Ecole Normale Supérieure de Cachan
Département de Génie Mécanique et de génie Civil
Résumé de Cours

Mathématiques pour la mécanique

Bertin Morgan

Cachan, le 8 juin 2009

Table des matières

I Introduction **5**

1 Exemples **5**
1.1 Problème de la chaleur . . . 5
1.2 Problème d'équilibre d'une membrane élastique . . . 5
1.3 Vibrations membrane ou corde vibrante (dynamique) . . . 5
1.4 Les différents types de conditions aux limites, cas du problème de la chaleur . . . 5
1.4.1 Condition de Dirichlet non homogène . . . 5
1.4.2 Condition de Neuman homogène . . . 6
1.4.3 Conditions mixtes . . . 6
1.4.4 Conditions d'échanges, Robin ou Fourrier . . . 6
1.4.5 Conditions du modèle parabolique . . . 6
1.5 Système de Lamé . . . 6
1.6 Système de Stokes . . . 6

2 Classification des equations aux dérivées partielles du second ordre (EDP) **6**
2.1 Définition : ordre d'une EDP . . . 6
2.2 Caractérisation . . . 6

3 Problème bien posé **7**
3.1 Définition d'un problème bien posé . . . 7

II Espaces Banach et Hilbert **7**

4 Espace de Banach **7**
4.1 Définition : espace de Banach . . . 7
4.2 Définition : un K espace vectoriel . . . 7
4.3 Définition : Une norme sur E . . . 7
4.4 Définition : Normes équivalentes . . . 7
4.5 Mise en garde . . . 7
4.6 Définition : suite de Cauchy . . . 7
4.7 Propriétés des suites de Cauchy . . . 8

5 Applications linéaires et bi-linéaires continues **8**
5.1 Applications linéaires continues . . . 8
5.2 Théorème . . . 8
5.3 Applications bi-linéaires continues . . . 8
5.4 Topologie faible et forte sur Banach . . . 9
5.4.1 Définition . . . 9
5.4.2 Définition de la convergence faible . . . 9

6 Espaces de Hilbert **9**
6.1 Définitions et propriétés . . . 9
6.1.1 Produit scalaire . . . 9
6.1.2 inégalité de Cauchy Scharz . . . 9
6.1.3 Définition d'un Hilbert . . . 9
6.1.4 Caractérisation d'un Hilbert . . . 9
6.2 Projection sur un convexe fermé . . . 9
6.2.1 définition . . . 9
6.2.2 Projection sur un espace de Hilbert . . . 10
6.2.3 Caractérisation du projeté . . . 10
6.3 Projection sur un sous espace vectoriel fermé . . . 10
6.3.1 Proposition . . . 10

6.3.2 Caractérisation du projeté orthogonal . . . 10
6.3.3 Proposition :L'application de projection orthogonale . . . 10
6.3.4 Proposition : l'ensemble suplémentaire orthogonale . . . 10
6.3.5 Théorème de Riez . . . 10

III Theorèmes de Stampacchia et ses corollaires 10

7 Théorèmes de Stampacchia 10
7.1 Corollaire *i* . . . 11
7.2 Corollaire *ii* . . . 11
7.3 Corollaire *iii* . . . 11

8 Théorème Lax Milgram 11
8.1 Théorème du point fixe de Banach - Picard . . . 11
8.2 Théorème de Stampachia et ses corollaires . . . 11
8.3 Théorème de Lax Milgram . . . 12
8.4 Lemme : Généralisation du théorème de Riez à des applications bilinéaires . . . 12
8.5 Corollaire *i* de Lax Milgram . . . 12
8.6 Corollaire *ii* de Lax Milgram . . . 12
8.7 Remarque sur la coercivité . . . 12
8.8 Proposition du théorème de Lax Milgram . . . 12

9 Principe des formulations variationnelles. 12

10 Formule de Green 12
10.1 Proposition 1 . . . 13
10.2 Proposition 2 . . . 13
10.3 Proposition 3 . . . 13
10.4 Quelques définitions . . . 13
10.4.1 Support d'une fonction f . . . 13
10.4.2 Support compact . . . 13

