



Microlentilles gravitationnelles binaires: Algorithmes de minimisation et méthodes bayésiennes

Institut d'Astrophysique de Paris

Maxime Garnier

Sous la direction d'Arnaud Cassan

Soutenance de stage L3, 26 Juin 2014

Plan de la présentation

1 Introduction

- L'Institut d'Astrophysique de Paris
- La recherche de planètes extra-solaires
- L'effet de lentille gravitationnelle

Plan de la présentation

1 Introduction

- L'Institut d'Astrophysique de Paris
- La recherche de planètes extra-solaires
- L'effet de lentille gravitationnelle

2 Modélisation des microlentilles gravitationnelles binaires

- Équation des lentilles, amplification et courbes de lumière
- Caustiques et courbes critiques
- Mouvement de la source

Plan de la présentation

1 Introduction

- L'Institut d'Astrophysique de Paris
- La recherche de planètes extra-solaires
- L'effet de lentille gravitationnelle

2 Modélisation des microlentilles gravitationnelles binaires

- Équation des lentilles, amplification et courbes de lumière
- Caustiques et courbes critiques
- Mouvement de la source

3 Optimisation de l'ajustement des courbes de lumière

- Objectif
- Étude des dérivées analytiques de l'amplification
- Théorème de Bayes
- Simulation de données expérimentales
- Minimisation par méthode de Newton
- Algorithme Markov Chain Monte-Carlo
- Orthonormalisation de l'espace des paramètres

Plan de la présentation

1 Introduction

- L'Institut d'Astrophysique de Paris
- La recherche de planètes extra-solaires
- L'effet de lentille gravitationnelle

2 Modélisation des microlentilles gravitationnelles binaires

- Équation des lentilles, amplification et courbes de lumière
- Caustiques et courbes critiques
- Mouvement de la source

3 Optimisation de l'ajustement des courbes de lumière

- Objectif
- Étude des dérivées analytiques de l'amplification
- Théorème de Bayes
- Simulation de données expérimentales
- Minimisation par méthode de Newton
- Algorithme Markov Chain Monte-Carlo
- Orthonormalisation de l'espace des paramètres

4 Conclusion

Mot-clefs :

- Microlentille gravitationnelle.
- Modélisation.
- Optimisation.
- Inférence bayésienne.

Travail réalisé:

- Implémentation numérique dans le langage Python (et un peu de Fortran).
- Interfaçage d'une routine de résolution de polynôme de Fortran vers Python.
- Vérification des calculs.
- Bibliographie (méthodes d'optimisation, validation statistique de modèles).
- Synthèse hebdomadaire avec A. [Cassan](#) et C. [Ranc](#) (doctorant).

Introduction

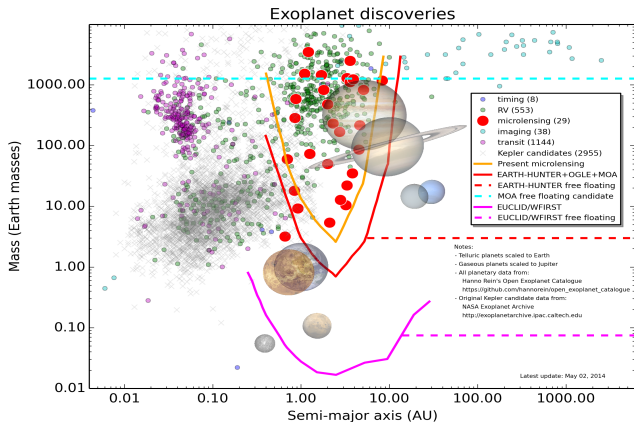
L'Institut d'Astrophysique de Paris (IAP)



- Fondation en 1936 : [Jean Perrin](#) et [Jean Zay](#).
- Actuel directeur : [Francis Bernardeau](#).
- 52 enseignants-chercheurs, chercheurs et ingénieurs de recherche, ainsi que 29 doctorants et 24 post-doctorants. Nombreux visiteurs et stagiaires.

