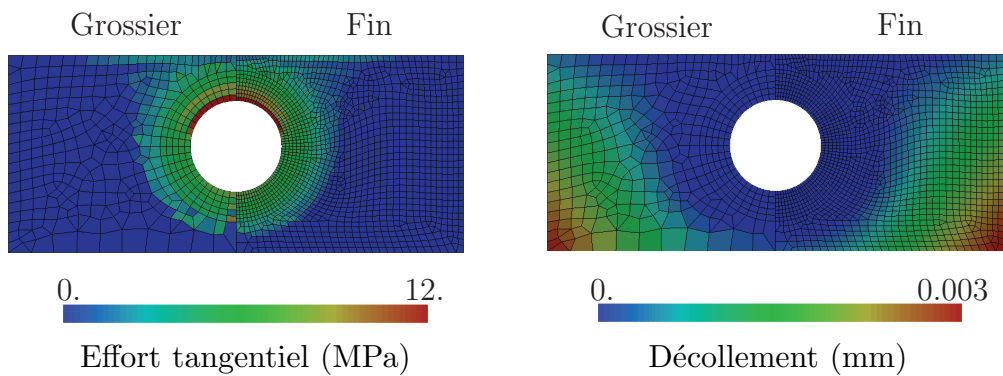


Figure 5.17: Effort tangentiel et décollement sur l'interface de contact

La figure 5.18 présente le champ de contrainte de Von Mises dans l'assemblage au premier pas de temps pour le maillage fin. On constate ainsi que la charge, dans les matériaux composites, est intégralement reprise par les plis composites. Les pièces en aluminium sont principalement chargées dans la zone du boulon central et dans les zones de concentration de contrainte. Sur la vue en coupe du boulon, on constate également des zones de concentration de contrainte, notamment au niveau de la tête de la vis et dans les zones où la vis, l'écrou et les pièces en aluminium sont en contact (à droite). Les zones de contact y sont très localisées. L'étude précise du contact dans ces zones nécessiteraient une discrétisation très importante incompatible avec l'étude de la liaison entière.

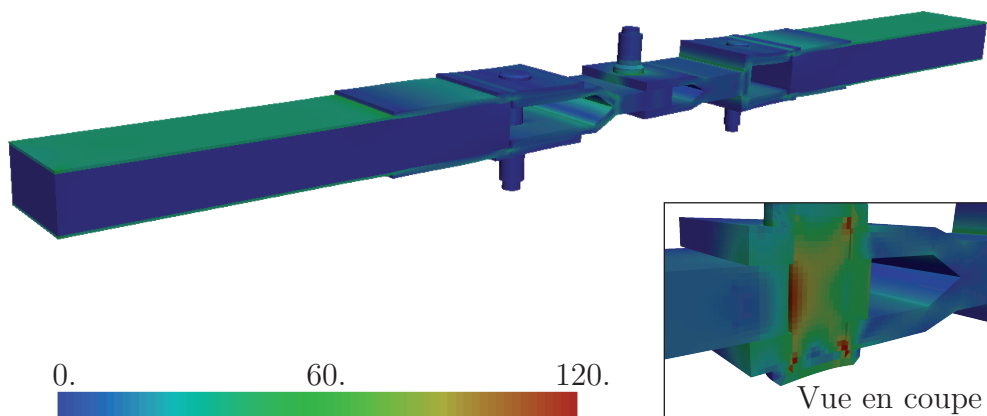


Figure 5.18: Contrainte de Von Mises dans l'assemblage (MPa)

3 Matériaux fortement hétérogène

Ce dernier exemple concerne l'étude à l'échelle microscopique d'un matériau fortement hétérogène comportant un très grand nombre d'interfaces de contact. Ce type de problème met très souvent en défaut les codes de calcul classiques, cet exemple illustrera les capacités et les performances de la méthode dans ce cas de figure.

■ **Contexte de l'étude** : l'étude de ce matériau s'inscrit dans le cadre d'un projet lancé par le Centre d'Etude de Gramat (DGA) visant à sécuriser la maintenance et la manipulation d'explosifs et de carburants solides (type propergols). L'objectif de ces études est de parvenir à caractériser le comportement de ces matériaux et en particulier à quantifier leur vulnérabilité aux chocs. Il s'agit de déterminer le comportement global du mélange à l'échelle mésoscopique. Ces matériaux se classent dans la catégorie des matériaux granulaires : des grains (perchlorate d'ammonium) sont noyés dans une matrice polymère (PBHT). La figure 5.19 présente une micrographie et un schéma de ces matériaux.

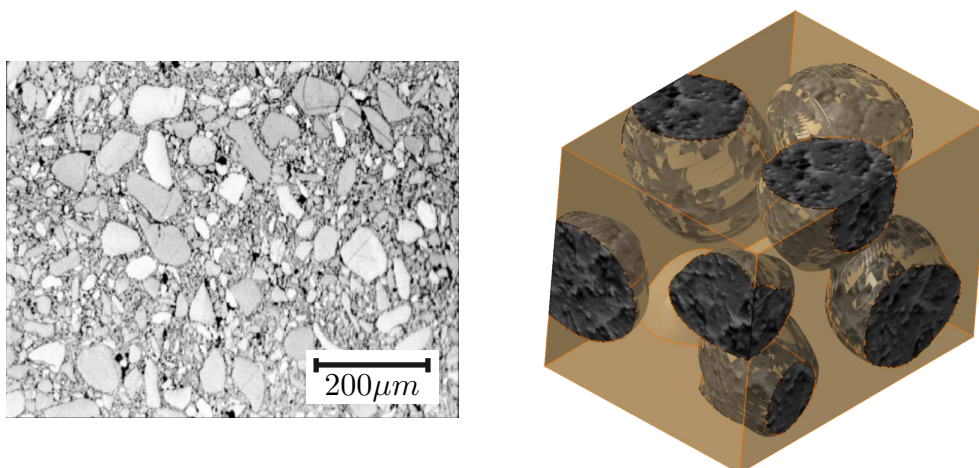


Figure 5.19: Micrographie et architecture grains/matrice (*Image CEG*)

■ **Maillage et décomposition** : dans le cadre du Master 1 (Mécanique et Ingénierie des Systèmes) de l'ENS Cachan, deux TER (travail encadré de recherche) [Laurent et Berthe 2008, Roux et Vaucorbeil 2009] et un stage réalisé au Centre d'Etude de Gramat [Laurent 2008] ont traité cette problématique. L'objectif de ces différents travaux a été de montrer la possibilité de simuler le comportement de ce matériau fortement hétérogène en prenant en compte du contact et du frottement entre les grains et la matrice sur un volume élémentaire représentatif important

(comportant un grand nombre de grains). Ces travaux ont donné lieu à l'écriture de deux programmes permettant la génération de maillage pour la simulation de ces matériaux. Dans le cas du premier programme, les grains générés ont tous une forme *hexaédrique* (résultant de la déformation aléatoire de cubes parfaits). Dans le deuxième programme, les grains sont des *polyèdres* de tailles et de formes quelconques, ils sont générés à partir de diagramme de Voronoï. Les figures 5.20 et 5.21 présentent un exemple de maillage obtenu grâce à ces programmes pour un volume élémentaire représentatif comportant huit grains.