11 Espaces de Sobolew 13
11.1 Esapce $L^2(\Omega)$ . . . 14
11.1.1 Définition . . . 14
11.1.2 Propriétés . . . 14
11.1.3 Définition . . . 14
11.1.4 Proposition . . . 14
11.2 Espace $H^1(\Omega)$ . . . 14
11.2.1 Définition . . . 14
11.2.2 Propriétés . . . 14
11.2.3 Théorème de Rellich de compacité . . . 14
11.3 Trace et formule de Green . . . 15
11.3.1 Proposition . . . 15
11.3.2 Extension de la formule de Green . . . 15
11.4 L'espace $H_0^1(\Omega)$ . . . 15
11.4.1 Définition . . . 15
11.4.2 Propriétés . . . 15
11.4.3 Inégalité de Point Carré . . . 15
11.4.4 Proposition : équivalence des normes . . . 15

IV Application aux problèmes élliptiques 15

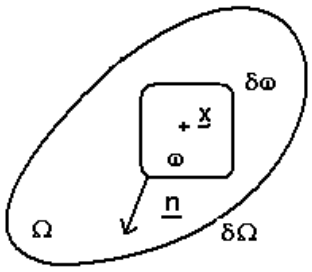
12 Problème du Laplacien **15**
12.1 Condition de Dirichlet 15
12.1.1 Définition 15
12.1.2 Proposition 1 15
12.1.3 Proposition 2 16
12.2 Condition de Neuman 16
12.2.1 Définition 16
12.2.2 Propositions 16
12.3 Condition de Dirichlet non homogène 16

Première partie
Introduction

1 Exemples

1.1 Problème de la chaleur

Corps au repos, occupe $\Omega \subset R^N \quad N = 1, 2, 3 \quad \partial\Omega$ frontière de Ω.



Loi constitutive :

$$q_i(\underline{x}, t) = -k(x)\frac{\partial T}{\partial x_i}(\underline{x}, t)$$

On trouve ainsi une equation aux dérivées partielles d'ordre 1 en t et d'ordre 2 en espace à compléter par les conditions initiales :

$$\forall x \in \Omega, \forall t > 0, \quad c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(\underline{x}, t) - k \cdot \Delta T(\underline{x}, t) = f(\underline{x}, t)$$

1.2 Problème d'équilibre d'une membrane élastique

Membrane élastique isotrope, tendue, encastrée au pourtour soumise à une force transversale $f(\underline{x})$ et $u(\underline{x})$ est le déplacement transversal.

$$x_1, x_2 \in \Omega^2 \quad -\mu\Delta x(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

$\mu > 0$ nous avons donc une équation de laplace ou de poisson. Cette équation est à conpléter avec les conditions initiales.

1.3 Vibrations membrane ou corde vibrante (dynamique)

Problème d'une membrane élastique en dynamique, il faut donc prendre en compte le temps dans notre étude : $f(\underline{x}, t) \Rightarrow u(\underline{x}, t)$. On a donc la relation d'équilibre suivante : $div(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}(\underline{x}, t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\underline{x}, t)$. On trouve ainsi l'équation de comportement de la membrane :

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\underline{x}, t) - \mu\Delta u(\underline{X}, t) = f(\underline{x}, t)$$

1.4 Les différents types de conditions aux limites, cas du problème de la chaleur

1.4.1 Condition de Dirichlet non homogène

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \quad T(\underline{x}, t) = T_1(t)$$

1.4.2 Condition de Neuman homogène

Exemple dans le cas du problème de la chaleur : les parois sont thermiquements isolées.

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \quad \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}, t) = 0$$

1.4.3 Conditions mixtes

$$\underline{x} \in \partial_1\Omega, \quad T(\underline{x}, t) = T_1 t$$
$$\underline{x} \in \partial_2\Omega, \quad \forall t > 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}, t) = 0$$

avec : $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$ et $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \oslash$.

1.4.4 Conditions d'échanges, Robin ou Fourrier

$$\underline{x} \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \quad \underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \alpha(T(\underline{x}, t) - T_1(t))$$

1.4.5 Conditions du modèle parabolique

$$k\frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}, t) + \alpha T(\underline{x}, t) = \alpha T_1(t)$$

Avec α coefficient d'échange. Le problème de la chaleur est le problème d'un modèle parabolique d'équations aux dérivées partielles.

1.5 Système de Lamé

$$(\lambda + \mu)\underline{grad}(div(\underline{u})) - \mu\Delta\underline{u} + f(\underline{x})$$

1.6 Système de Stokes

Fluide visqueux incompréssible, on note $p(\underline{x}, t)$, $u(\underline{x}, t)$ la pression et la vitesse.

