



Microlentilles gravitationnelles binaires :  
Algorithmes de minimisation et méthodes bayésiennes  
Annexe  
Institut d'Astrophysique de Paris

Maxime Garnier

Soutenance de stage, 26 Juin 2014

# Transits et vitesses radiales

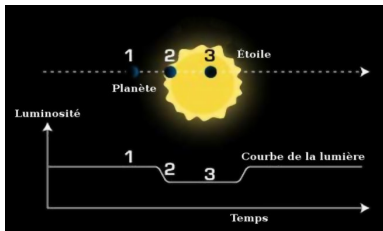


Figure: Détection par transit planétaire.

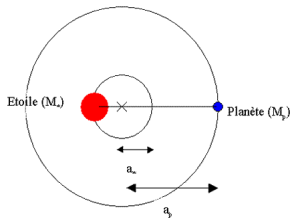
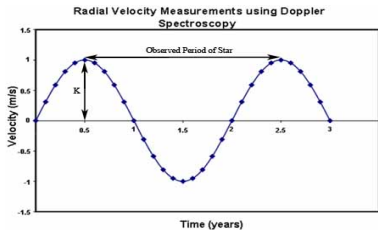


Figure: Détection par vitesses radiales.



# Caractéristiques de l'événement OGLE 2003–BLG–235 / MOA 2003–BLG–53

Parameter	Value	Unit
$M_{\star}$	$0.36^{+0.03}_{-0.28}$	$M_{\odot}$
$M_p$	$1.5^{+0.1}_{-1.2}$	$M_J$
$q$	$0.0039^{+0.0011}_{-0.0007}$	-
$s$	$1.120 \pm 0.007$	$R_E$
$s$	$3.0^{+0.1}_{-1.7}$	AU
$D_L$	$5.2^{+0.2}_{-2.9}$	kpc
$u_0$	$0.133 \pm 0.003$	$R_E$
$t_0$	$2848.06 \pm 0.13$	HJD-2450000
$t_E$	$61.5 \pm 1.8$	days
$\alpha$	$43.8 \pm 1.4$	deg

$M_{\star}$  : Masse de l'étoile,  $M_p$  : Masse de la planète. Autres paramètres : idem modélisation ( $u_0$  centre de masse = étoile). D'après <http://ogle.astrouw.edu.pl/>.

- Distances :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_S - D_L}{D_S} \frac{4GM}{c^2}}$$
$$R_E = D_L \theta_E$$

- Temps nécessaire au parcours d'une distance angulaire  $\theta_E$  :  $t_E$
- Grandeurs relatives au cas d'une lentille unique.

## Coefficients de l'équation polynomiale des lentilles

$$\sum_{k=0}^5 a_k z^k = 0$$

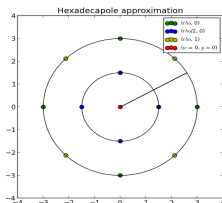
$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = -s^2 \zeta \\ a_1 = -s(1+q)(2+s^2)\zeta + 2s|\zeta|^2 - s^2 q \\ a_2 = -(1+q) [sq + s^2(q-1)\bar{\zeta} + (1+q+s^2(2+q))\zeta + |\zeta|^2(2s(2+q) + s^2(1+q)(s+\bar{\zeta}))] \\ a_3 = (1+q) [s^2 q - s(1+q)\zeta + (2s + s^3(1+q) + s^2(1+q)\bar{\zeta})\bar{\zeta} - 2|\zeta|^2(1+q)(1+s^2+s\bar{\zeta})] \\ a_4 = (1+q) [s(q - (1+q)|\zeta|^2) + (1+q)((1+2s^2) - |\zeta|^2 + 2s\bar{\zeta})\bar{\zeta}] \\ a_5 = (1+q)^2(s+\bar{\zeta})\bar{\zeta} \end{array} \right.$$

## Équation polynomiale de Witt

$$z^4 + 2sz^3 + (s^2 - e^{i\phi})z^2 - \frac{2se^{i\phi}}{1+q}z - \frac{s^2e^{i\phi}}{1+q} = 0$$

# Approximation hexadecapolaire

Gould (2008)



Source étendue - approximation hexadecapolaire.

$$\hat{\mu} = a_0 + \frac{16}{3} \mu_{\rho/2,0} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{210} \Gamma \right) + \mu_{\rho,0} \left( \frac{1}{9} - \frac{17}{315} \Gamma \right) + \frac{1}{6} \mu_{\rho,1} \left( 1 - \frac{11}{35} \Gamma \right)$$

avec  $a_0 = \mu(\zeta_0)$  : amplification du centre de la source (donc ponctuelle).

$$\mu_{w,p} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{N_{im}} \mu \left( \zeta_0 + w e^{i(2k+p)\pi/4} \right) - a_0$$

# Orthonormalisation (1)

Kains (2010)

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Produit scalaire :

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{N_{\text{mes}}} \frac{A(t_i)B(t_i)}{\sigma_i^2}$$

- Gram-Schmidt :
  - ▶ Orthogonalisation

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{v}_k)$$

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$$

- ▶ Normalisation

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$$



## Orthonormalisation (2)

- Vecteurs  $P_i = {}^t \left( \frac{\partial \mu}{\partial \theta_i}(t_j) \right)_{j=1 \dots N_{\text{mes}}}$ .
- Matrice de passage  $\vec{\theta} \rightarrow \vec{\beta} : T$ .

$$T_{ij} = \begin{cases} \frac{P_i \cdot B_j}{B_j \cdot B_j} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

- $B_i = {}^t \left( \frac{\partial \mu}{\partial \beta_i}(t_j) \right)_{j=1 \dots N_{\text{mes}}}$
- $\vec{\beta} = S\vec{\theta}$ ,  $S = T^{-1}$

# Hypothèses justifiant le taux d'acceptance

Roberts et al. (1997)

- Indépendance :  $F(\vec{\beta}) = \prod_{i=1}^m f(\beta_i)$ .
- $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .
- Généralisation au cas  $f = f_i$ .

