Ecole Normale Supérieure de Cachan
Département de Génie Mécanique et de génie Civil
Résumé de Cours

Mécanique des fluides

Bertin Morgan

Cachan, le 8 juin 2009

Table des matières

I Equations fondamentales de la dynamiques des fluides **3**

1 Rappel **3**

2 Equation de Navier-Stokes **3**
2.1 Conservation de la masse . . . 3
2.1.1 Forme non conservative . . . 3
2.1.2 Forme conservative . . . 3
2.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . 3
2.2.1 Forme non conservative . . . 3
2.2.2 Forme conservative . . . 4
2.3 Equation de conservation (ou transport) de l'énergie totale . . . 4
2.3.1 Forme non conservative . . . 4
2.3.2 Forme conservative . . . 4
2.4 Relation de comportement . . . 4

3 Autres équations de transport **4**
3.1 Equation de conservation de l'energie cinétique . . . 4
3.1.1 Forme non conservative . . . 4
3.1.2 Forme Conservative . . . 4
3.2 Equation de conservation de l'enthalpie statique . . . 4
3.2.1 Energie totale . . . 5
3.2.2 Energie cinétique . . . 5
3.2.3 Equation de transport de l'enthalpie statique h . . . 5
3.2.4 Forme non conservative . . . 5
3.2.5 Forme conservative . . . 5
3.3 Equation de conservation de l'energie interne . . . 5
3.3.1 enthalpie statique . . . 5
3.3.2 Equation d l'energie interne . . . 5
3.3.3 Forme non conservative . . . 5
3.3.4 Forme conservative . . . 5
3.4 Equation de conservation (ou de transport) de l'entropie . . . 6
3.5 Equation de crocco . . . 6
3.6 Equation du vecteur tourbillon . . . 6
3.7 Equation de transport (ou de conservation) de la température statique . . . 6

II Ecoulements incompressibles **6**

4 Approximation incompressible **6**

5 Validité Approximation incompréssible **7**

6 Le rôle de la presion en écoulmement incompréssible **7**
6.1 Traitement du champ de gravité . . . 7
6.2 Théorème de bernouilli . . . 7
6.3 Equation de Poisson pour la pression. . . . 7
6.4 Champ de température statique . . . 8
6.5 Ecoulement de Stokes, approximations . . . 8

III Ecoulement compressible **8**

7 Grandeurs totales **8**

Première partie

Equations fondamentales de la dynamiques des fluides

1 Rappel

- Produit sclaire $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i$

- Produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j \underline{e_i} \otimes \underline{ej}$

- Divergence
$div(a) = 0$
$div(\underline{a}) = a_{i,i}$
$div(\underline{\underline{A}}) = A_{ij,j}\underline{e_i}$

- Gradiant
$grad(\alpha) = \alpha_{,i}\underline{e_i}$
$grad(\underline{a}) = a_{i,j}\underline{e_i} \otimes \underline{e_j}$
$grad(\underline{\underline{A}}) = A_{ij,k}\underline{e_i} \otimes \underline{e_j} \otimes \underline{e_k}$

- Rotationel $rot(\underline{a}) = -(a_i\underline{e_i})_{,j} \wedge \underline{e_j} = \epsilon_{lji}a_{i,j}\underline{e_l}$

2 Equation de Navier-Stokes

2.1 Conservation de la masse

2.1.1 Forme non conservative

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div(\underline{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + grad(\rho) \cdot \underline{V} + \rho div(\underline{V}) = 0$$

En indicielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i}u_i + \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

2.1.2 Forme conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\underline{V}) = 0$$

2.2 Conservation de la quantité de mouvement

2.2.1 Forme non conservative

$$\rho\frac{D\underline{V}}{Dt} = div(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho\underline{f_v}$$

En indicielle :

$$\rho(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) \cdot \underline{e_i} = (-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f v_i) \cdot \underline{e_i}$$