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, t) = -grad(p(\underline{x}, t)) + \mu\Delta u(\underline{x}, t) + \rho f(\underline{x})$$

2 Classification des equations aux dérivées partielles du second ordre (EDP)

2.1 Définition : ordre d'une EDP

L'ordre d'une EDP est l'ordre de dérivation sur la fonction la plus élevée.

2.2 Caractérisation

u est une fonction inconnue $u(\underline{x}, t)$, forme générale d'une EDP ordre 2 :

$$a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$	Equation du type
>0	hyperbolique
$=0$	parabolique
<0	elliptique

3 Problème bien posé

Jacques Madomard (1860).

3.1 Définition d'un problème bien posé

Pour une donnée F, il éxiste une solution au problème (éxistence), cette solution est unique (unicité), la solution dépend continuement de la donnée f.

Deuxième partie
Espaces Banach et Hilbert

4 Espace de Banach

4.1 Définition : espace de Banach

F espace de Banach est un K espace vectoriel, normé, complet.

4.2 Définition : un K espace vectoriel

$K = \Re$ ou C, il est muni d'une loi interne $+ \left| \begin{matrix} E \times E \to E \\ (x,y) \mapsto x+y \end{matrix} \right.$ et d'une loi externe $\cdot \left| \begin{matrix} K \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{matrix} \right.$.

4.3 Définition : Une norme sur E

Une norme est une application $\left| \begin{matrix} K \times E \to \Re \\ x \mapsto \ \|x\|_E = N(x) \end{matrix} \right.$ qui vérifie :

1	$\forall x \in E \quad N(x) > 0$
2	Si $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3	$\forall \lambda \in K, \quad \forall x \in E \quad N(\lambda(x)) = \lvert\lambda\rvert \, N(x)$
4	$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

4.4 Définition : Normes équivalentes

E est K_{evn}, les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes :

$$\Leftrightarrow \exists \alpha > 0, \quad \exists \beta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1$$

4.5 Mise en garde

Attention sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, ce qui n'est **pas vérifié** sur un espace de dimenssion **infinie**.

4.6 Définition : suite de Cauchy

· E, K_{ev} complet normé si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

· Soit une suite $(x_n)_{n \in N}$, la suite est une suite de Cauchy si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_\epsilon > 0$, tel que $\forall n, \forall m, n \geq N_\epsilon, m \geq N_\epsilon$:

$$\|x_n - x_m\|_E \leq \epsilon$$

et $\forall \epsilon > 0 \quad \forall N_\epsilon > 0$ tel que $\forall n, \forall p$ avec $n \geq N_\epsilon$:

$$\|x_{n+p} - x_n\|_E \leq \epsilon$$

4.7 Propriétés des suites de Cauchy

1 · Toute suite de Cauchy est bornée

2 · Soit une suite de Cauchy, toute suite extraite est une suite de Cauchy.
$(x_n)_{n\in N}$ est une suite, $(x_{\alpha(n)})_{n\in N}$ est une suite extraite si α est une extractrice.
$\alpha : \left| \begin{array}{c} N \to N \\ n \longmapsto \alpha(n) \end{array} \right.$ strictement croissante.

3 · Toute suite de Cauchy qui admet une suite extraite convergente est convergente.

5 Applications linéaires et bi-linéaires continues

5.1 Applications linéaires continues

E K_{evn} $\|\cdot\|_E$
F K_{evn} $\|\cdot\|_F$
$L(E,F)$ ensemble des applications linéaire. On a équivalence des propriétés suivantes :

i · f continue en tout point x de E.
ii · f continue en $O \in E$.
iii · f est bornée sur la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ $\forall M > 0$ tel que $\forall x \in \overline{B}(0,1) \quad \|f(x)\|_F \leq M$
iv · f vérifie $\exists M > 0 \ \forall x \in E \ \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E \Rightarrow \exists M = \frac{\epsilon}{\nu} > 0$ tel que $\forall y \in \overline{B}(0,1) \quad \|f(y)\|_F \leq M$

5.2 Théorème

Si E est Dimenssion finie toute application $f \in L(E,F)$ linéaire **est continue**. Attention ceci est **faux** pour E de dimenssion **infine**.

5.3 Applications bi-linéaires continues

Soit $a \in L((E_1,E_2),F)$ avec
E_1 K_{evn} $\|\cdot\|_1$
E_2 K_{evn} $\|\cdot\|_2$
F K_{evn} $\|\cdot\|_F$
a bi-linéaire (a est linéaire par rapport à chacune de ces variables).

