Ecole Normale Supérieure de Cachan Département de Génie Mécanique Correction

Correction partie 2 partiel 2006 session 1

Bertin Morgan

Table des matières

1 Qu	estion :	2.1				
1.1	Equat	ions du problème				
	$1.\overline{1.1}$	Cinématiquement admissible				
	1.1.2	Statiquement admissible				
	1.1.3	Equation d'équilibre				
	1.1.4	relation de comportement				
2 Qu	estion 2	2.2				
3 Qu	Question 2.3					
3.1	Equat	ions du problème				
	3.1.1	Cinématiquement admissible				
	3.1.2	Statiquement admissible				
	3.1.3	Equation d'équilibre				
	3.1.4	relation de comportement				
4 Qւ	estion :	2.4				
4.1	Hypot	chèses				
4.2	Tenset	ur de déformation linéarisé ϵ				

1 Question 2.1

Nous avons ici deux solides distincts et nous devons prendre en compte le poids.

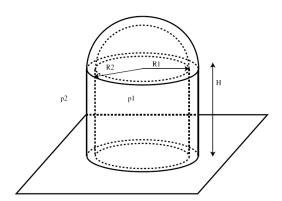


Fig. 1 – Structure étudié

1.1 Equations du problème

1.1.1 Cinématiquement admissible

pour z = 0 le cylindre est toujours en contact avec le plan :

$$\underline{u_d}^{cyl} \cdot \underline{u_z} = 0$$

pour z = h les deux surfaces sont collées :

$$\underline{u_d}^{cyl} = \underline{u_d}^{boul}$$

1.1.2 Statiquement admissible

pour
$$r = R2$$

$$\begin{array}{ll} \text{Sur le cylindre} & \frac{e_r^{\,\,cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,cyl} \cdot \underline{e}_r^{\,\,cyl} = -P_2 \cdot \underline{e}_r^{\,\,cyl}}{\underline{e}_\theta^{\,\,cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,cyl} \cdot (-\underline{e}_r^{\,\,\,cyl}) = 0} \\ & \underline{e}_\theta^{\,\,cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,cyl} \cdot (-\underline{e}_r^{\,\,\,cyl}) = 0 \\ \text{Sur la sphère} & \underline{e}_r^{\,\,boul} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,cyl} \cdot \underline{e}_r^{\,\,boul} = -P_2 \cdot \underline{e}_r^{\,\,boul} \\ & \underline{e}_\theta^{\,\,boul} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,cyl} \cdot \underline{e}_r^{\,\,boul} \cdot (-\underline{e}_r^{\,\,boul}) = 0 \\ & \underline{e}_z^{\,\,boul} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,boul} \cdot (-\underline{e}_r^{\,\,boul}) = 0 \end{array}$$

pour r = R1

$$\begin{array}{ll} \text{Sur le cylindre} & \frac{e_r^{\,\,cyl} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{\,\,cyl} \cdot (-\underline{e_r}^{\,\,cyl}) = P_1 \cdot \underline{e_r}^{\,\,cyl}}{\underline{e_\theta^{\,\,cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}}^{\,\,cyl} \cdot (-\underline{e_r^{\,\,\,cyl}}) = 0} \\ & \underline{e_\theta^{\,\,cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,cyl} \cdot (-\underline{e_r^{\,\,\,cyl}}) = 0} \\ \text{Sur la sphère} & \frac{e_z^{\,\,\,cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,\,cyl} \cdot (-\underline{e_r^{\,\,\,boul}}) = P_1 \cdot \underline{e_r^{\,\,\,boul}}}{\underline{e_\theta^{\,\,\,boul} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,\,boul} \cdot (-\underline{e_r^{\,\,\,\,boul}}) = 0} \\ & \underline{e_z^{\,\,\,boul} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{\,\,\,\,\,boul} \cdot (-\underline{e_r^{\,\,\,\,\,\,\,\,}boul}) = 0} \end{array}$$

pour z=h, les surfaces sont collées :

Sur le cylindre
Sur la sphère
$$\begin{vmatrix} \underline{e_r}^{boul} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot (-\underline{e_z}) = \underline{e_r}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{boul} \cdot \underline{e_z}^{cyl} \\ \underline{e_\theta}^{boul} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{boul} \cdot (-\underline{e_z}) = \underline{e_\theta}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot \underline{e_z}^{cyl} \end{aligned}$$

pour z = 0, il n'y a pas de frottements :

$$\underline{e}_r^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot (-\underline{e}_z) = \underline{e}_{\underline{\theta}}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot (-\underline{e}_z) = 0$$

1.1.3 Equation d'équilibre

$$div(\underline{\underline{\sigma}}^{cyl}) - m \cdot g \cdot \underline{e_z} = 0$$
$$div(\underline{\underline{\sigma}}^{boul}) - m \cdot g \cdot \underline{e_z} = 0$$