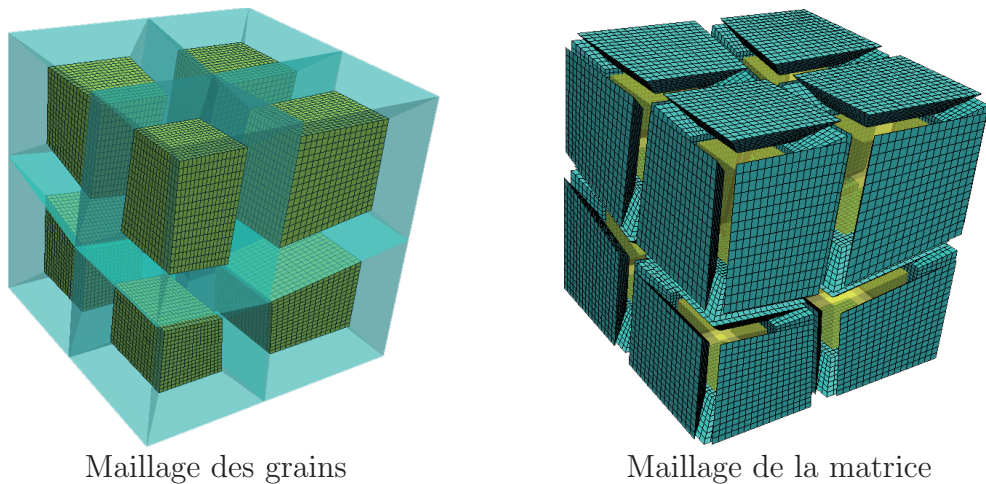


Figure 5.20: Grains hexaédriques (huit grains)

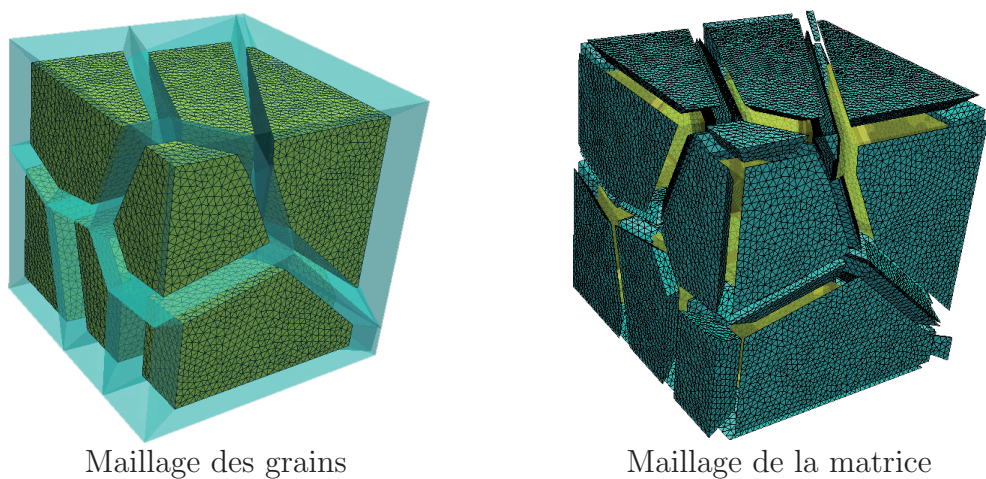


Figure 5.21: Grains polyédriques (huit grains)

Pour les besoins de la stratégie, la matrice a été découpé en plusieurs sous-structures dans les deux cas. Un morceau de matrice est associé à chaque face de grain. Sans ce découpage, le temps de calcul serait piloté par la taille de la matrice, la résolution des problèmes en parallèle n'aurait alors aucun intérêt.

3.1 Etude paramétrique

Nous présentons tout d'abord un exemple d'étude paramétrique. Il permet d'illustrer la capacité de la méthode en terme de multirésolution sur un problème comportant un grand nombre d'interface de contact. Cette étude paramétrique a été réalisée sur 50 grains de type *polyédriques*. Le maillage ainsi généré comporte environ 110,000 éléments pour 900,000 degré de liberté (Figure 5.22)). Cet exemple comporte un total de 620 sous-structures et 2253 interfaces dont 570 de type contact avec frottement (entre les grains et la matrice). Un schéma d'intégration temporel implicite avec 50 pas de temps a été utilisé. Le chargement appliqué permet de générer une onde de compression se propageant dans la structure. Le temps d'étude correspond à un aller et retour de l'onde dans la structure.