Equivalence des propriétés suivantes.

i · a continue en tout point $(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$. $E_1 \times E_2$ est muni de la norme produit $\|(x_1 \times x_2)\|_{E_1\times E_2} = Max(\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2})$
ii · a continue en $(0,0) \in E_1 \times E_2$.
iii · a est bornée sur la boule fermée $\overline{B}((0,1),1)$ de $(E_1 \times E_2)$
iv · a vérifie $\exists M > 0 \ \forall (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2 \ \|a(x_1,x_2)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}$

On note L_c(E,F) l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition : $f \in L_c(E,F)$
$|||f||| = sup_{x\in E\neq u} \frac{||f(x)||}{||x||_E}$ définiet une norme sur L_c(E,F) et on a :

$$\forall x \in E \quad ||f(x)||_F \leq |||f||| \cdot ||x||_E$$

Proposition : Si F est une espace de Banach $||\cdot||_F$ alors $L_c(E,F)$ est un Banach.

Exemple : $L_c(E,\Re)$ avec $E_{evn}||\cdot||_E$ espace des formes linéaires continues, $f : \begin{array}{c} E \to \Re \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ = dual topologique de E et un espace de Banach muni de la norme :

$$|||f||| = sup_{x\in E\leq 0} \frac{|f(x)|}{||x||_E}$$

5.4 Topologie faible et forte sur Banach

5.4.1 Définition

E,$||\cdot||_E$ Banach $(vn)_{n\in N} \in E$ $(vn)_{n\in N}$ converge fortement vers $v \in E$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \;\; \exists N > 0 \;\; \forall n \geq N \;\; ||vn - v||_E \leq \epsilon$$

5.4.2 Définition de la convergence faible

(vn) converge vers $v \in E$ faiblement :

$$\Leftrightarrow \forall L \in L_c(E, \Re) \;\; L(vn) \to L(v)$$

$$\forall L \in L_c(E, \Re) \; \forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon > 0 \; \forall n \geq N_\epsilon \;\; |L(vn) - L(v)| \leq \epsilon$$

Proposition : La convergence forte $\Rightarrow$ la convergence faible mais la réciproque et fausse si E est de dimenssion infinie.

6 Espaces de Hilbert

6.1 Définitions et propriétés

6.1.1 Produit scalaire

E_{ev}, application $\begin{array}{c} E \times E \to \Re \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) =< x, y > \end{array}$ qui est bilinéaire, symétrique, définie positive.

6.1.2 inégalité de Cauchy Scharz

$E_{ev}<\cdot,\cdot>$ Produit scalaire,

$$\forall x \in E \;\; \forall y \in E \;\; || < x, y > || \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}$$

Proposition $E_{ev}<\cdot,\cdot>$ Produit scalaire, alors $||x||_E = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E.

6.1.3 Définition d'un Hilbert

E_{ev},$<\cdot,\cdot>$ Prodiot scalaire. E est un Hilbert si c'est un Banach pour la norme associée $||x||_E = \sqrt{< x, x >}$.

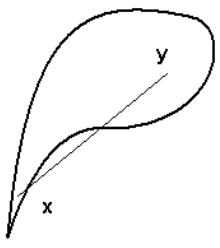
6.1.4 Caractérisation d'un Hilbert

$$< x, y >= f(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||_E^2 - ||x-y||_E^2||)$$

6.2 Projection sur un convexe fermé

6.2.1 définition

H est un ensemble, $K \subset H$ partie de H, K est convexe $\Leftrightarrow$ $\forall x \in K, \;\; \forall y \in K, \;\; \forall \alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha) y \in K$
Dans le schéma suivant K n'est pas un convexe.



Exemple : Les boules ouvertes et fermées sont des convexes.

6.2.2 Projection sur un espace de Hilbert

H est un espace de Hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||_H$ associé et K partie convexe fermée de H ($K \subset H$). $\forall x \in H$, il éxiste un unique élément de K : $x_k \in K$, $x_k = P_k(x)$ projeté de x sur K.

$$||x - x_k||_H = Inf_{y \in K}||x - y||$$

6.2.3 Caractérisation du projeté

H est un espace de Hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||_H$ associé et K convexe fermé de H

i soit $x \in H$, le projeté x_k sur K vérifie $\forall y \in K, \ \ < x - x_k, y - y_k > \leq 0$
ii réciproquement : si x_k élément de K vérifie $\forall y \in K, \ \ < x - x_k, y - y_k > \leq 0$ alors x_k est le projeté de x sur K : $||x - x_k|| = Inf_{y \in K}||x - y||$.