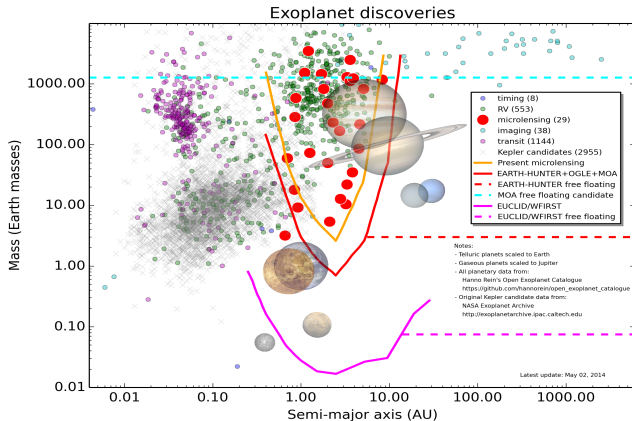
Astrophysique & physique théorique : Cosmologie, relativité générale, formation des grandes structures, astrophysique des hautes énergies, origine et évolution des galaxies, physique stellaire, planètes extrasolaires.

La recherche de planètes extra-solaires



J.-B. Marquette courtesy

La recherche de planètes extra-solaires

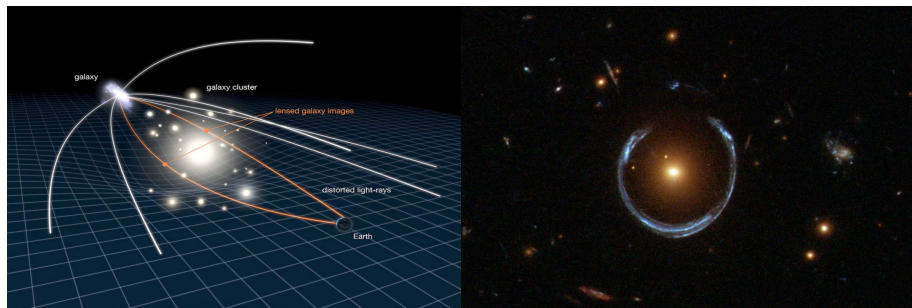


J.-B. Marquette courtesy

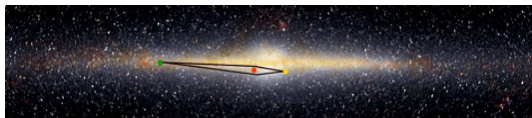
→ Etude statistique par microlentille : au moins une planète par étoile dans la Voie Lactée (orbites entre 0.5 et 10 UA et masse entre $5 M_{\oplus}$ et $10 M_J$)
Cassan *et al.* (Nature, 2012).

L'effet de lentille gravitationnelle

- Relativité Générale d'**Einstein** (1915) → déviation de la lumière par tout corps massif → effet de *lentille gravitationnelle* (1936).
- *Micro-lentille* : la lentille est une étoile ou un système planétaire.



Distorsion de l'espace-temps : effet de lentille gravitationnelle (satellite Hubble).



Configuration typique de l'observation d'un événement de microlentille gravitationnelle.

$$D_L = 1-8 \text{ kpc}, D_S = 8 \text{ kpc}.$$

Modélisation des microlentilles gravitationnelles binaires

Équation des lentilles, amplification et courbes de lumière

Équation des lentilles binaires :

$$\zeta = z - \frac{1}{1+q} \left(\frac{1}{\bar{z}} + \frac{q}{\bar{z}+s} \right) \quad (1)$$

3 ou 5 images z_j pour ζ donné.

Amplification d'une source ponctuelle :

$$\mu = \sum_j^{N_{\text{im}}} \frac{1}{|J(z_j)|} = \sum_j^{N_{\text{im}}} \frac{1}{|1 - W_2(z_j)|}$$

avec :

$$W_k(z_j) = \frac{1}{1+q} \left(\frac{1}{z_j^k} + \frac{q}{(z_j+s)^k} \right)$$

Caustiques et courbes critiques

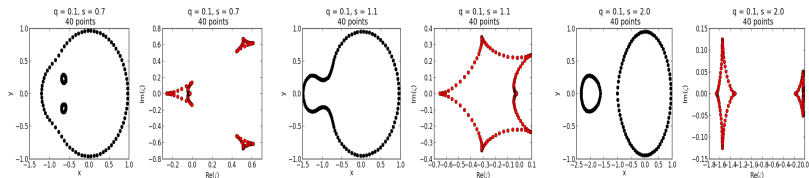


Figure: Les trois topologies de caustiques. Haut gauche : *close*, haut droite *intermediate* et bas *wide*.