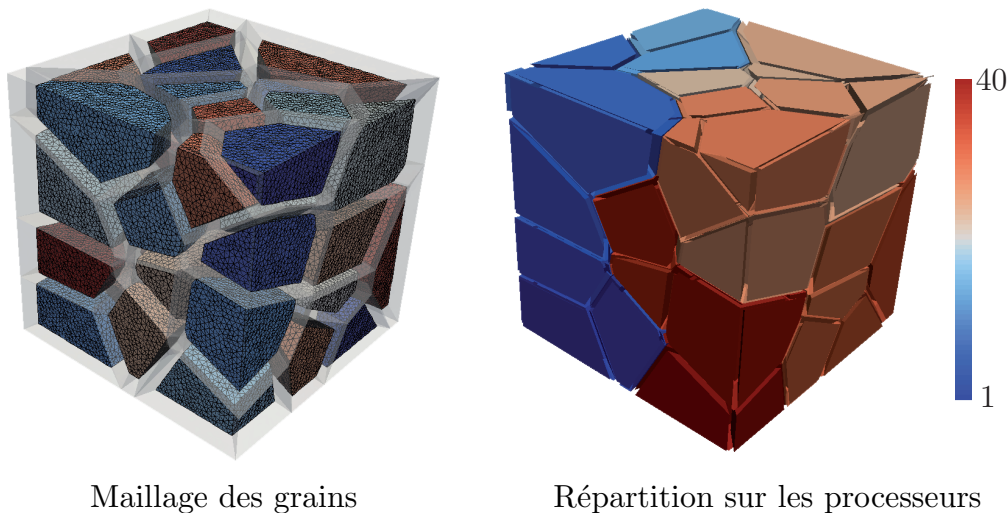


Figure 5.22: Maillage *polyédrique* à 50 grains

L'étude paramétrique porte sur la valeur du coefficient de frottement entre les grains et la matrice, ce coefficient de frottement prend 11 valeurs différentes allant de 0,2 à 0,4 par pas de 0,02. La version LaTin de la stratégie de calcul a été utilisé pour traiter ces problèmes. 40 processeurs ont été utilisés pour la résolution, la figure 5.22 présente la répartition des sous-structures sur les différents processeurs.

Ce nombre de processeur est le nombre maximal que l'on peut utiliser dans ce cas. En effet, au delà de cette valeur, le temps de calcul est piloté par la taille de la plus grosse sous-structure, il n'est donc plus possible de répartir la charge de calcul correctement.

Pour mener cette étude paramétrique la stratégie de calcul multirésolution a été utilisée, la figure 5.23 montre le nombre d'itérations nécessaires pour que chaque calcul converge (pour chaque valeur de coefficient de frottement). Pour cet exemple, le niveau d'erreur demandé est 10^{-2} , le premier calcul a nécessité 1223 itérations pour atteindre le niveau d'erreur fixé. On constate que, dans ce cas encore, les calculs suivant nécessitent moins d'itérations que le premier, et ceci de façon significative. La stratégie multirésolution permet donc encore un réel gain. Cependant, de part la complexité de cette simulation (nombre important d'interface de contact), les solutions associées à deux coefficient de frottement proches, peuvent différer de façon importante. De ce fait, le nombre d'itération nécessaire pour chaque simulation peut varier de façon importante. Certaines ont nécessité seulement 50 itérations alors que d'autres en ont nécessité plus de 500.

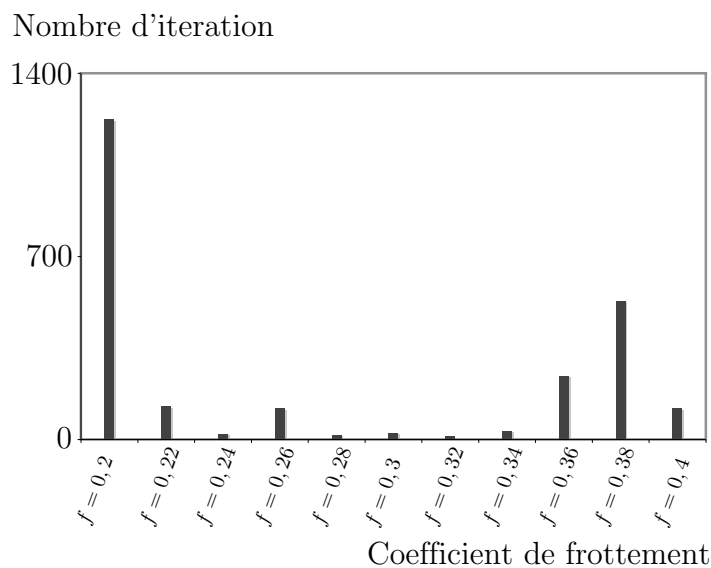


Figure 5.23: Nombre d'itérations réalisées pour chaque valeur de coefficient de frottement

La figure 5.24 illustre la complexité de ce type de simulation. Elle présente, sur une vue en coupe de la structure, le champ de contrainte de Von Mises à deux piquets de temps (obtenus pour le premier jeu de paramètre). Ce type de problème donne lieu à de multiples réflexions d'onde dues à l'hétérogénéité des matériaux

(matrice et grains) et donc à de multiples décollements, glissements et chocs. La valeur du coefficient de frottement peut donc avoir une grande influence sur la solution.

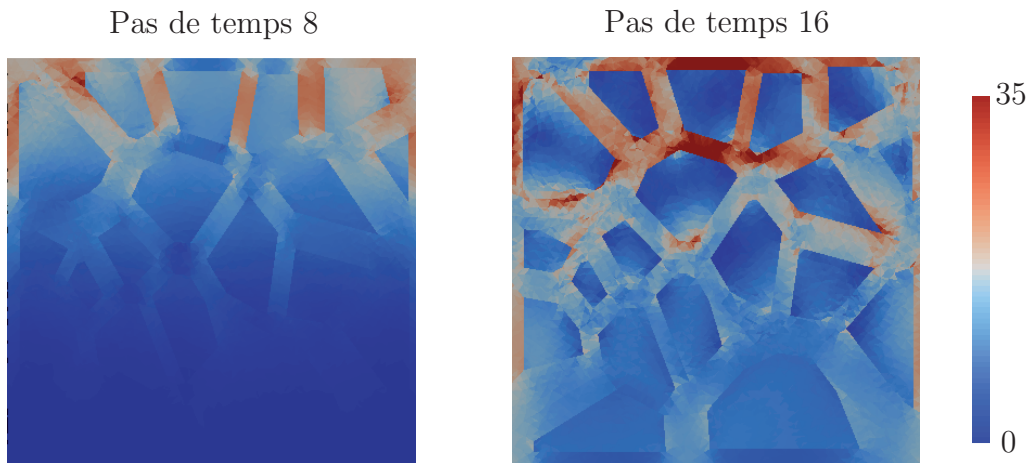


Figure 5.24: Contrainte de Von Mises (MPa)

Le tableau 5.5 présente les temps de calcul de l'approche directe et de la stratégie multirésolution. Pour cet exemple le gain apporté par la stratégie multirésolution est de 5.3. On peut donc en conclure que, malgré la complexité du problème traité, la stratégie multirésolution s'avère encore très efficace.