6.3 Projection sur un sous espace vectoriel fermé

6.3.1 Proposition

H est un Hilbert $< \cdot, \cdot >$ et de norme associé $K \subset H$ avec K_{sev} fermé. $\forall x \in H$, il vérifie un élément de K, $\lambda_k = P_k(x)$ appelé projeté de x orthogonal tel que :

$$||x - x_k|| = Inf_{y \in K}||x - y||$$

et x_k éxiste $< x - x_k, y >= 0, \ \ \forall y \in K$

6.3.2 Caractérisation du projeté orthogonal

H hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||$ associé K_{sef} de H. Soit $x \in H$, $x_k \in K$tel que :

$$\forall y \in K, \ \ < x - x_k, y >= 0$$

alors x_k est le projeté orthogonal de x sur K.

6.3.3 Proposition :L'application de projection orthogonale

H hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||$ associé K_{sef} de H. On définit l'application P_k projection orthogonale $P_k : \begin{matrix} H \to K \\ x \to x_k \end{matrix}$
Projeté orthogonal. P_k est une application linéaire, Lipschitzienne de rapport 1 (contractante) et P_k continue.

$$\forall x \in H, \ \ \forall y \in H \ \ ||P_k(x) - P_k(y)|| \leq ||x - y||$$

6.3.4 Proposition : l'ensemble suplémentaire orthogonale

H hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||$ associé K_{sef} de H. L'ensemble K_1 supplémentaire orthogonale de K définie par : $K_1 = [z \in H, \ \ y \in H \ \ < z, y >= 0$. Tout éléments $x \in H$ se décompose de façon unique : $x = x_k + z \ x_k \in K$ et $z \in K_1$ projeté orthogonal.

6.3.5 Théorème de Riez

Représentation des formes linéaires continues sur un Hilbert. H hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||$. $\forall L \in L_c(H, \Re)$ il éxiste un unique élément $u_L \in H$ tel que $L(v) =< u_L, v >$, $\forall v \in H$. Le dual topologique d'un hilbert s'identfie au Hilbert.

Troisième partie

Theorèmes de Stampacchia et ses corollaires

7 Théorèmes de Stampacchia

H hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||$ associé K_{sef} de H.
Soit K un convexe fermé de H, soit une application $\left| \begin{matrix} H \times H \to \Re \\ (u, v) \longmapsto a(u, v) \end{matrix} \right.$

• Bilinéaire.
• Symétrique $\forall\ u,\ \forall v \in H\ \ a(u,v) = a(v,w)$.
• Continue $\exists M > 0$ tel que $\forall u \in H,\ \forall v \in H$: :

$$|a(u,v)| \leq M||u||_H||v||_H$$

• ou élliptique $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall v \in H,\ \ a(u,v) \geq \alpha||v||_H^2$.
• Soit une application $\left| \begin{array}{c} H \to \Re \\ v \longmapsto L(v) \end{array} \right.$ linéaire et continue L $\in L_c(H, \Re)$
$\exists M > 0$ tel que $\forall v \in H\ \ |L(v)| \leq M||v||_H$ alors $\exists! u \in K$ tel que :

$$I(u) \leq I(v)\ \ \forall v \in K$$

avec $I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$ et u minimise $I(v)$ su K.

7.1 Corollaire *i*

Sous les hypothèses des théorèmes de Stampacchia (inéquation variationnelle).

$$\exists! u \in K\ \&\ I(u) \leq I(v)\ \forall v \in K \quad \Leftrightarrow \quad \exists! u \in K\ \&\ \ a(u, v-u) \geq L(v-u)\ \forall v \in K$$

7.2 Corollaire *ii*

Sous les hypothèses du théorème de Stampacchia et K sous espace vectoriel fermé (equation variationnelle) alors :

$$\exists! u \in K\ \ tq\ \ I(u) \leq I(v)\ \ \forall v \in K \quad \Leftrightarrow \quad \exists! u \in K\ \ tq\ \ a(u,v) = L(v)\ \ \forall v \in K$$

7.3 Corollaire *iii*

Sous les hypothèses de Stampacchia et k une variété linéaire affine fermée et un sous espace affine fermé.

$$\exists! u \in K\ \ tq\ \ I(u) \leq I(v)\ \ \forall v \in K \quad \Leftrightarrow \quad \exists! u \in K\ \ tq\ \ a(u, v-u) = L(v-u)\ \ \forall v \in K$$