1.1.4 relation de comportement

$$\begin{split} &\underline{\underline{\sigma}}^{boul} = \lambda \cdot tr(\underline{\underline{\epsilon}}^{boul}) + 2 \cdot \nu \underline{\underline{\epsilon}}^{boul} \\ &\underline{\underline{\epsilon}}^{boul} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{boul} - \frac{\nu}{E} \cdot tr\underline{\underline{\sigma}}^{boul} \cdot \underline{\underline{I}} \\ &\underline{\underline{\sigma}}^{cyl} = \lambda \cdot tr(\underline{\underline{\epsilon}}^{cyl}) + 2 \cdot \nu \underline{\underline{\epsilon}}^{cyl} \\ &\underline{\underline{\epsilon}}^{cyl} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} - \frac{\nu}{E} \cdot tr\underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot \underline{\underline{I}} \end{split}$$

2 Question 2.2

Le problème est un problème bien posé (il y a trois équations pour chaques faces, de plus le problème n'est pas à déplacements imposés, le cylindre peu translater suivant $\underline{e_r}$ et $\underline{e_\theta}$, la solution si elle éxiste n'est donc pas unique. Le système est à l'équilibre donc la somme des forces extérieurs appliquée sur le système est nul :

$$\sum \underline{F} = 0$$

Donc la solution **existe** et elle n'est **pas** unique.

3 Question 2.3

Dans une deuxième partie on ne s'intéresse qu'au cylindre seul et on modélise l'action de la demisphère par une pression P_0 constante.

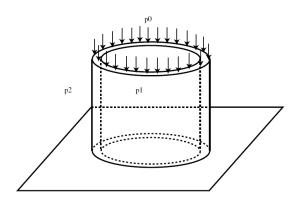


Fig. 2 - Cylindre sans sphère

3.1 Equations du problème

3.1.1 Cinématiquement admissible

pour z = 0 le cylindre est toujours en contact avec le plan :

$$u_d{}^{cyl} \cdot u_z = 0$$

3.1.2 Statiquement admissible

pour
$$r = R2$$

$$\begin{array}{ll} \text{Sur le cylindre} & \left| \begin{array}{l} \underline{e_r}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot \underline{e_r}^{cyl} = -P_2 \cdot \underline{e_r}^{cyl} \\ \underline{e_\theta}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{cyl} \cdot \underline{(-e_r}^{cyl}) = 0 \\ \underline{e_z}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot (-\underline{e_r}^{cyl}) = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

pour r = R1

Sur le cylindre
$$\begin{vmatrix} \underline{e_r}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{cyl} \cdot (-\underline{e_r}^{cyl}) = P_1 \cdot \underline{e_r}^{cyl} \\ \underline{\underline{e_\theta}}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{cyl} \cdot (-\underline{e_r}^{cyl}) = 0 \\ \underline{\underline{e_z}}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{cyl} \cdot (-\underline{\underline{e_r}}^{cyl}) = 0 \end{vmatrix}$$

pour z=h, une pression est appliqué de manière uniforme sur l'ensemble de la surface supérieur et vaut P_0

Sur le cylindre
$$\begin{vmatrix} \underline{e_z}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot \underline{e_z}^{cyl} = -P_0 \cdot \underline{e_z}^{cyl} \\ \underline{\underline{e_\theta}^{cyl}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}^{cyl}} \cdot (-\underline{e_z}^{cyl}) = 0 \\ \underline{\underline{e_r}^{cyl}} \cdot \underline{\underline{\sigma}^{cyl}} \cdot (-\underline{e_z}^{cyl}) = 0 \end{vmatrix}$$

pour z = 0, il n'y a pas de frottements :

$$\underline{e}_r^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot (-\underline{e}_z) = \underline{e}_{\underline{\theta}}^{cyl} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot (-\underline{e}_z) = 0$$

3.1.3 Equation d'équilibre

$$div(\underline{\underline{\sigma}}^{cyl}) - m \cdot g \cdot \underline{e_z} = 0$$

3.1.4 relation de comportement

$$\underline{\underline{\sigma}}^{cyl} = \lambda \cdot tr(\underline{\underline{\epsilon}}^{cyl}) + 2 \cdot \nu \underline{\underline{\epsilon}}^{cyl}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{cyl} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{cyl} - \frac{\nu}{E} \cdot tr\underline{\underline{\sigma}}^{cyl} \cdot \underline{\underline{I}}$$

4 Question 2.4

4.1 Hypothèses

On suppose que le champs de déplacement est de la forme :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_r(r) \\ 0 \\ u_z(z) \end{pmatrix}$$

Il ne faut pas oublié de vérifier si le champs de déplacement est bien cinématiquement admissible : c'est à dire

pour
$$z = 0$$

$$\underline{u_d}^{cyl} \cdot \underline{u_z} = 0$$

$$u_z(0) = 0$$

Donc le champs de déplacement est cinématiquement admissible si et seulement si $u_z(0) = 0$.

4.2 Tenseur de déformation linéarisé ϵ

Par définition :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{\partial \underline{u}}{\partial M_0} + (\frac{\partial \underline{u}}{\partial M_0})^t)$$

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0\\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Table des figures

1	Structure étudié	
2	Cylindre sans sphère	4