Stratégies	Coût (h)	Coût (jours)
Approche directe LaTin	93.5	3.9
Approche multirésolution LaTin	17.7	0.73

Tableau 5.5: Comparaison des coûts de calcul pour différentes stratégies

3.2 Calcul haute performance

Pour tester les capacités du code de calcul à traiter un problème de dynamique comportant un très grand nombre d'interface de contact, le maillage d'un volume élémentaire représentatif contenant 8,000 grains de forme *hexaédrique* a été généré. 56,000 sous-structures ont ainsi été générées pour 167,000 interfaces dont 48,000 interfaces de contact avec frottement. Le maillage total représente un peu plus de 75,000,000 degrés de liberté pour 16,000,000 éléments. Le maillage de

chaque grain et de la matrice qui l'entoure représente lui environ 9,500 degrés de liberté. La figure 5.25 présente le maillage des sous-structures allouées au premier processeur (environ 30 grains). Le chargement, une vitesse imposée d'amplitude maximale de 1 m/s , permet de générer un onde de compression se propageant dans la structure. La durée de ce choc est de 0.020 ms . 100 pas de temps et un schéma d'intégration temporel implicite a été utilisé, le temps d'étude (0.050 ms) correspond à un aller de l'onde dans la structure.

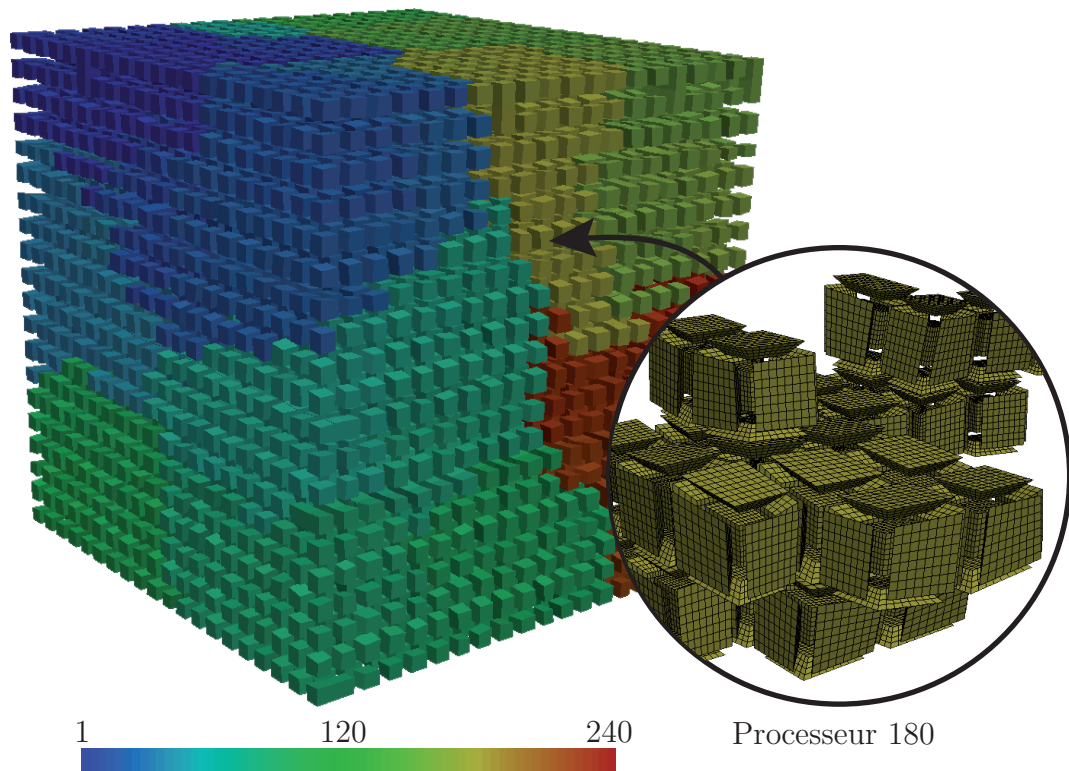


Figure 5.25: Répartition des sous-structures sur les processeurs

La version incrémentale de la stratégie a été utilisée, 50 itérations ont été réalisées par pas de temps. 240 coeurs ont été utilisés pour cette simulation (Figure 5.25), ce qui représente la quasi totalité des coeurs disponibles à ce jour sur le cluster du LMT Cachan. Le temps de calcul nécessaire à cette simulation est d'environ 17 heures dont 13 heures pour la partie itérative, le reste du temps de calcul correspond à la partie pré-traitement (assemblage, factorisation, ...) et à la génération des fichiers résultats. Au vu de ces temps de calcul, il est soit envisageable d'augmenter le nombre d'itérations par pas de temps dans le but d'obtenir une solution de meilleure qualité ou soit d'utiliser une discrétisation temporelle un peu plus fine. Avec ce genre de

stratégie de calcul, le coût d'une itération étant fixe, il faut trouver un compromis entre discrétisation temporelle et nombre d'itération pour que le temps de calcul reste raisonnable.

Cet exemple montre les limites du code de calcul et ceci pour plusieurs raisons. Premièrement cette simulation a nécessité près de 1 *To* de mémoire vive, ce qui représente la totalité de la mémoire vive du cluster actuel. Il n'est donc pas envisageable de traiter des problèmes de taille plus importante sans réaliser au préalable une sévère optimisation de l'occupation mémoire. La taille des fichiers résultats posent une deuxième limitation. Pour cet exemple, seul deux champs ont été sauvegardé : le déplacement et la vitesse et ceci uniquement sur les maillages de peaux de chaque sous-structure. Les fichiers ainsi générés représentent 3 *Go* pour chaque pas de temps. Le stockage de ces volumineux fichiers ne pose pas de difficulté *a priori* mais leur visualisation nécessite des outils adaptés : un logiciel qui permet la visualisation des résultats en parallèle. Pour réaliser le post-traitement de cet exemple, le logiciel Paraview a été utilisé sur deux noeuds graphiques du cluster du LMT Cachan (16 processeurs au total) et a requis près de 15 *Go* de mémoire vive au total.

La figure 5.26 présente le champ de vitesse à deux instant de l'étude ($t = 0.005 \text{ ms}$ et $t = 0.010 \text{ ms}$). Pour chaque instant, une vue en coupe de la structure est présentée. Les deux plans de coupe ont été choisis de telle sorte que les champs de vitesses à l'intérieur des grains soient visibles. Un zoom au niveau de la vue en coupe est également présenté.