8 Théorème Lax Milgram

Soit H un Hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||_H$, K sous espace vectoriel fermé de H. Soit a une application bilinéaire, coercive sur H. Soit L une application de $H \to \Re$ linéaire, continue sur H. Alors il existe une unique solution :

$$\forall u \in K,\ \ \forall v \in K,\ \ a(u,v) = L(v)$$

Attention, a n'éttant plus symétrique on n'a plus l'équivalence entre l'équation variationnelle et le problème de minimisation $I(u) \leq I(v) \forall (u,v) \in K^2$.

8.1 Théorème du point fixe de Banach - Picard

Soit H un Banach, K sous espace vectoriel de H. T une application de $k \to K$ contractante, telle que $\exists k \in [0,1[\ \ \forall (u,v) \in K^2$

$$||T(u) - T(v)||_H \leq k||u - v||_H$$

alors $\exists! u \in K,\ \ T(u) = u$ Partie fixe.

8.2 Théorème de Stampachia et ses corollaires

Soit H un Hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||_H$
$a : H \times H \to \Re$ Bilinéaire, symétrique, continue, coercive ou elliptique.
$L : H \to \Re$ linéaire continue.
Soit K un convexe fermé de H $\left| \begin{array}{c} \exists! u \in K \\ I(u) \leq I(v) \forall v \in K \end{array} \right.$.
Avec

$$I(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) \quad \Leftrightarrow \quad \forall (u,v) \in K^2\ a(u, v-u) \geq L(v-u)$$

• Soit K une variété affine fermée de H : $\exists! u \in K \ a(u, v-u) = L(v-u), \forall v \in K$.
• Soit K est un sous espace vectoriel fermé : $\exists! u \in K \ a(u,v) = L(v), \forall v \in K$.
Cas particulier : K=H : $\exists! u \in H \ a(u,v) = L(v), \forall v \in H$.

8.3 Théorème de Lax Milgram

Soit H un Hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||_H$
$a : H \times H \to \Re$ linéaire, symétrique, continue, coercive.
$L : H \to \Re$ linéaire continue.
Soit K un sous espace vectoriel fermé :

$$\exists! u \in K \ a(u,v) = L(v), \forall v \in K.$$

8.4 Lemme : Généralisation du théorème de Riez à des applications bilinéaires

Soit H un Hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||_H$
$a : H \times H \to \Re$ bilinéaire, continue, alors $\exists!$ opérateur A, linéaire, et continue : $\left| \begin{matrix} H \to H \\ u \longmapsto Au \end{matrix} \right.$ telle que :

$$\forall u \in H, \quad a(u,v) =< Au, v >$$

8.5 Corollaire i de Lax Milgram

Soit H un Hilbert, $< \cdot, \cdot >$ et $|| \cdot ||_H$
$a : H \times H \to \Re$ bilinéaire, continue, coercive.
$L : H \to \Re$ linéaire continue.
Soit K un convexe fermé de H :

$$\exists u \in K, \quad a(u, v-u) \geq L(v-u) \forall v \in K$$

8.6 Corollaire ii de Lax Milgram

Même hypothèse que Lax Milgram et en plus K est une variété linaire affine fermée de H.

$$\exists u \in K, \quad a(u, v-u) = L(v-u) \forall v \in K$$

8.7 Remarque sur la coercivité

Hypothèse nécessaire pour avoir l'éxistence d'une solution. Exemple : Soit $a(u,v) = 0 \ \ \forall (u,v) \in H^2$. a est bien continue : $|a(u,v)| \leq M||u||||v||$ par contre a n'est pas coersive : $a(u,v) = 0 \geq \alpha ||u||^2 \ \alpha > 0$.
Soit L telle que $L(v) \neq 0 \ v \in H$ linéaire continue, alors le problème :
trouver $u \in H$ tel que $a(u,v) = L(v) \ \ \forall v \in H$ n'a pas de solution : $0 = L(v) \ \ \forall v \in H$.

8.8 Proposition du théorème de Lax Milgram

Soit u la solution du problème $u \in H$ tel que $a(u,v) = L(v) \ \ \forall v \in H$ u vérifie :
$\exists M > 0$ tel que $||u|| < M|||L||||$ c'est à dire la solution u dépend continuement de la donnée L.