## Méthode de minimisation de Newton

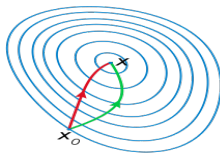


Figure: Newton (rouge) vs Gradient Descent (vert).

Jeu de paramètre à l'itération  $k + 1$  :

$\vec{\beta}_{k+1} = \vec{\beta}_k + \vec{p}_k$  avec  $\vec{p}_k$  solution du système matriciel :

$$\nabla^2 \chi_k^2 \vec{p}_k = -\nabla \chi_k^2$$

- $\nabla \chi_k^2$  : matrice Jacobienne
- $\nabla^2 \chi_k^2$  : matrice Hessienne.

et  $\chi_k^2 = \chi^2(\vec{\beta}_k)$ .

## Premiers résultats

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$s$	1.1	$\beta_1$	$1.24 \cdot 10^{-6}$
$q$	0.1	$\beta_2$	$-5.76 \cdot 10^{-4}$
$u_0$	0.1	$\beta_3$	$-2.98 \cdot 10^{-3}$
$\alpha$	0.2	$\beta_4$	$-1.44 \cdot 10^{-4}$
$t_E$	9.0	$\beta_5$	1.46
$t_0$	6.0	$\beta_6$	1.41
$\rho$	$5 \cdot 10^{-3}$	$\beta_7$	$-2.48 \cdot 10^{-1}$

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$s$	1.1	$\beta_1$	$1.68 \cdot 10^{-15}$
$q$	0.1	$\beta_2$	$3.87 \cdot 10^{-17}$
$t_{in}$	9.0	$\beta_3$	$-4.21 \cdot 10^{-9}$
$t_{out}$	15.0	$\beta_4$	$-9.80 \cdot 10^{-9}$
$\phi_{in}$	17.0	$\beta_5$	$7.49 \cdot 10^{-1}$
$\phi_{out}$	7.0	$\beta_6$	-4.82
$\rho$	$5 \cdot 10^{-3}$	$\beta_7$	$-1.40 \cdot 10^1$

Table: Premiers résultats de l'algorithme d'orthonormalisation de l'espace des paramètres.

## Dérivées de $z$

**Attention** : Les dérivées de  $z$  sont **complexes** alors que celle de  $\mu$  sont réelles.

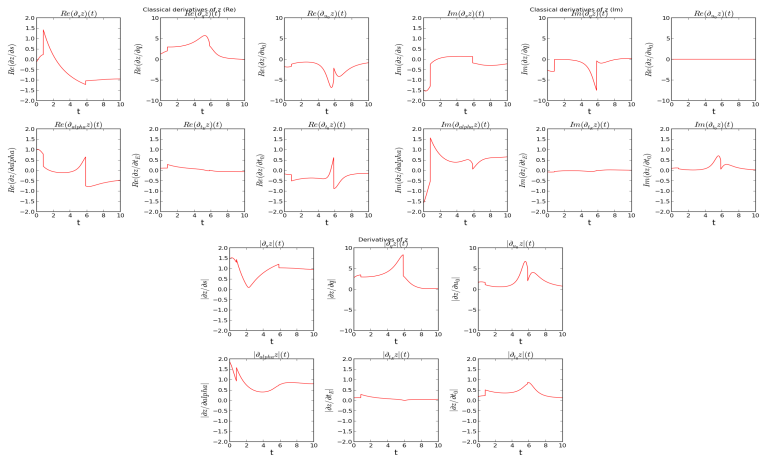
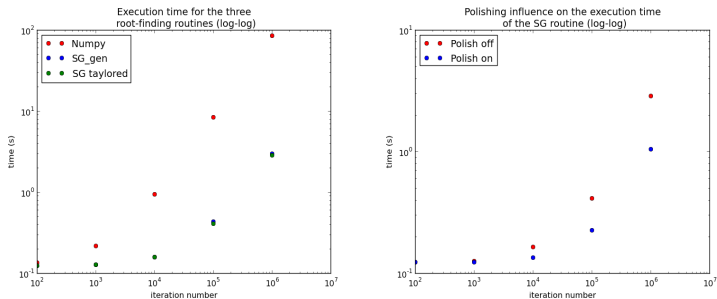


Figure: Dérivées de  $z$  partie réelle, imaginaire et module (PS, "classical").

Pas de divergence sur les caustiques : même si présence de  $(1 - |W_2|^2)$  au dénominateur qui s'annule sur les caustiques.

# Optimisation numérique

Nombreuses résolutions de l'équation des lentilles (polynôme de degré 5) → minimiser le temps de calcul → ?).



**Figure:** Comparaison de différentes routines. A gauche, comparaison `numpy.roots()`, `cmplx_roots_gen` et `cmplx_roots_5`. A droite comparaison `cmplx_roots_5` avec et sans polish.

Le test a été effectué sur le même polynôme d'ordre 5 pour les trois routines.  
Interfaçage Fortran → Python *via* f2py.

- A. Gould. *Hexadecapole Approximation in Planetary Microlensing*. *The Astrophysical Journal*, 681:1593–1598, July 2008.
- N. Kains. *The Solar System in Perspective : from Debris Discs to Extrasolar Planets*. PhD thesis, University of St. Andrews, 2010.
- J. O. Roberts, A Gelman, and W. R. Gilks. *Weak Convergence And Optimal Scaling of Random Walk Metropolis Algorithms*. *The Annals of Applied Probability*, 7:110–120, 1997.