A ces deux instants (début de l'étude), si l'on observe les champs sur le bord de la structure, l'onde semble se propager dans un milieu homogène. L'hétérogénéité du matériau n'est donc pas visible pour ces instants sur le bord de la structure. Ce comportement semble également valable à l'intérieur du matériau si l'on observe la structure entière. Pour visualiser l'influence de l'hétérogénéité dans le matériau, il est nécessaire d'observer le zoom de l'intérieur du matériau. Sur ces deux zooms, on constate que la vitesse des ondes dans les différents matériaux y est différente. On observe également du glissement entre les grains et la matrice (discontinuité de la vitesse sur les interfaces de contact). Ces conclusions ne sont valables que pour le début de l'étude. Ensuite, vu le nombre de réflexion d'onde au niveau des interfaces grain/matrice, le champ des vitesses dans la structure ne ressemble plus à celui observé pour un milieu homogène.

Les résultats observés permettent de montrer l'intérêt d'une telle étude. Bien que les phénomènes étudiés soient définis à une échelle fine (contact, hétérogénéité), l'étude d'un tel volume élémentaire comportant 8,000 grains permet d'observer de façon pertinente le comportement homogénéisé d'un tel matériau et ceci sur tout l'intervalle d'étude.

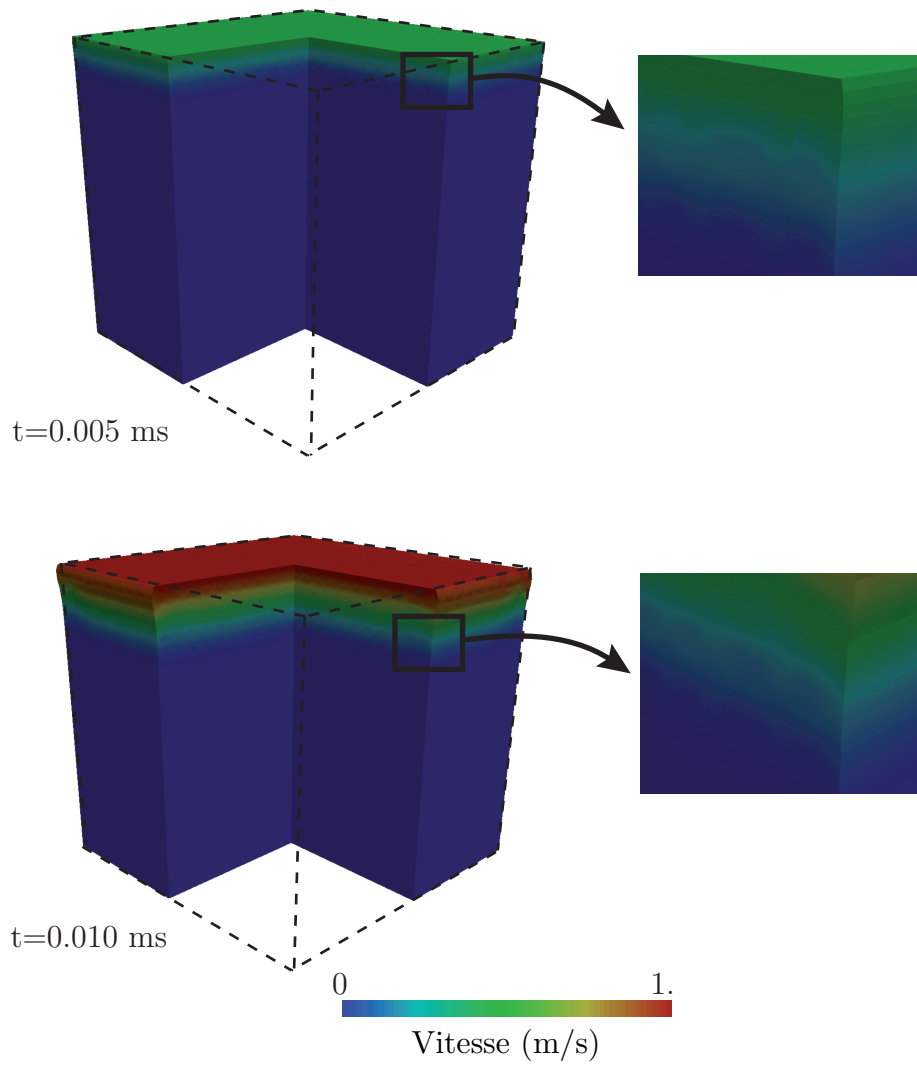


Figure 5.26: Résultats de simulation

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté un outil de calcul dédié à l'étude des assemblages en dynamique transitoire. Il permet la réalisation d'études paramétriques portant sur les propriétés d'interface (contact avec frottement). Cet outil est basé sur la méthode LaTIn avec décomposition de domaine. De récentes avancées de cette méthode ont été, à l'occasion de cette thèse, appliquées et adaptées au cadre de la dynamique transitoire.

L'introduction de la séparation d'échelle (aspect multiéchelle) en dynamique a engendré plusieurs difficultés. La définition de nouvelles conditions d'admissibilité pour les quantités macroscopiques qui soient adaptées au problème de dynamique transitoire a dû être réalisée. La continuité des vitesses macroscopiques a été ajoutée aux conditions d'admissibilité classiques (équilibre des efforts macroscopiques). Ces nouvelles conditions d'admissibilité ont permis d'obtenir l'extensibilité en espace de la méthode de décomposition de domaine comme cela avait été réalisé en statique et quasi-statique. Elles permettent, dès les premières itérations de la méthode, d'obtenir une bonne estimation de la solution sur l'intervalle d'étude complet, le comportement des interfaces étant vérifié en moyenne.

A l'occasion de cette thèse, la stratégie de calcul multirésolution, basée sur la méthode LaTIn, a été appliquée au cadre de la dynamique transitoire dans le cadre de non-linéarité de contact (frottement, jeu, précharge). Cette stratégie, initialement proposée pour des problèmes de statique et quasi-statique, n'a nécessité aucune modification pour pouvoir être appliquée en dynamique. Elle a pu être testée sur un certain nombre d'exemples, différents de part leur nature et complexité. Elle s'est avérée, comme en statique et quasi-statique, très efficace.

Ce travail a donné lieu à l'élaboration d'un code de calcul éléments finis permettant la simulation de modèles bi- et tri-dimensionnels complexes en dynamique. Ce code de calcul, initialement développé pour des calculs statiques, dispose désormais de fonctionnalités supplémentaires : calcul multiéchelle en parallèle en dynamique transitoire, réalisation d'études paramétriques en dynamique, prise en compte de

la précharge, choix du schéma d'intégration temporel... Ce code a permis de tester la méthode sur des cas complexes, que ce soit de part leur géométrie ou bien de part leur taille. Il a également permis d'entrevoir les possibilités qu'offrent une telle méthode si on l'associe à des moyens de calcul modernes (machine à mémoire distribuée de type cluster).