9 Principe des formulations variationnelles.

Problème locale $\overset{Intgrationparpartie}{\longrightarrow}$ Problème globale.
Problème globale $\to$ existence et unicité + continuité de la solution.
existence et unicité + continuité de la solution $\overset{Interprtatationdelaformulation}{\longrightarrow}$ Problème locale.

10 Formule de Green

Soit Ω un domraine de $\Re^N$, Ω ouvert fermé régulier.

10.1 Proposition 1

Soit $f \in E^1(\Omega))$ alors :

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f(x) n_i dx$$

• Soit $\vec{v} \in [E^1(\Omega)]^4$

$$\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} v_i n_i dx$$

• Soient f et g appartenant à $E^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = -\int_\Omega \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} f(x) dx \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n(x) dx$$

• $f \in E^2(\Omega),\ g \in E^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta f(x) g(x) dx = -\int_\Omega \vec{grad}(f) \cdot \vec{grad}(g) dx + \int_{\partial\Omega} \vec{grad}(f) \cdot \vec{n} g(x) dx$$

10.2 Proposition 2

On suppose que u existe et appartient à $E^2(\Omega)$ alors u vérifie $\forall v \in K$:

$$a(u,v) = L(v) = \int_\Omega \nabla\vec{u} \cdot \nabla\vec{v} dx \quad L(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx$$

10.3 Proposition 3

On suppose que u existe, $u \in C^2(\Omega)$ alors u solution de (P) vérifie la formaulation P faible ou variationnelle :

$u \in V = v \in C^1(\Omega); v = 0 \quad sur\ \partial\Omega$
$a(u,v) = L(v)\ \forall v \in V$
avec $\quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx \quad$ et $L(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx$

Si u est solution de P variationnelle alors il est solution de (P).

Lemme Soit $g \in C^0(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega g(x) \Phi(x) dx = 0 \quad \forall \Phi \in C_c^\alpha(\Omega)$$

espace fonctionnelle indéfiniement continue à support compact dans Ω. Alors $g(x) = 0\ \forall x \in \Omega$.

10.4 Quelques définitions

10.4.1 Support d'une fonction f

• Le plus petit fermé tel que la fonction f soit nulle que son complémentaire.
• Le fermé tel que son somplémentaire est le plus grand ouvert sur lequel f est nulle.

10.4.2 Support compact

$\Omega \subset \Re^n\ N = 1,2,3$ fermé borné. $C_c^\infty = D(r)$ fonctions régulières qui s'annulent sur le bord de Ω.
Exemple :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}\ \forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = O\ \ \forall x \neq]-1,1[$$

11 Espaces de Sobolew

Si f est régulière l'intégrale de Rieman coincide avec l'intégrale de Lebersque.

11.1 Esapce $L^2(\Omega)$

11.1.1 Définition

Ω ouvert normé de $\Re^4$.

$$L^2(\Omega) = f \ telle \ que \ \int_\Omega |f(x)|^2 dx < +\infty$$

11.1.2 Propriétés

i $L^2(\Omega)$ est un espace vectoriel.

ii Produit scalaire : $< u, v >= \int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx$ avec la norme associé : $||u||_{L^2} = \left(\int_\Omega u(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

iii L^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme décris précédement.

iv $L^\infty \subset L^2 \subset L^1$ avec

$L^\infty = \{f \ / \ ||f||_{L^\infty} = Sup_{x\in\Omega} |f(x)| < +\infty\}$

$L^1(\Omega) = \left\{f \ / \ ||f||_{L^1} = \int_\Omega |f(x)| \, dx < +\infty\right\}$

v L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$

11.1.3 Définition

$f \in L^2(\Omega)$ admet des dérivées partielles dites faibles si et seulement si il éxiste $w_i \in L^2(\Omega)$ $i = 1, 2..N$ telles que :

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega w_i(x) \Phi(x) dx \ \ \forall \Phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Les w_i sont les dérivés partielles faibles de f et on note $w_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

11.1.4 Proposition

i. Si f est dérivable faiblement alors ses dérivées partielles faibles sont uniques au sens de $L^2(\Omega)$.

ii. Si f est $C^1(\Omega)$ alors ses dérivées (fortes) classiques coincident avec les dérivés faibles.

iii. Caractérisation des fonctions dérivables faiblement, $f \in L^2(\Omega)$ telle que $\exists M > 0$:

$$\left| \int_\Omega f(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} dx \right| \leq M \left(\int_\Omega |\Phi(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall \Phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