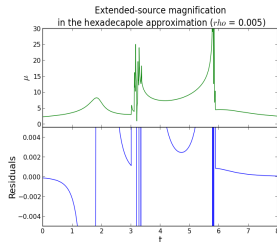
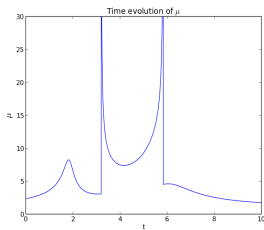
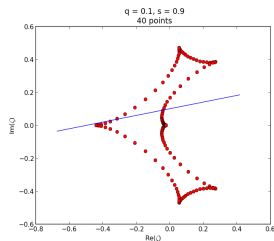
Définition

On définit les courbes critiques (*resp.* caustiques) comme étant le lieu des points z (*resp.* ζ) où le jacobien s'annule. L'amplification y est formellement infinie.

(Witt, 1990) :

$$\frac{1}{1+q} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{q}{(z+s)^2} \right) = e^{-i\phi}, \quad \phi \in [0; 2\pi] \quad (2)$$

Influence sur l'amplification



Gauche: Trajectoire du centre de la source. Milieu: amplification source ponctuelle, Droite: amplification dans l'approximation hexadecapolaire (Gould, 2008).

On montre qu'il y a **bijection** $z \leftrightarrow \zeta$ sur les caustiques/courbes critiques.

Mouvement de la source: les deux paramétrisations

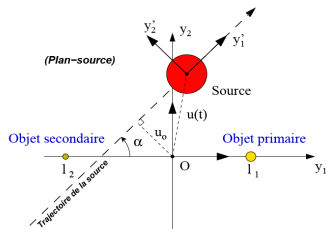


Figure: D'après Cassan (2005).

$$(\alpha, u_0, t_E, t_0)$$

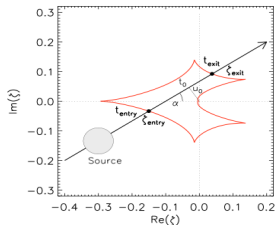


Figure: D'après Cassan (2008).

$$(t_{in}, t_{out}, \phi_{in}, \phi_{out})$$

Paramétrisation classique

$$(\alpha, u_0, t_E, t_0)$$

$$\zeta(t) = \left(\frac{t - t_0}{t_E} + iu_0 + \delta\zeta(t) \right) e^{i\alpha}$$

Paramétrisation "caustic-crossing"

(Cassan, 2008)

$$\zeta(t) = \frac{\zeta_{out} - \zeta_{in}}{t_{out} - t_{in}}(t - t_{in}) + \zeta_{in} + \delta\zeta(t)$$

Optimisation de l'ajustement des courbes de lumière

Inférence bayésienne, MCMC, Newton-CG

Objectif et travail réalisé

Objectif :

- Optimiser l'ajustement des courbes de lumière expérimentales : faire plus vite et plus judicieux.

Pour cela :

- Calcul, mise en place et test des dérivées analytiques de l'amplification (deux paramétrisations, source ponctuelle et étendue).
- Amorçage des algorithmes d'optimisation : validation statistique, méthodes numériques et solver de polynômes complexes (Skowron and Gould, 2012).

Dérivées analytiques de μ

Implémentation et tests des dérivées analytiques pour les deux paramétrisations en source ponctuelle et étendue.

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \theta} = \frac{2\varepsilon}{\left(1 - |W_2|^2\right)^2} \Re \left[\overline{W_2} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right] \quad (3)$$

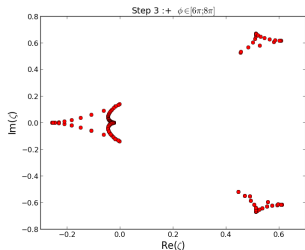
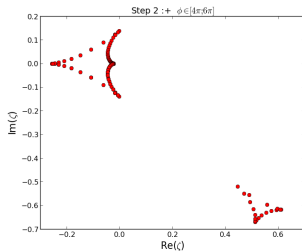
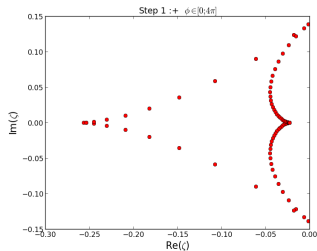
$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \theta} = \frac{-4}{\left|1 - |W_2|^2\right|^3} \Re \left[\overline{W_2} W_3 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - \overline{W_2} \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \theta} \right) \right] \quad (4)$$

Tests réalisés:

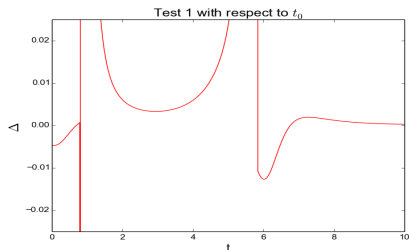
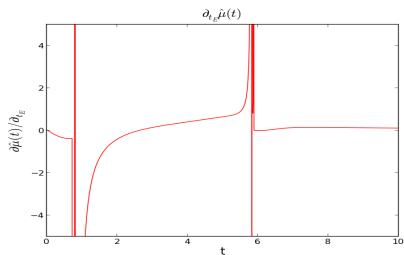
- 1 Comparaison numérique/analytique : $\frac{\partial \mu}{\partial \theta}$ et $\frac{\Delta \mu}{\Delta \theta}$, $\Delta \theta \ll 1$.
- 2 Linéarisation de l'amplification : $\mu(\theta + d\theta) \approx \mu(\theta) + \frac{\partial \mu}{\partial \theta} d\theta \rightarrow$ domaine de validité.

Construction d'une bijection sur les caustiques

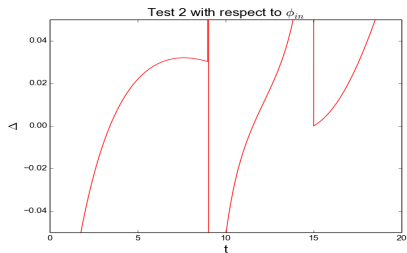
- Schéma de construction : $z_{i+1} = \arg \min(|z_{i+1}^{(k)} - z_i|)$ où $k = 1 \dots 4$.
- On impose certaines solutions (pour $\phi = 0$) en $\phi = 0, 4\pi$ et 6π .



Exemple de courbes



Dérivée en hexadecapolaire et premier test (classique).



| | | | | | | | | |
|------------------|-----|-----|----------|-----------|-------------|--------------|----------|------------|
| Classique | q | s | α | u_0 | t_0 | t_E | (ρ) | (Γ) |
| Caustic-crossing | q | s | t_{in} | t_{out} | ϕ_{in} | ϕ_{out} | (ρ) | (Γ) |

Second test (caustic-crossing) et tableau des paramètres.

Théorème de Bayes

Théorème de Bayes

Soit D un jeu de données et $\vec{\theta}$ le vecteur des paramètres du modèle considéré.

$$P(\vec{\theta}|D) = \frac{P(D|\vec{\theta})P(\vec{\theta})}{\int P(D|\vec{\theta}')P(\vec{\theta}')d\vec{\theta}'}$$

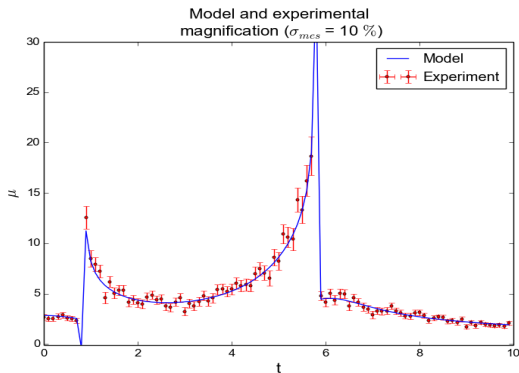
- $P(\vec{\theta}|D)$: probabilité *a posteriori*.
 - *Likelihood* : $\mathcal{L} = P(D|\vec{\theta})$.
 - $P(\vec{\theta})$: probabilité *a priori* ou *prior*.
- Construction des priors à partir de données expérimentales ou d'autres modèles. [Cassan et al. \(2010\)](#).
- Erreurs gaussiennes : $\mathcal{L} = \exp(-\chi^2/2)$, $\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{mes}}} \frac{(\mu_{\text{mes}}(t_i) - \mu_{\text{mod}}(t_i))^2}{\sigma_i^2}$.

Simulation de données expérimentales

Probabilité conditionnelle de mesure

$$P(\mu_{\text{mes}}(t_i) | \vec{\theta}) \propto \exp \left[\frac{-(\mu_{\text{mes}}(t_i) - \mu_{\text{mod}}(t_i))^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

σ_i : incertitude de mesure du point à l'instant t_i .



Exemple de simulation de données expérimentales avec erreurs gaussiennes (ESBL, 100 points).

Méthode Newton-CG (en cours)

Minimisation **directe** du χ^2 par méthode Newton-CG avec `scipy.optimize.minimize()`.