Suite à ce travail, les perspectives sont multiples. A court terme, elles concernent la méthode LaTIn multiéchelle en général (statique, dynamique...). En effet, des avancées portant sur cette méthode ont été récemment réalisées à l'occasion de thèses qui se sont déroulées en parallèle de celle-ci. Ces dernières avancées sont indispensables si l'on souhaite avoir une stratégie encore plus efficace et robuste.

- Des travaux ont porté sur la parallélisation du problème macroscopique. Pour des cas comportant un très grand nombre de sous-structures, la parallélisation de ce problème devient inévitable.
- D'autres travaux, portant sur la définition d'un indicateur d'erreur réellement représentatif, ont également été menés. Mieux contrôler la convergence de la stratégie est important pour la robustesse de celle-ci, particulièrement pour les calculs avec multirésolution.

D'autre part, ce travail a permis de mettre en évidence quelques difficultés liées à la méthode lorsqu'il s'agit de traiter des cas complexes, par exemple, la génération des maillages des sous-structures. Cette opération s'avère être une source de difficulté et être coûteuse en temps utilisateur dans le cas de structure complexe. Ce point peut donc être un frein à l'utilisation de cette méthode dans le milieu industriel. Pour palier ce défaut, plusieurs solutions sont à envisager, d'une part développer des procédures de découpe automatique des maillages qui soient compatibles avec l'utilisation de la stratégie (maillages compatibles, interfaces planes ou de formes simples) et d'autre part de permettre la gestion des maillages incompatibles entre les pièces.

A plus long terme, les perspectives concernant la méthode LaTIn multiéchelle sont de toute autre nature. A ce jour, les non linéarités d'interface (de contact avec ou sans frottement, endommageables, cohésives...) ont été introduites avec succès au sein de la méthode. Cette méthode s'est avérée très intéressante pour traiter ce type de problème. Le cas des non linéarités matériau (endommagement, plasticité...) n'a cependant pas encore été réellement traité. Ceci constitue une réelle limitation de la méthode pour traiter certains cas : assemblages complexes...

Le dernier point qui mérite d'être souligné concerne l'utilisation de cette méthode en dynamique transitoire. Malgré tous les efforts réalisés (méthode de décomposition de domaine, approche multiéchelle, parallélisme, multirésolution...) pour obtenir une stratégie de calcul performante, les problèmes de dynamique transitoire restent encore très lourds. Ceci est particulièrement le cas si l'on souhaite réaliser

des simulations sur des temps d'étude importants (sur des milliers de pas de temps). Pour les problèmes quasi-statiques, l'approximation PGD a été introduit pour palier à ce problème. Elle a permis dans ce cas d'obtenir d'important en temps de calcul et l'extensibilité en temps de la méthode. En dynamique, ce point n'a pas encore été développé à ce jour. L'enjeu est de proposer une nouvelle représentation des inconnues qui soit adaptée aux problèmes de dynamique.

Bibliographie

[Alart et al. 2000]

P. Alart, M. Barboteu, P. Le Tallec et M. Vidrascu. Méthode de scharwz additive avec solveur grossier pour problèmes non symétriques. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 331 : 399–404, 2000.

[Armero et Petcz 1998]

F. Armero et E. Petcz. Formulation and analysis of conserving algorithms for dynamic contact / impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158(269-300), 1998.

[Arora et al. 1991]

J.S. Arora, A.I. Chahande et J.K. Paeng. Multiplier methods for engineering optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 : 1485–1525, 1991.

[Barboteu 2005]

M. Barboteu. Construction du preconditionneur neumann-neumann de décomposition de domaine de niveau 2 pour des problèmes elastodynamiques en grandes déformations. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 340 : 171–176, 2005.

[Barboteu et al. 2001]

M. Barboteu, P. Alart et M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 4785–4803, 2001.

[Belytschko et al. 2000]

T. Belytschko, W. Liu et B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.

[Belytschko et al. 1985]

T. Belytschko, P. Smolinski et W. Liu. Stability of multi-time step partitioned

integrators for first-order finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(3) : 281–297, 1985.

[Belytschko et al. 1979]

T. Belytschko, H.-J. Yen et R. Mullen. Mixed methods for time integration. computer methods in applied mechanics and engineering. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17(18) : 259–275, 1979.

[Ben Dhia 1998]

H. Ben Dhia. Multiscale mechanical problems : the arlequin method. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 326 : 899–904, 1998.

[Ben Dhia et Rateau 2001]

H. Ben Dhia et G. Rateau. Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 332 : 649–654, 2001.

[Ben Dhia et Zammali 2007]

H. Ben Dhia et C. Zammali. Level-sets fields, placement and velocity based formulations of contact-impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) : 2711–2735, 2007.

[Boucard et Champany 2003]

P.A. Boucard et L. Champany. A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57 : 1259–82, 2003.

[Caignot et al. 2005]

A. Caignot, P. Ladevèze, D. Néron, S. Le Loch, V. Le Gallo, K. M. Ma et T. Romeuf. Prediction of damping in space launch vehicles using a virtual testing strategy. *Proc. of 6th International Symposium on Launcher Technologies*, 2005.

[Champany et al. 2008]

L. Champany, P.A. Boucard et S. Guinard. Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction. application to aerospace bolted joint. *Computational Mechanics*, 42(2) : 305–316, 2008.

[Champany et al. 1999]

L. Champany, J.Y. Cognard et P. Ladevèze. Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computer and Structures*, 73 : 249–266, 1999.

[Champany et al. 1997]

L. Champany, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix et P. Ladevèze. Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19 : 253–263, 1997.

[Cognard et al. 1996]

J.Y. Cognard, D. Dureisseix, P. Ladevèze et Ph. Lorong. Expérimentation d'une approche parallèle en calcul de structures. *Revue Européenne des éléments finis*, 5(2) : 197–220, 1996.

[Combescure et Gravouil 2001]

A. Combescure et A. Gravouil. A time-space multi-scale algorithms for transient structural nonlinear problems. *Mécanique et Industries*, 2(1) : 43–55, 2001.

[Combescure et Gravouil 2002]

A. Combescure et A. Gravouil. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 1129–1157, 2002.

[De Roek et Le Tallec 1990]

Y.H. De Roek et P. Le Tallec. Analysis and test of a local domain decomposition preconditionneur. *Proceedings of the 4th International Symposium on Domain Decomposition Methods*, pages 112–128, 1990.