11.2 Espace $H^1(\Omega)$

11.2.1 Définition

Ω ouvert borné régulier de $\Re^N$, $N = 1, 2, 3$, $H^1(\Omega = \left\{v \in L^2(\Omega) frac \partial v \partial x_i \in L^2(\Omega)\right\}$

11.2.2 Propriétés

i. $< f, g >= \int_\Omega f(x) g(x) dx + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dx$ et $\|f\|_{H^1} = \sqrt{< f, f >}$.

ii. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour $< f, g >_{H^1}$

iii. $C^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ ($f \in C^1(\Omega) \Longrightarrow$ dérivés fortes coincident avec d.faibles$\Longrightarrow f \in H^1(\Omega)$.

iv. Mais les fonctions $H^1(\Omega)$ ne sont pas necessairement continues et bornés sur Ω

11.2.3 Théorème de Rellich de compacité

De toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une suite convergente dans $L^2(\Omega)$.

11.3 Trace et formule de Green

11.3.1 Proposition

L'application $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, $f \longmapsto \gamma f = f_{\partial\Omega}$ est linéaire continue et on a $\exists M > 0$ telle que :

$$\|\gamma_0 f\|_{L^2(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|f\|_{H^1(\Omega)}$$

11.3.2 Extension de la formule de Green

$\forall f, g \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = -\int_\Omega \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} f(x) dx \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) n(x) dx$$

11.4 L'espace $H_0^1(\Omega)$

11.4.1 Définition

$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega),\ tq\ \gamma_0 v = v\big|_{\partial\Omega} = 0. \right.$

11.4.2 Propriétés

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$ et norme associé.

11.4.3 Inégalité de Point Carré

Ω ouvert borné régulier de $\Re^N$, il existe $C > 0$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ alors :

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|\nabla v\|_{L^2}$$

Attention cette inégalité est vraie pour $v \in H_0^1(\Omega)$ mais fausse pour $v \in H^1(\Omega)$.

11.4.4 Proposition : équivalence des normes

Les normes $\|f\|_{H^1(\Omega)}$ et$|f| = \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla f\|_{L^1(\Omega)}$ sont équivalentes sur $H_0^1(\Omega)$:

$$\alpha \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq |f| \leq \beta \|f\|_{H^1(\Omega)}$$

Quatrième partie
Application aux problèmes élliptiques

12 Problème du Laplacien

12.1 Condition de Dirichlet

12.1.1 Définition

i. $-\Delta u = f$ preque partout dans Ω au sens de $L^2(\Omega)$.
ii. $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$ au sens de $L^2(\Omega)$.

12.1.2 Proposition 1

Ω ouvert borné régulier de $\Re^n$ $f \in L^2(\Omega)$ alors le problème variationnel

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

admet une unique solution et cette solution vérifie :
i. $-\Delta u = f$ preque partout dans Ω au sens de $L^2(\Omega)$.
ii. $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$ au sens de $L^2(\Omega)$.

12.1.3 Proposition 2

u solution du problème variationnel vérifie :

$$\left| \begin{array}{c} u \in H_0^1(\Omega) \\ I(u) \leq I(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right|$$

et

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega fv dx$$

12.2 Condition de Neuman

12.2.1 Définition

i. $-\Delta u = f$ preque partout dans Ω au sens de $L^2(\Omega)$.

ii. $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ presque partout sur $\partial\Omega$ au sens de $L^2(\Omega)$.

12.2.2 Propositions

i • Ω ouvert borné régulier de $\Re^n$, $\exists c > 0$ telle que $\forall v \in H^1(\Omega)$:

$$\|v - m(v)\|_{L^2} \leq c \|\nabla v\|_{L^2} \;\; avec \; m(v) = \frac{\int_\Omega v dx}{\int_\Omega 1 dx}$$

ii • Sous les hypothèses $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial)$ et vérifient : $\int_\Omega f dx + \int_{\partial\Omega} g dS = 0$, alors il existe une solution $u \in H^1$ définit à une constante additive prés telle que :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v dS$$

iii • Sous les hypothèses de la proposition précédente, u étant solution du problème variationel, $\exists C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\|f\|_{C^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

iv • Soit u solution du problème variationel, u vérifie : $u \in V \;\; I(u) \leq I(v), \;\; \forall v \in V$ et réciproquement :

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega fv dx - \int_{\partial\Omega} gv dS$$

12.3 Condition de Dirichlet non homogène