2.2.2 Forme conservative

$$\frac{\partial \rho \underline{V}}{\partial t} + div(\rho \underline{V} \otimes \underline{V}) = div(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{f_v}$$

Uniquement en incompréssible :

$$\frac{\partial \rho \underline{V}}{\partial t} + div(\rho \underline{V} \otimes \underline{V}) = -grad(\underline{P}) + div(\underline{\underline{\tau}}) + \rho \underline{f_v} \ = -grad(\underline{P}) + \mu \Delta \underline{V} + \rho \underline{f_v}$$

En indicielle :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f v_i$$

2.3 Equation de conservation (ou transport) de l'énergie totale

Energie totale :

$$E_t = e + \frac{V^2}{2}$$

2.3.1 Forme non conservative

$$\rho \frac{Dh_t}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + div(\underline{V} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \underline{q}) + \rho f_v \cdot \underline{V}$$

2.3.2 Forme conservative

$$\frac{\partial(\rho h_t - P)}{\partial t} + div(\rho \underline{V} h_t) = div(\underline{V} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \underline{q}) + \rho f_v \cdot \underline{V}$$

2.4 Relation de comportement

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I_d}} + 2\mu \underline{\underline{D}} + \lambda tr(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I_d}}$$

3 Autres équations de transport

3.1 Equation de conservation de l'energie cinétique

On obtient cette équation en faisant $\underline{V} \cdot (E_q QDM)$ sachant que $\frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}u_i u_i$.

$$\rho \frac{D}{Dt}(\frac{V^2}{2}) = \underline{V} \cdot div(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{V} \cdot \rho \underline{f_v}$$

3.1.1 Forme non conservative

$$\rho \frac{D}{Dt}(\frac{V^2}{2}) = \rho(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{V^2}{2}) + grad(\frac{V^2}{2}) \cdot \underline{V}$$

3.1.2 Forme Conservative

$$\rho \frac{D}{Dt}(\frac{V^2}{2}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\rho V^2}{2}) + div(\rho \underline{V} \frac{V^2}{2})$$

3.2 Equation de conservation de l'enthalpie statique

Elle est obtenue en soustrayant l'équation de l'énergie totale et l'équation de l'énergie cinétique.

$$h_t = h + \frac{V^2}{2}$$

Remarque : h_t se conserve sur une ligne de courant quand l'écoulement est stationaire et adiabatique.

3.2.1 Energie totale

$$\rho \frac{Dh_t}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + div(\underline{V} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \underline{q}) + \rho f_v \cdot \underline{V}$$

3.2.2 Energie cinétique

$$\rho \frac{D}{Dt}(\frac{V^2}{2}) = \underline{V} \cdot div(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{V} \cdot \rho \underline{f_v}$$

3.2.3 Equation de transport de l'enthalpie statique h

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\tau}} - div(\underline{q})$$

3.2.4 Forme non conservative

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho(\frac{\partial h}{\partial t} + grad(h) \cdot \underline{V})$$

3.2.5 Forme conservative

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial \rho h}{\partial t} + div(\rho \underline{V} h)$$

3.3 Equation de conservation de l'energie interne

3.3.1 enthalpie statique

$$h = e + \frac{P}{\rho}$$

ρ	Masse volumique
P	Pression
e	Energie interne

3.3.2 Equation d l'energie interne

$$\rho \frac{De}{Dt} = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\tau}} - div(\underline{q}) - P \cdot \div(\underline{V})$$

3.3.3 Forme non conservative

$$\frac{De}{Dt} = \rho(\frac{De}{Dt} + grad(e \cdot \underline{V}))$$

3.3.4 Forme conservative

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + div(\rho \underline{V} e)$$

3.4 Equation de conservation (ou de transport) de l'entropie

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{\rho}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

On a donc

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T}\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} - \frac{1}{T} div(\underline{q})$$

On trouve donc :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T}\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} - div(\frac{q}{T}) - \frac{q}{T^2} grad(T)$$

Remarque : Si on regarde un volume matériel Vm :