[De Roek et al. 1992]

Y.H. De Roek, P. Le Tallec et M. Vidrascu. A domain decomposer solver for non-linear elasticity. *Computer Methods in Numerical Method in Engineering*, 99 : 187–207, 1992.

[Deodatis et Shinozuka 1988]

G. Deodatis et M. Shinozuka. Stochastic fem analysis of non linear dynamic problems. *Probabilistic Methods in Civil Engineering, Ed. Rice University*, 152–155, 1988.

[Dostal et al. 2000]

Z. Dostal, F.A.M. Gomes Neto et S.A. Santos. Solution of contact problems by feti domain decomposition with natural coarse space projection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(13-14) : 1611–1627, 2000.

[Dureisseix et Farhat 2001]

D. Dureisseix et C. Farhat. A numerically scalable domain decomposition method for solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12) : 2643–2666, 2001.

[Dureisseix et al. 2003]

D. Dureisseix, P. Ladevèze, D. Néron et B. A. Schrefler. A multi-time-scale strategy for multiphysics problems : application to poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(4) : 387–400, 2003.

[Faravelli 1989]

L. Faravelli. Response-surface approach for reliability analysis. *ASME, Journal of Engineering Mechanics*, 115(12), 1989.

[Farhat et al. 1995]

C. Farhat, P.S. Chen et J. Mandel. A scalable lagrange multiplier based domain decomposition method for time-dependent problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 : 3831–3853, 1995.

[Farhat et al. 1993]

C. Farhat, L. Crivelli et M. G eradin. On the spectral stability of time integration algorithms for a class of constrained dynamics problems. *AIAA 34th Structural dynamics meeting*, 1993.

[Farhat et al. 1994]

C. Farhat, L. Crivelli et F.-X. Roux. A transient feti methodology for large-scale parallel implicit computations in structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 : 1945–1975, 1994.

[Farhat et Roux 1991]

C. Farhat et F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 : 1205–1227, 1991.

[Farhat et Roux 1994]

C. Farhat et F.-X. Roux. *Implicit parallel processing in structural mechanics*, volume 2. 1994.

[Feng et al. 2008]

Z.-Q. Feng, J.-M. Cros, C. Renaud et G. Turbelin. Identification of the dissipated energy by friction in dynamic multibody systems. *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, 2(193-197), 2008.

[Fortin et Glowinski 1982]

M. Fortin et R. Glowinski. *Les m ethodes de Lagrangien augment e*. Dunod, 1982.

[Frangopol et al. 1996]

M. Frangopol, L. Yong-Hak et J.W. Kaspar. Non linear finite element reliability analysis of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(12) : 1174–1182, 1996.

[Ghanem et Spanos 1991]

R. Ghanem et P. Spanos. Stochastic finite element : a spectral approach. *Ed. Springer-Verlag New York*, 1991.

[Glowinski et Le Tallec 1990]

R. Glowinski et P. Le Tallec. Augmented lagrangian interpretation of the non-overlapping schwartz alternating method. Dans *International Symposium on Domain Decomposition Methods*, pages 224–231. Philadelphia, SIAM, 1990.

[Gravouil et Combescure 2001]

A. Gravouil et A. Combescure. Multi-time-step explicit implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 : 199–225, 2001.

[Gravouil et Combescure 2003]

A. Gravouil et A. Combescure. Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58 : 1545–1569, 2003.

[Gupta 2005]

J. Sen Gupta. *Mésodynamique et rupture des composites 3D C/C sous choc : une stratégie numérique dédiée*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2005.

[Hisada 1988]

T. Hisada. Sensitivity analysis of non linear fem. *Probabilistic Methods in Civil Engineering*, Ed. Rice University, pages 160–163, 1988.

[Hisada et Nakagiri 1985]

T. Hisada et S. Nakagiri. Role of stochastic finite element method in structural safety and reliability. In *ICASP, editor, 4th International Conference on Structural Safety and Reliability*, pages 385–395, 1985.

[Hughes et Liu 1978]

T.J.R. Hughes et W. Liu. Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, 45 : 371–374, 1978.

[Karypsis et Kumar 1998]

G. Karypsis et V. Kumar. Metis. *A Software Package for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill- Reducing Orderings of Sparse Matrices, Version 4.0, Department of Computer Science, University of Minnesota*, 1998.

[Kerfriden 2008]

P. Kerfriden. *Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2008.

[Kerfriden *et al.* 2009]

P. Kerfriden, O. Allix et P. Gosselet. A three-scale domain decomposition method for 3d analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, (à paraître) 2009.

[Kikuchi 1982]

N. Kikuchi. Penalty/finite element approximations of a class of unilateral contact problems. In *Penalty method and finite element method*, ASME, New York, 1982.

[Kikuchi et Oden 1988]

N. Kikuchi et J.T. Oden. Contact problems in elasticity : a study of varational inequalities and finite element methods. *SIAM, Philadelphia*, 1988.

[Klarbring 1992]

A. Klarbring. Mathematical programming and augmented lagrangian methods for frictional contact problems. *Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium, Curnier A. (ed.), Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, (409-422), 1992.

[Ladevèze 1985]

J. Ladevèze. Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaines. *Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures, Pluralis*, pages 893–907, 1985.

[Ladevèze 1985]

P. Ladevèze. New algorithms : mechanical framework and development (in french). *Technical Report 57, LMT-Cachan*, 1985.

[Ladevèze 1985]

P. Ladevèze. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 2 : 41–44, 1985.

[Ladevèze 1990]

P. Ladevèze. Une nouvelle méthode pour l'analyse des structures massives. *Note technique AEROSPATIALE, STS/T3*, 45(465), 1990.

[Ladevèze 1996]

P. Ladevèze. *Non-linear computational structural mechanics*. Springer New York, 1998 (french version 1996).

[Ladevèze 1999]

P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.

[Ladevèze et Dureisseix 1999]

P. Ladevèze et D. Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 327 : 1327–1244, 1999.

[Ladevèze et Dureisseix 2000]

P. Ladevèze et D. Dureisseix. A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1 : 18–28, 2000.

[Ladevèze et al. 2001]

P. Ladevèze, O. Loiseau et D. Dureisseix. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2) : 121–138, 2001.

[Ladevèze et Nouy 2003]

P. Ladevèze et A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 3061–3087, 2003.

[Ladevèze et al. 2002]

P. Ladevèze, A. Nouy et O. Loiseau. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 4869–4891, 2002.

[Lamouroux et al. 2007]

E. Lamouroux, D. Coutelier, N. Doelle et P. Kuemmerlen. Detailed model of spot-welded joints to simulate the failure of car assemblies. *International Journal for Interactive Design and Manufacturing*, 1 : 33–40, 2007.