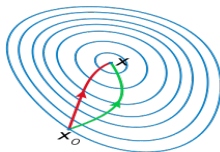


Figure: Newton (rouge) vs Gradient Descent (vert).

Pour cela :

- Calculer le jacobien du χ^2 grâce aux dérivées de μ .
- Fortes divergences des matrices jacobienne et hessienne sur les caustiques.
- Convergence quadratique vers un minimum pas forcément global !

Algorithme MCMC (en cours)

→ Caractéristiques de l'algorithme acceptance-rejet :

- ▶ Distribution de "saut" gaussienne (Central Limit Theorem) :

$$\theta_{k+1}^{(i)} = \theta_k^{(i)} + \delta\theta_i \mathcal{N}(0, 1).$$

- ▶ $\gamma = \frac{\mathcal{L}_{k+1}}{\mathcal{L}_k}$.

- ★ Si $\gamma > 1$: On accepte le changement.

- ★ Si $\gamma < 1$: On tire un nombre r aléatoire entre 0 et 1. Si $r < \gamma$, on accepte le changement, sinon on ne change pas.

- ▶ Taux d'acceptance idéal : **0.234**. D'après [Roberts et al. \(1997\)](#).

→ Point crucial : Choix des $\delta\theta_i$.

→ Après de nombreuses itérations: construction et diagonalisation de la matrice de variance - covariance.

→ Enlever le "burn-in" et déterminer les meilleurs paramètres (médiane, moyenne, ...).

Orthonormalisation de l'espace des paramètres

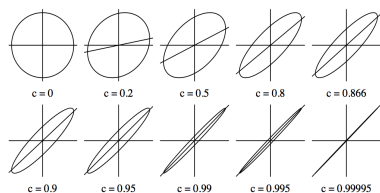


Figure: Différentes corrélations pour deux paramètres. $c = 0$ indique l'absence de corrélations.

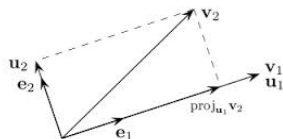


Figure: Deux premières étapes du procédé de Gram-Schmidt.

- Paramètres corrélés $\vec{\theta} \xrightarrow{G^{-S}}$ Paramètres décorrélés $\vec{\beta}$. Kains (2010).
- Vecteurs : $P_i = {}^t \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta_i}(t_j) \right)_{j=1 \dots N_{\text{mes}}}$
- Pas d'expression analytique de ces nouveaux paramètres !

- A. Cassan. *L' effet de microlentille gravitationnelle dans la recherche de planètes extra-solaires et dans le sondage d'atmosphères d'étoiles géantes du Bulbe*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2005.
- A. Cassan. *An alternative parameterisation for binary-lens caustic-crossing events*. *Astronomy and Astrophysics*, November 2008.
- A. Cassan and al. *One or more bound planets per Milky Way star from microlensing observations*. *Nature*, January 2012.
- A. Cassan, K. Horne, N. Kains, Y. Tsapras, and P. Browne. *Bayesian analysis of caustic-crossing microlensing events*. *Astronomy and Astrophysics*, June 2010.
- A. Gould. *Hexadecapole Approximation in Planetary Microlensing*. *The Astrophysical Journal*, July 2008.
- N. Kains. *The Solar System in Perspective : from Debris Discs to Extrasolar Planets*. PhD thesis, University of St. Andrews, 2010.
- J. O. Roberts, A. Gelman, and W. R. Gilks. *Weak Convergence And Optimal Scaling of Random Walk Metropolis Algorithms*. *The Annals of Applied Probability*, 1997.
- J. Skowron and A. Gould. *General complex polynomial root solver*. December 2012.
- H. J. Witt. *Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars*. *Astronomy and Astrophysics*, September 1990.

Conclusion

- Beaucoup de travail réalisé (dérivées, optimisations, solver de polynômes, ...).
- Etapes suivantes : orthonormalisation (Newton), inclure les priors, travailler sur des données expérimentales.
- Importance de l'organisation (hiérarchisation des programmes, résultats, ...).
- Émulation, scientifique ou non, de la recherche et humilité.
- Grand choix de conférences de l'IAP.
- Attrait pour la recherche confirmé.
- Continuation en astrophysique ?

Remerciements : A. Cassan, C. Ranc, Jill C. (M2) et les doctorants et autres stagiaires de l'IAP.