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_{Vm}[\rho s]d\theta = \underbrace{\int\int_{\partial V_m} -\frac{\vec{q}\cdot\vec{m}}{T}dS}_{I_1} + \underbrace{\int\int\int_{Vm}(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} - \frac{q}{T^2}grad(T))d\theta}_{I_2}$$

Cette équation montre que la variation de s dans V_m ets du à I_1. I_1 est l'apport (<0 ou >0) de chaleur aux frontières de ∂V_m. I_2 est la variation du aux frottements, ici $\underline{\underline{\tau}}$ et conduction thermique. Si $\underline{\underline{\tau}} = 0$ et $grad(T) = 0$ alors $I_2 = 0$.

3.5 Equation de crocco

C'est une façon d'écrire l'equation de la quantité de mouvement, pour relier l'entropie et l'enthalpie totale au vecteur tourbilon : $\underline{\omega = rot(\underline{v})}$.

$$T \cdot grad(s) = grad(h_t) - \underline{v} \wedge \underline{\omega} - \frac{1}{\rho}\cdot div(\underline{\underline{\tau}}) - \underline{f_v} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$$

3.6 Equation du vecteur tourbillon

Elle est obtenue en prenant le rotationel de l'équation de Crocco.

$$\rho \cdot \frac{D}{Dt}(\frac{\underline{\omega}}{\rho}) = grad(T) \wedge grad(s) + (grad(\underline{v}))\cdot\underline{\omega} + rot(\frac{1}{\rho}div(\underline{\underline{\tau}})) + rot(\underline{f_v})$$

3.7 Equation de transport (ou de conservation) de la température statique

Cette équation est determinée à partir de l'équation pour l'enthalpie statique, elle même determinée en soustrayant l'energie cinétique de l'energie totale.

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{DT}{Dt} = \beta_p \cdot T \cdot \frac{DP}{Dt} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} - div(\underline{q})$$

Deuxième partie

Ecoulements incompressibles

4 Approximation incompressible

On appel un écoulement incompressible, un écoulement au sein duquel les variations de masse volumique ρ sont faible : $\rho =$ constante. On obtient alors le système suivant à résoudre :

$$\left| \begin{array}{l} div(\underline{V}) = 0 \\ \rho \cdot \frac{D\underline{V}}{Dt} = -grad(P) + \mu\Delta\underline{V} + \rho\underline{h} \end{array} \right.$$

5 Validité Approximation incompréssible

Pour l'air, on considère $\rho =$ constante quand $M \leq 0,3$ et en général pour l'eau. Voici ce que dit wikipedia si l'on se tient à une étude dans l'air :
• L'aérodynamique incompressible concerne les écoulements pour lesquels le nombre de Mach est inférieur à 0,2 environ, et se placer dans cette classe d'écoulements permet de prendre certaines hypothèses simplificatrices lors de l'étude des ces écoulements.
• L'aérodynamique compressible quant à elle se subdivise en aérodynamique : subsonique à Mach compris entre 0,2 et le Mach critique, ce qui correspond à une vitesse d'écoulement localement supérieure à la vitesse du son ; transsonique à Mach compris entre le Mach critique et 1 ; supersonique à Mach entre 1 et 5 et hypersonique au-delà.

6 Le rôle de la presion en écoulmement incompréssible

6.1 Traitement du champ de gravité

$$\underline{f_v} = -\underline{grad}(gH)$$

On peut ainsi écrire la conservation de la quantité de mouvement de la façon suivante :

$$\frac{DV}{Dt} = -grad(\frac{PH}{\rho}) + \nu\Delta\underline{V}$$

Par conséquent, pour les hypothèses d'un écoulement incompréssible, c'est à dire où $\rho =$ constante et $\mu =$ constante, on traite cet écoulement de la même façon avec ou sans gravité.