[Laurent 2008]

L. Laurent. Simulation numérique à l'échelle mésoscopique de la réponse d'élastomères fortement chargés. Mémoire de DEA, Centre d'études de Gramat (DGA), 2008.

[Laurent et Berthe 2008]

L. Laurent et J. Berthe. Etude numérique d'un matériau hétérogène. *Rapport de projet de Master 1 (ENS Cachan)*, 2008.

[L.Badea 1991]

L.Badea. On the schwarz alternating method for more than two subdomains for non linear monotone problems. *Journal on Numerical Analysis*, 28(1) : 179–204, 1991.

[Le Tallec 1994]

P. Le Tallec. Domain decomposition method in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 2 : 121–220, 1994.

[Leclerc 2005]

H. Leclerc. Outil d'assistance au développement d'application d'analyse numérique et de mécanique. *Séminaire du LMT Cachan*, 2005.

[Lemaire et Macias 1997]

M. Lemaire et F. Macias. Eléments finis stochastiques et fiabilité. application en mécanique de la rupture. *Revue française de génie civil*, 1(2) : 247–284, 1997.

[Lemoussu 2000]

H. Lemoussu. *Sur une approche pour l'analyse et le calcul de structures 3D soumises à un choc pyrotechnique*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2000.

[Lemoussu et al. 2002]

H. Lemoussu, P.A. Boucard et P. Ladevèze. A 3d shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in Engineering Software*, 33 : 517–526, 2002.

[Lions 1990]

P.J. Lions. On the schwarz alternating method iii. a variant for non-overlapping subdomains. *Proceedings of Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, 1990.

[Liu et al. 1988]

W.K. Liu, G. Besterfield et T. Belytschko. Transient probabilist systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1) : 27–54, 1988.

[Loeve 1977]

M. Loeve. Probability theory. *Ed. Springer-Verlag New York*, 1977.

[Loiseau 2001]

O. Loiseau. *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2001.

[Mandel 1993]

J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9 : 233–241, 1993.

[Nouy 2003]

A. Nouy. *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2003.

[Przemieniecki 1963]

J.S. Przemieniecki. Matrix structural analysis of substructures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 1 : 138–147, 1963.

[Qiu et Wang 2005]

Z. Qiu et Xiaojun Wang. Parameter perturbation method for dynamic responses of structures with uncertain-but-bounded parameters based on interval analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 42 : 4958–4970, 2005.

[Rabi et al. 1998]

B. Rabi, O. Baba et J.C. Gelin. Treatment of the frictional contact via a Lagrangian formulation. *Mathematical and Computer Modeling, Rodin E.Y., Shillor M. (Eds.), Pergamon Press : Oxford*, 28(407-412), 1998.

[Roux et Vaucorbeil 2009]

C. Roux et A. De Vaucorbeil. Etude d'un matériau hétérogène. *Rapport de projet de Master 1 (ENS Cachan)*, 2009.

[Roux 1990]

F.-X. Roux. Méthodes de résolution par sous domaine en statique. *La Recherche Aérospatiale*, 1 : 37–48, 1990.

[Rubinstein 1981]

R.Y. Rubinstein. Simulation and Monte Carlo method. *Ed. John Wiley Sons*, 1981.

[Saxcé et Feng 1998]

G. De Saxcé et Z.-Q. Feng. The bi-potential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Recent Advances in Contact Mechanics, Special issue in Mathematical and Computer Modeling*, 28 : 225–245, 1998.

[Schueller et al. 1991]

G.I. Schueller, C.G. Bucher et H.J. Pradlwarter. The response surface method, an efficient tool to determine the failure probability of large structural systems. *Proceedings of the International Conference on Spacecraft Structure and Mechanical Testing, Noordwijk, The Netherlands*, pages 247–251, 1991.

[Schwarz 1869]

H.A. Schwarz. Über einige Abbildungsaufgaben. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 11 : 65–83, 1869.

[Series et al. 2003]

L. Series, F. Feyel et F.-X. Roux. Une méthode de décomposition de domaine

avec deux multiplicateurs de Lagrange, application au calcul des structures, cas du contact. *In Actes du Sixième Colloque National en Calcul de Structures, III* : 373–380, 2003.

[Shinozuka 1987]

M. Shinozuka. Basic issues in stochastic finite element analysis. *In ICASP, editor, 5th International Conference on Applications of Statistics and Probability*, 1987.

[Shinozuka et Yamazaki 1988]

M. Shinozuka et F. Yamazaki. Stochastic finite element analysis : an introduction. *In Stochastic Structural Dynamics, Progress in Theory and Application, Ed. Elsevier Applied Science*, pages 241–291, 1988.

[Soulier et Boucard 2009]

B. Soulier et P.A. Boucard. A multiparametric strategy for the large-scale multilevel optimization of structural assemblies. *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lisbon, Portugal*, 2009.

[Spanos et al. 1988]

P. Spanos, R. Ghanem et E. Akin. Orthogonal expansion for beam variability. *Probabilistic Methods in Civil Engineering, Ed. Rice University*, pages 156–159, 1988.

[Teigen et al. 1991]

J.G. Teigen, M. Frangopol, S. Sture et C. Fellipa. Probabilistic fem for non linear concrete structures : I theory. *Journal of Structural Engineering*, 117(9) : 2674–2689, 1991.

[Teigen et al. 1991]

J.G. Teigen, M. Frangopol, S. Sture et C. Fellipa. Probabilistic fem for non linear concrete structures : II applications. *Journal of Structural Engineering*, 117(9) : 2690–2707, 1991.

[Wriggers 1995]

P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2 : 1–49, 1995.

[Yamazaki et al. 1988]

F. Yamazaki, M. Shinozuka et G. Dasgupta. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(8), 1988.

[Zhao et Qiu 2000]

L. Zhao et C. Qiu. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. *Computers and Structures*, 77 : 651–657, 2000.

[Zhong et Mackerle 1992]

Z. Zhong et J. Mackerle. Static contact problems : a review. *Engineering Computations*, 9 : 3–37, 1992.