6.2 Théorème de bernouilli

On utilise l'équation de conservation de l'energie cinétique et on démontre l'équation de bernouilli généralisé :

$$\frac{D}{Dt}(\frac{V^2}{2}) = -\underline{V} \cdot grad(\frac{PH}{\rho}) + \nu \cdot \underline{V} \wedge \underline{V}$$

On retrouve certaines applications bien connu grâce à ce théorème comme l'effet venturi : Si un liquide s'écoule dans une canalisation, alors comme il est incompressible, son débit (volume transitant à travers une surface par unité de temps) est constant. Si la canalisation s'élargit, alors la vitesse diminue (puisque le débit est le produit de la vitesse par la section, les deux varient à l'inverse). Le théorème de Bernoulli nous indique alors que la pression augmente. À l'inverse, si la canalisation se rétrécit, le fluide accélère et sa pression diminue. On qualifie ce dispositif expérimental de tube de Venturi. Ce résultat est assez peu intuitif car on s'attendrait à ce que la pression augmente lorsque la section diminue.

Aproche historique : Voici ce que dit wikipedia concernant l'historique de ce théorème :
"La première formulation du théorème de Bernoulli apparaît dans Hydrodynamica - De viribus et motibus fluidorum commentarii de Daniel Bernoulli (première édition en 1738). Pour d'Alembert, ce texte est l'oeuvre fondatrice de l'hydrodynamique en tant que discipline physique moderne. Il est alors formulé comme un bilan macroscopique global et une méthode de calcul, dans le cadre de la résolution d'un problème technique : la détermination de la durée de vidange des vases munis d'un orifice."

Cette équation montre donc que la pression sur une ligne de courant est determinée par le champ de vitesse.

$$\underline{V} \cdot \underline{grad}(\frac{PH}{\rho}) = V\frac{\partial}{\partial n}\frac{PH}{\rho}$$

6.3 Equation de Poisson pour la pression.

Afin de mettre en évidence la dépendance du champ de pression et du champ de vitesse, on va prendre la divergence de l'équation de la quantité de mouvement en icompréssible. On trouve ainsi :

$$\Delta PH = \rho(grad\vec{V}) : (grad\vec{V})^T$$

6.4 Champ de température statique

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \beta_p T \frac{DP}{Dt} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} - div(\underline{q})$$

6.5 Ecoulement de Stokes, approximations

Les écoulements de stokes sont des écoulement trés lents ou $Re << 1$. L'accélération convective est négligeable devant l'accélération de diffusion.

$$R_e = \frac{\tau_D}{\tau_c} = \frac{V \infty D}{V} = \frac{\rho v D}{\mu} = nombre\ Reynolds$$

$$S_t = \frac{\tau_c}{\tau_i} = \frac{fD}{V} = nombre\ strouhal$$

$$fD = \frac{1}{\rho C_p}(\frac{DP}{Dt} + \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}})$$

$$M_a = \frac{V}{a} = nombre\ Mach, \quad a = \sqrt{\gamma R_g T}$$

Donc dans un écoulement de Stokes, on supprime le caractère non linéaire des équations de Navier Stokes, et dans ce cas l'influence de la viscosité du fluie s'exerce dans la totalité de l'écoulement et plus dans une couche mince appelée couche limite. Attention, on est toujours dans le cas d'écoulement incompréssible, donc si on considère un écoulement d'air alors le nombre de Mach est faible.

Troisième partie
Ecoulement compressible

On ne traitera que les cas d'air compéssible où le gaz est considéré comme thermodynamiquement parfait. La vitesse du son pour un gaz thermodynamiquement parfait est :

$$a = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{\gamma R_g T}$$

Pour un gaz thermodynamiquemet et calorifiquement parfait : $C_p(T) = cte$ $C_v(T) = cte$

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot R_g \quad C_v = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot R_g$$

$$s_2 - s_1 = c_v ln(\frac{T_2}{T_1}) - R_g ln(\frac{\rho_1}{\rho_2}) = c_p ln(\frac{T_2}{T_1}) - R_g ln(\frac{P_1}{P_2})$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

7 Grandeurs totales

$$h_t = h + \frac{v^2}{2}$$